



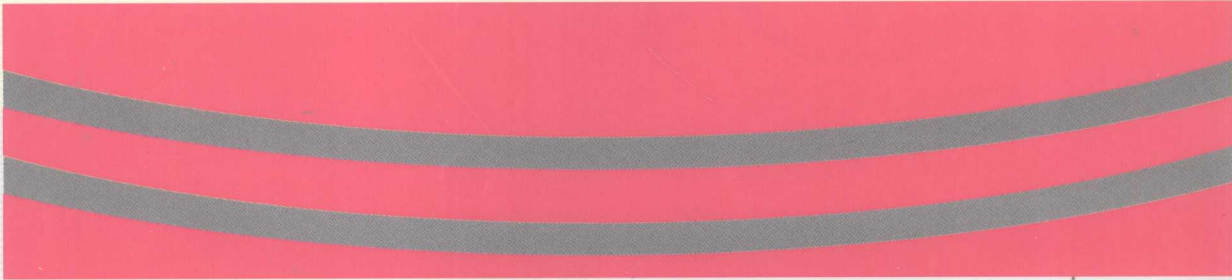
高等职业教育  
基础类课程规划教材

# 新编工程数学

(复变函数基础 积分变换 数值计算 矢量分析)

新世纪高等职业教育教材编审委员会组编

主 编/李 颖



GAODENG ZHIYE JIAOYU JICHULEI  
KECHENG GUIHUA JIAOCAI

TB11  
L312:1



教育基础类课程规划教材  
GAODENGZHIYE JIAOYU JICHULEI KECHENG GUIHUAJIAOCAI

# 新编工程数学

(复变函数基础 积分变换 数值计算 矢量分析)

新世纪高等职业教育教材编审委员会组编

主编/李 颖 副主编/戴志国 程敬松 张 莉



XINBIAN GONGCHENG SHUXUE

ISBN 7-5603-3000-0

李 颖 程敬松 张 莉

责任编辑: 王 芳

(元 00.81 册本) 元 00.86: 付宝

大连理工大学出版社

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

新编工程数学(复变函数基础 积分变换 数值计算 矢量分析)/李颖主编. —大连:大连理工大学出版社,2002.8

高等职业教育基础类课程规划教材

ISBN 7-5611-2140-7

I.新… II.李… III.工程数学-高等学校:技术学校-教材 IV.TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 047402 号

大连理工大学出版社出版发行  
大连市凌水河 邮政编码:116024  
电话:0411-4708842 传真:0411-4701466  
E-mail:dlutp@mail.dlptt.ln.cn  
URL: <http://www.dutp.com.cn>  
大连业发印刷有限公司印刷

---

开本:787 毫米×1092 毫米 1/16 字数:303 千字 印张:13  
印数:1—3000 册

2002 年 8 月第 1 版 2002 年 8 月第 1 次印刷

---

责任编辑:郑淑芹

责任校对:李 红

封面设计:王福刚

---

定价:36.00 元(本册 18.00 元)

## 教材建设指导委员会

### 主任委员:

戴克敏(大连职业技术学院院长 教授)

### 副主任委员(以姓氏笔画为序):

王 敏(辽宁商务职业学院院长 教授)

王永申(盘锦职业技术学院院长)

李竹林(河北建材职业技术学院院长 副教授)

范利敏(丹东职业技术学院院长 教授)

宛 力(沈阳电力高等专科学校副校长 教授)

聂云超(渤海船舶职业学院院长 副教授)

曹勇安(黑龙江东亚学团董事长 齐齐哈尔职业学院院长 副教授)

常 佶(内蒙古工业大学副校长 教授)

鞠学孟(吉林财税高等专科学校校长 教授)

### 会员单位(排名不分先后):

沈阳电力高等专科学校

丹东职业技术学院

大连职业技术学院

辽宁商务职业学院

齐齐哈尔职业学院

青岛大学高等职业技术学院

烟台大学职业技术学院

广西财政高等专科学校

南昌水利水电高等专科学校

山东铝业职业技术学院

河北建材职业技术学院



燕山大学继续教育学院  
承德石油高等专科学校  
内蒙古工业大学职业技术学院  
内蒙古财经学院高职教育部  
内蒙古建筑职业技术学院  
呼伦贝尔学院  
包头钢铁学院职业技术学院  
齐齐哈尔大学职业技术学院  
大庆职业技术学院  
佳木斯大学职业技术学院  
黑龙江省建筑职业技术学院  
牡丹江大学  
吉林财税高等专科学校  
吉林交通职业技术学院  
吉林粮食高等专科学校  
吉林大学应用技术学院  
四平职业大学  
沈阳师范学院高等职业技术学院  
鞍山钢铁学院职业技术学院  
鞍山师范学院职业技术学院  
本溪冶金高等专科学校  
渤海船舶职业学院  
朝阳师范高等专科学校  
大连大学  
大连轻工业学院职业技术学院  
大连国际商务职业学院  
大连水产学院职业技术学院  
辽宁对外经贸职业学院  
辽宁机电职业技术学院  
东北财经大学高等职业技术学院  
抚顺师范高等专科学校  
抚顺石油学院高等职业技术学院  
抚顺职业技术学院  
阜新高等专科学校  
锦州师范高等专科学校  
锦州师范学院  
辽宁财政高等专科学校

辽宁大学高等职业技术学院  
辽宁工程技术大学技术与经济学院  
辽宁工程技术大学职业技术学院  
辽宁工学院职业技术学院  
辽宁公安司法管理干部学院  
辽宁经济管理干部学院  
辽宁农业管理干部学院  
辽宁农业职业技术学院  
辽宁省交通高等专科学校  
辽阳职业技术学院  
辽阳石油化工高等专科学校  
盘锦职业技术学院  
沈阳大学高等职业技术学院  
沈阳大学师范学院  
沈阳工业大学高等职业技术学院  
沈阳建工学院高等职业技术学院  
沈阳农业大学高等职业技术学院  
铁岭师范高等专科学校  
营口高等职业学院  
辽宁金融职业技术学院  
沈阳建工学院职业技术学院  
辽阳信息职业技术学院  
辽宁中医学院职业技术学院  
沈阳电视大学  
沈阳医学院职业技术学院  
沈阳音乐学院职业艺术学院  
沈阳职工大学  
大连医学院丹东分院



新世報

# 总序

我们已经进入了一个新的充满机遇与挑战的时代,我们已经跨入了 21 世纪的门槛。

20 世纪与 21 世纪之交的中国,高等教育体制正经历着一场缓慢而深刻的革命,我们正在对传统的普通高等教育理论教学与社会发展的现实需要不相适应的现状作历史性的反思与变革的尝试。

20 世纪最后的几年里,高等职业教育的迅速崛起,是影响高等教育体制变革的一件大事。在短短的几年时间里,普通中专教育、普通高专教育全面转轨,以高等职业教育为主导的各种形式的应用型人才培养的教育发展到与普通高等教育等量齐观的地步,其来势之迅猛,迫人深思。

无论是正在缓慢变革着的普通高等教育,还是迅速推进着的应用型人才培养的高等职业教育,都向我们提出了一个同样的严肃问题:中国的高等教育为谁服务,是为教育发展自身,还是为包括教育在内的大千社会?答案肯定而且惟一,那就是教育也置身其中的现实社会。

由此又引发出高等教育的目的问题。既然教育必须服务于社会,它就必须按照不同领域的社会需要来完成自己的教育过程。换言之,教育资源必须按照社会划分的各个专业(行业)领域(岗位群)的需要实施配置,这就是我们长期以来明乎其理而疏于力行的学以致用问题,这就是我们长期以来未能给予足够关注的教育的目的问题。

如所周知,整个社会由其发展所需要的不同部门构成,包括公共管理部门如国家机构、基础建设部门如教育研究机构和各种实业部门如工业部门、商业部门,等等。每一个部门又可作更为具体的划分,直至同它所需要的各种专门人才相对应。教育如果不能按照实际需要完成各种专门人才培养的目标,就不能很好地完成社会分工所赋予它的使命,而教育作为社会分工的一种独立存在就应受到质疑(在市场经济条件下尤其如此)。可以断言,按照社会的各种不同需要培养各种直接有用人才,是教育体制变革的终极目的。

随着教育体制变革的进一步深入,高等院校的设置是否会同社会对人才类型的不同需要一一对应,我们姑且不论。但高等教育走应用型人才培养的道路和走理论型(也是一种特殊应用)人才培养的道路,学生们根据自己的偏好各取所需,始终是一个理性运行的社会状态下高等教育正常发展的途径。

高等职业教育的崛起,既是高等教育体制变革的结果,也是高等教育体制变革的一个阶段性表征。它的进一步发展,必将极大地推进中国教育体制变革的进程。作为一种应用型人才培养的教育,高等职业教育从专科层次起步,进而高职本科教育、高职硕士教育、高职博士教育……当应用型人才培养的渠道贯通之时,也许就是我们迎接中国教育体制变革的成功之日。从这一意义上说,高等职业教育的崛起,正是在为必然会取得最后成功的教育体制变革奠基。

高职教育还刚刚开始自己发展道路的探索过程,它要全面达到应用型人才培养的正常理性发展状态,直至可以和现存的(同时也正处在变革分化过程中的)理论型人才培养的教育并驾齐驱,还需假以时日;还需要政府教育主管部门的大力推进,需要人才需求市场的进一步完善发育,尤其需要高职教学单位及其直接相关部门肯于做长期的坚忍不拔的努力。新世纪高等职业教育教材编审委员会就是由北方地区近百所高职院校和出版单位组成的旨在以推动高职教材建设来推进高等职业教育这一变革过程的联盟共同体。

在宏观层面上,这个联盟始终会以推动高职教材的特色建设为己任,始终会从高职教学单位实际教学需要出发,以其对高职教育发展的前瞻性的总体把握,以其纵览全国高职教材市场需求的广阔视野,以其创新的理念与创新的组织形式,通过不断深化的教材建设过程,总结高职教学成果,探索高职教材建设规律。

在微观层面上,我们将充分依托众多高职院校联盟的互补优势和丰裕的人才资源优势,从每一个专业领域、每一种教材入手,突破传统的片面追求理论体系严整性的意识限制,努力凸现高职教育职业能力培养的本质特征,在不断构建特色教材建设体系的过程中,逐步形成自己的品牌优势。

新世纪高等职业教育教材编审委员会在推进高职教材建设事业的过程中,始终得到了各级教育主管部门(如国家教育部、辽宁省教育厅)以及各相关院校相关部门的热忱支持和积极参与,对此我们谨致深深谢意;也希望一切关注、参与高职教育发展的同道朋友,在共同推动高职教育发展、进而推动高等教育体制变革的进程中,和我们携手并肩,共同担负起这一具有开拓性挑战意义的历史重任。

新世纪高等职业教育教材编审委员会

2001年8月18日

《新编工程数学》(复变函数基础 积分变换 数值计算 矢量分析)是新世纪高等职业教育教材编审委员会组编的基础类课程规划教材之一,也是《新编工程数学》的第二分册。

工程数学既是高职工程类各专业的基础课,也是经常用于解决工程技术中的实际问题的工具,因此,它又是高职院校工程类各专业的必修课程。

由于高职工程数学教材既要体现基础性,更要体现应用性,教材编写过程中从内容选取,到深浅程度把握,以及二者关系的协调等诸多方面,都有较大的难度。尤其是高职教育尚处于探索阶段,现存教材版本中真正体现高等职业教育特色、适合培养应用型人才要求的工程数学教材,进而可资借鉴的先例很少。就是在这样的背景下,我们组织了部分相关高职院校一些有工程数学教学经验的一线骨干教师,从高职教学需要出发编写了这套《新编工程数学》教材。

本套教材在充分调研我国高等职业教育现状及发展趋势,认真总结编委会多家高职院校教学经验和教材建设经验的基础上,参考了国内外同类优秀教材,选取了六部分内容,分两册出版。在结构体系、内容安排、习题选择等方面,遵循“以应用为目的,以必需够用为度”的原则,适度淡化理论体系及逻辑论证,而将重点放在了基本概念的阐述、基础理论的解释以及基本方法的归纳和应用上。力争使读者不仅知道工程数学是什么,更知道工程数学能做什么,以便更好地实现工程数学“基础+应用”的双重教育功能。

本册包括复变函数基础、积分变换、矢量分析与场论及数值计算四部分内容。

《新编工程数学》全套教材由沈阳电力高等专科学校崔国生统筹组织。

本册教材由沈阳电力高等专科学校李颖任主编,由本溪冶金高等专科学校戴志国、吉林交通职业技术学院程敬松、丹东职业技术学院张莉任副主编。第一篇由张莉编写;

第二篇第一章由戴志国编写,第二章由程敬松编写;第三篇由戴志国编写;第四篇由李颖编写。

虽然我们力争做到既能为读者进一步学习打下良好基础,又能使读者初步掌握用工程数学基本方法解决实际问题的能力,但由于专业之间的差别而导致的对课程和教学内容要求的差别,特别是编者对高职工程数学特色建设的探索还未臻完美,教材中仍难免存在不足之处,诚恳希望各相关高职院校和读者在使用本教材的过程中给予关注,并将意见及时反馈我们,以便修订时完善。

编 者

2002年8月



## 第一篇 复变函数基础

|                          |    |
|--------------------------|----|
| 第一章 复数与复变函数 .....        | 2  |
| 第一节 复数 .....             | 2  |
| 第二节 复数的运算 .....          | 4  |
| 第三节 区域、边界和复数球面 .....     | 5  |
| 第四节 复变函数 .....           | 7  |
| 习题一 .....                | 11 |
| 第二章 复变函数的导数与积分 .....     | 13 |
| 第一节 复变函数的导数 .....        | 13 |
| 第二节 复变函数的积分 .....        | 16 |
| 习题二 .....                | 21 |
| 第三章 解析函数的级数 .....        | 23 |
| 第一节 数项级数与函数项级数 .....     | 23 |
| 第二节 幂级数 .....            | 25 |
| 第三节 泰勒级数 .....           | 26 |
| 第四节 罗朗级数 .....           | 27 |
| 第五节 零点、正则点与奇点 .....      | 29 |
| 习题三 .....                | 32 |
| 第四章 留数 .....             | 33 |
| 第一节 留数定义 .....           | 33 |
| 第二节 留数的基本定理 .....        | 35 |
| 第三节 用留数计算实积分 .....       | 37 |
| 习题四 .....                | 40 |
| 第五章 保角映射初步 .....         | 41 |
| 第一节 导数的几何意义 .....        | 41 |
| 第二节 保角映射、分式线性映射 .....    | 42 |
| 第三节 幂函数 $w = z^n$ .....  | 45 |
| 第四节 指数函数 $w = e^z$ ..... | 46 |
| 习题五 .....                | 46 |

## 第二篇 积分变换

|                       |    |
|-----------------------|----|
| 第一章 傅里叶变换 .....       | 48 |
| 第一节 傅里叶积分 .....       | 48 |
| 第二节 傅里叶变换 .....       | 53 |
| 第三节 傅氏变换的性质 .....     | 59 |
| 第四节 卷积与相关函数 .....     | 64 |
| 习题一 .....             | 69 |
| 第二章 拉普拉斯变换 .....      | 71 |
| 第一节 拉普拉斯变换的基本概念 ..... | 71 |
| 第二节 拉普拉斯变换的基本性质 ..... | 73 |
| 第三节 拉氏逆变换 .....       | 77 |
| 第四节 卷积与卷积定理 .....     | 80 |
| 第五节 拉普拉斯变换的应用 .....   | 82 |
| 习题二 .....             | 88 |

## 第三篇 数值计算

|                      |     |
|----------------------|-----|
| 第一章 数值计算中的误差 .....   | 90  |
| 第一节 误差的来源 .....      | 90  |
| 第二节 误差的表达方式 .....    | 91  |
| 第三节 减少误差的方法 .....    | 92  |
| 习题一 .....            | 94  |
| 第二章 非线性方程的数值解法 ..... | 95  |
| 第一节 二分法 .....        | 95  |
| 第二节 牛顿法 .....        | 97  |
| 第三节 弦截法 .....        | 99  |
| 习题二 .....            | 101 |
| 第三章 线性方程组的数值解法 ..... | 102 |
| 第一节 消去法 .....        | 102 |
| 第二节 迭代法 .....        | 107 |
| 习题三 .....            | 111 |
| 第四章 函数的插值与拟合 .....   | 112 |
| 第一节 拉格朗日插值 .....     | 112 |
| 第二节 最小二乘法 .....      | 116 |
| 习题四 .....            | 120 |
| 第五章 数值微分和数值积分 .....  | 122 |
| 第一节 数值微分 .....       | 122 |
| 第二节 数值积分 .....       | 123 |

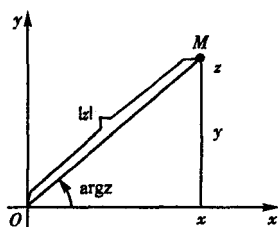
|                  |     |
|------------------|-----|
| 习题五              | 130 |
| 第六章 常微分方程的数值解法   | 132 |
| 第一节 欧拉方法和改进的欧拉方法 | 132 |
| 第二节 龙格-库塔方法      | 136 |
| 习题六              | 138 |

## 第四篇 矢量分析

|                     |     |
|---------------------|-----|
| 第一章 矢量分析            | 140 |
| 第一节 矢性函数            | 140 |
| 第二节 矢性函数的微分法        | 142 |
| 第三节 矢性函数的积分         | 146 |
| 习题一                 | 147 |
| 第二章 场论              | 148 |
| 第一节 数量场、矢量场         | 148 |
| 第二节 数量场的方向导数和梯度     | 151 |
| 第三节 矢量场的通量          | 155 |
| 第四节 矢量场的散度          | 157 |
| 第五节 矢量场沿闭曲线的环量及环量密度 | 160 |
| 第六节 矢量场的旋度          | 162 |
| 习题二                 | 164 |
| 第三章 几种重要的矢量场        | 166 |
| 第一节 管形场             | 166 |
| 第二节 有势场             | 168 |
| 第三节 调和场             | 171 |
| 习题三                 | 174 |
| 第四章 哈密顿算子           | 175 |
| 习题四                 | 179 |
| 习题参考答案              | 180 |
| 附录                  | 187 |

# 第一篇

## 复变函数基础



复变函数在工程技术中有着广泛的应用,是解决诸如电学、流体力学等问题的有力工具。

# 第一章

## 复数与复变函数

直到目前为止,我们所学过的数学课程的一切论证和运算,基本上是实数范畴内进行的。本门课程将要迈出实数范围而进入复数领域,本章引入复数及复变函数的概念。

### 第一节 复数

**定义 1** 设  $x$  与  $y$  是一对实数,  $i$  表示虚数单位,  $i = \sqrt{-1}$ , 称  $z = x + yi$  是一个复数。当  $y = 0$  时,  $z = x$  是一个实数; 当  $x = 0$  时,  $z = yi$  是一个虚数。称  $x$  为复数  $z$  的实部,  $y$  为复数  $z$  的虚部, 记为  $x = \operatorname{Re}(z)$ ,  $y = \operatorname{Im}(z)$ 。

例如,  $z = 2 + 3i$  是一个复数, 实部是 2, 虚部是 3。

复数的几何表示: 复数与实平面上的点有一一对应的关系, 即  $z = x + yi$  对应于点  $M(x, y)$ 。因此, 可以把平面上的点  $M(x, y)$  看作是复数的几何表示, 实数  $x$  对应于横坐标轴上的点, 称横坐标轴为实轴; 虚数  $iy$  对应于纵坐标轴上的点, 称纵坐标轴为虚轴; 实轴与虚轴的交点称为原点。引入了实轴、虚轴及原点的平面称为复平面。实平面上的每一点都代表一对有序实数  $(x, y)$ , 复平面上每一个点都代表一个复数  $z = x + yi$ 。

约定: 在复平面上, 复数  $z$ 、点  $z$ 、点  $M(x, y)$ 、向量  $z$ 、向量  $\vec{oz}$  及向量  $\vec{OM}$  是同义词, 不加区别(如图 1-1)。

向量  $z$  的长度称为复数  $z$  的模, 记为  $r$  或  $|z|$ , 即  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 向量与实轴正方向夹角称为  $z$  的辐角, 记为  $\operatorname{Arg} z$  或  $\theta$ 。辐角的正负, 视正向实轴是按逆时针方向还是按顺时针方向转至向量  $z$  而定, 逆时针方向为正, 顺时针方向为负。任何一个复数的辐角有无穷多个, 其中只有一个辐角在  $-\pi$  与  $\pi$  之间, 称为主辐角(或主值), 记为  $\arg z$  或  $\theta_0$ 。于是有  $-\pi < \arg z \leq \pi$  及  $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$  ( $k$  是任意整数),

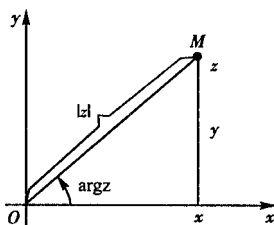


图 1-1

$$\theta_0 = \arg z (\text{当 } z \neq 0 \text{ 时}) \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{当 } z \text{ 在第一象限} \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{当 } z \text{ 在第二象限} \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi & \text{当 } z \text{ 在第三象限} \\ \arctan \frac{y}{x} & \text{当 } z \text{ 在第四象限} \end{cases}$$

**注意** 当  $z = 0$  时, 其模为零, 辐角不确定。

不难确定  $|z| = C$  ( $C$  是常数) 表示一个以坐标原点为圆心, 以  $C$  为半径的圆周 [如图 1-2(a)];  $|z| < C$  表示一个以坐标原点为圆心, 以  $C$  为半径的开圆 (不包括圆周) [如图 1-2(b)];  $|z - z_0| < C$  表示一个以  $z_0$  为圆心, 以  $C$  为半径的开圆 [如图 1-2(c)];  $\arg z = C$  ( $C$  是常数) 表示一条从坐标原点引出的极角  $\theta = \arg z = C$  的射线 [如图 1-2(d)]。

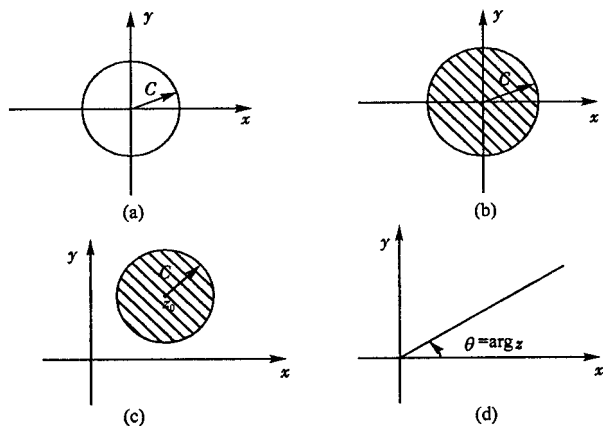


图 1-2

设  $z = x + yi$ , 令  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\arg z = \theta$ , 由以  $r$  为半径的开圆的几何表示可得:  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , 于是  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  (称为复数的三角表示法)。根据欧拉 (Euler) 公式:  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , 复数  $z$  又可表示为  $z = r e^{i\theta}$  (称为复数的指数表示法)。

$x + yi$  与  $x - yi$  互称为共轭复数, 若前者记  $z$ , 则后者记  $\bar{z}$ , 关于实轴对称。显然有  $|z| = |\bar{z}|$ ,  $\arg z = -\arg \bar{z}$  ( $\arg z \neq \pi$ )。实数的共轭数是实数本身。另外, 复数不能比较大小。

**【例 1】** 求  $z = -1 - i$  的辐角、模、共轭复数

**解** 主值  $\arg(-1 - i) = \arctan \frac{-1}{-1} - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$

辐角  $\text{Arg}(-1 - i) = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$  ( $k$  是任意整数)

模  $|-1 - i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$z$  的共轭复数  $\bar{z} = -1 - i = -1 + i$

## 第二节 复数的运算

相等:

当且仅当  $x_1 = x_2, y_1 = y_2$  时, 称  $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$  两个复数相等。

对两个复数  $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$  的运算规定如下:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

共轭复数的性质:

$$(1) \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}, \left( \frac{z_1}{z_2} \right) = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

$$(2) \overline{\overline{z}} = z$$

$$(3) z \overline{z} = [\operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2 = |z|^2$$

$$(4) z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z), \quad z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$$

采用指数形式,  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ , 则  $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

显然, 两个复数乘积的模等于它们的模的乘积, 乘积的辐角等于它们的辐角之和。两个复数商的模等于它们的模的商, 商的辐角等于它们的辐角之差。即

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$$

$$\text{或} \quad \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$$

复数乘方: 记  $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n \uparrow}$ , 设  $z = r e^{i\theta}$ , 则  $z^n = r^n e^{in\theta}$

采用三角表示法有  $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r e^{i\theta}, z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ 。取  $r = 1$ , 即得棣莫弗(Demoivre)公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

【例 1】 计算  $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$  的值

解 先把分子、分母化成三角式,  $1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right), 1 - \sqrt{3}i = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10} = \left\{ \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]} \right\}^{10} = \frac{\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3}}{\cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{10\pi}{3}\right)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

复数开方:  $z$  开  $n$  次方可作为乘方的逆运算, 考虑到三角函数的周期性, 有

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\theta}{n} + i\sin \frac{\theta}{n} \right) = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}}$$

其中,  $\theta = \theta_0 + 2k\pi$ ,  $k$  是任意整数,  $\theta_0 = \arg z$

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{r(\cos\theta + i\sin\theta)} &= \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} + i\sin \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} \right) \\ &= \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta_0}{n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}} \end{aligned}$$

如果  $k = n$ , 则  $\frac{\theta}{n} = \frac{\theta_0}{n} + 2\pi$ , 从而得一个与  $k = 0$  时相同的方根值, 证明了复数的  $n$

次方根恰有  $n$  个不同的值。这些方根的模与辐角分别为  $\sqrt[n]{|z|}$  和  $\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ 。即这  $n$  个值就是以原点为中心, 以  $\sqrt[n]{r}$  为半径的圆的内接正  $n$  边形的  $n$  个顶点。

例如  $z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$  的 4 次方根, 有 4 个值, 它们分别是

$$w_0 = 2^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{\pi}{16}} \quad (k = 0 \text{ 的情形})$$

$$w_1 = 2^{\frac{1}{8}} e^{i(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2})} = iw_0 \quad (k = 1 \text{ 的情形})$$

$$w_2 = 2^{\frac{1}{8}} e^{i(\frac{\pi}{16} + \pi)} = -w_0 \quad (k = 2 \text{ 的情形})$$

$$w_3 = 2^{\frac{1}{8}} e^{i(\frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2})} = -iw_0 \quad (k = 3 \text{ 的情形})$$

这四个方根均匀地分布在以原点为中心, 以  $2^{\frac{1}{8}}$  为半径的圆周上(图 1-3)。

在电子技术中, 复数  $x + yi$  的三角表示法与指数表示法为

$$x + yi = A(\cos\theta + i\sin\theta) = Ae^{i\theta}$$

其中:  $A = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\theta = \arctan \frac{y}{x}$  ( $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ ), 被广泛地用来计算交流电路问题。

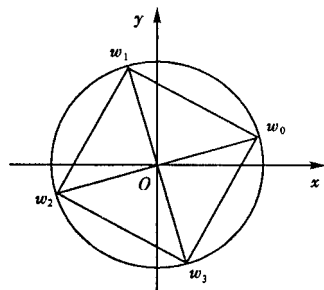


图 1-3

### 第三节 区域、边界和复数球面

#### 1. 区域和边界

**定义 1** 复平面上的点集  $D$  称为区域, 如果  $D$  满足如下条件: (1)  $D$  的以任一给定点为中心的足够小的圆周内的点全部属于这个集合。(2) 集合  $D$  中任意两点都能用折线把它们连接起来, 且此折线上所有点都属于这个集合。

满足(1)的点称为区域  $D$  的内点。复平面上的点  $z_0$ , 如果以  $z_0$  为中心的一个足够小的