线性代数教程

（第二版）

俞南雁　主编

东南大学出版社

线性代数教程

（第二版）

俞南雁　韩瑞珠
周建华　倪劲松　编

东南大学出版社

内 容 提 要

本书是在 1988 年第一版基础上，结合近几年教学实践修订而成的。内容有矩阵、向量和线性方程组，行列式与逆矩阵，矩阵特征值与二次型，线性空间与欧氏空间以及附录。全书突出了矩阵的运算变换及用矩阵方法处理问题这个主题，并对线性相关性、极大无关组和秩等难点作了深入浅出明白易懂的叙述。考虑到循序渐进的教学规律及读者对象的不同需求，本书在结构及例题习题的设计编配方面也作了适当的安排，书末附有习题答案。

本书可作为高校理工科各专业本科、专科的教材或教学参考书，也可作为高等教育自学考试的教材。

责任编辑　徐步政

线性代数教程
（第二版）
俞南雁　主编

东南大学出版社出版发行
（南京四牌楼 2 号　邮编 210018）
江苏省新华书店经销　中国人民解放军海军医校海燕印刷厂印刷

开本 850×1168 毫米 1/32　印张 7.875　字数 220 千
1988 年 8 月第 1 版　1996 年 4 月第 2 版第 3 次印刷
印数：15001—20000 册
ISBN　7—81023—905—8/O·81
定价：9.00 元

第二版前言

本书是在1988年第一版的基础上结合近几年教学实践修订而成:删去了一些相对次要的材料,将联系紧密的材料合并成章,并增写了绪论及广义逆矩阵和若当标准形两个附录。因此第二版更加突出了矩阵的运算变换及用矩阵方法处理问题这个主题,并且大大缩小了篇幅。绪论主要帮助读者了解各章内容的来龙去脉。

对于向量组的线性相关性、矩阵的秩、极大无关组的求法及n维向量空间等难点,本书作了与众不同的处理,阐述力求深入浅出,减少初学者的困难。

作题是学习数学必不可少的重要环节,因此本书重视例题和习题的设计、选配。各节的例题和习题是基本题,通过学习应全部会做;各章的综合例题及思考题有提高的性质,可供选学、选做,书末附有习题及思考题的答案或提示,可供读者核对、参考。

本书可作为高校理工科等各专业的教材或教学参考书,也可用于自学,使用比较灵活:本科32~36学时可讲授1~3章(符合教委下达的《基本要求》);本科48~54学时可授完全书;而删去各章末的“综合例题与思考题”及个别小号字排印的内容以后,可供学时相近的专科生使用。江苏省自学考试微机专业使用时可删去第4.4节及附录A、B。

本书第一版由俞南雁、蔡冠华编写。这次修订仍由俞南雁主编并执笔绪论、第1章及附录A、B,韩瑞珠、倪劲松、周建华依次执笔第2、3、4章。编者感谢陈建龙教授阅读本书样稿并提出宝贵意见;衷心感谢所有关心支持本书再版和使用本书的同志们、同行们,正是他们的热情鼓励促成了本书的修订再版。

由于编者学识所限,谬误和疏漏之处在所难免,敬祈广大读者斧正。

编　者

1994.6

目　录

绪论

如所熟知，中学数学一个中心内容是代数方程。最初讨论一元一次方程

$$ax = b \quad (a \neq 0) \tag{0.1}$$

以后逐步朝两个方面展开：一是提高未知量的幂次，讨论一元二次方程，这推动了数的概念的扩展；二是增加未知量及方程的个数，主要讨论了二元一次和三元一次联立方程式的加减消元法。

对第一个方面更深入的研究导致多项式理论，这不是线性代数的范围；而对第二个方面更深入的研究则是本课程的主要论题之一。一般的联立方程式即线性方程组形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{0.2}$$

其解法早在公元一世纪中国古算书《九章算术·方程》中就有详细的研究，可见问题的古老了。然而非常有意思的是现代科技中大量问题最终也归为(0.2)式。方程组(0.2)式的圆满解决是引人入胜的，它涉及线性代数的重要内容和基本思想。引入矩阵运算(乘法)后，(0.2)式可表示为

$$Ax = b \tag{0.3}$$

(0.3)式形式上与(0.1)式何其相似！这里

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

分别是 $m \times n$ 矩阵和 m 维列向量(即 $m \times 1$ 矩阵)。前面提到的加减

消元法可以改造成在由 A,b“拼接”而成的矩阵$[A,b]$上进行一种简单而有规律的操作(初等行变换)。原则上说 m,n 无论多大都能得到解,或判定无解。方程组(0.2)的解如果不唯一,那么还要搞清楚不同形式的解集是否一致,也就是说要弄清楚解集的结构。这就导致向量组的线性相关性及矩阵的秩这两个极其重要的概念的讨论。以上大致是本书第 1 章的论题。矩阵最早于 1850 年由不列颠出生的美国数学家 J. J. Sylvester 提出,1858 年英国数学家 A. Cayley 发表了关于“矩阵及其代数”的重要论文。一般认为他们两人共同奠定了线性代数的基础。

历史上先于矩阵出现的另一重要工具是行列式,也是在研究线性方程组求解和多变量线性替换时发展起来的。行列式其实是定义在方阵集合上的一个函数,它是第 2 章的论题之一。第 2 章的另一论题是逆矩阵,它丰富和完善了矩阵的运算,强化了线性代数的描述功能。例如当 $m=n$ 且行列式 $|A|\neq 0$ 时,$Ax=b$ 存在唯一的解 $x=A^{-1}b$(由此还可导出用行列式表示的 Cramer 法则)。利用行列式还可给出矩阵之秩的另一刻划。

值得注意的是,能用矩阵描述的线性问题并不局限于线性代数方程组。对于反映系统运动的线性微分方程组或线性差分方程组,矩阵同样带来极大的便利。以常系数线性微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+f_1(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+f_2(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n+f_n(t) \end{cases} \tag{0.4}$$

为例,令

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad f(t)=\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

$$x=x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix}$$

则(0.4)式可以写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Ax+f(t) \tag{0.5}$$

令 $x=Py$(方阵 P 待定，$|P|\neq 0$) 代入(0.5)式得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=(P^{-1}AP)y+P^{-1}f(t) \tag{0.6}$$

若可逆方阵 P 的选取能使 $P^{-1}AP$ 为对角阵 $\Lambda=[\lambda_{ij}]$($i\neq j$ 时 $\lambda_{ij}=0$)，则(0.6)式的 n 个方程彼此独立(未知函数 $y_k(t)$ 之间无牵连)而极易求解。第 3 章通过引入特征值特征向量、相似矩阵及正交矩阵等概念，不仅得出了上述构想得以实现的充要条件，而且在理论上圆满解决了在解析几何等领域有重要应用的寻找正交变换(它不改变度量)化简实二次型 $\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ 为标准形 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_iy_i^2$ 的问题。在另一些问题，例如多元函数极值的判定、概率论中某些积分的计算和运动稳定性等问题中，寻找一般可逆线性变换把实二次型化为标准形，或给出某种定性判据，也能很好解决问题，而且比较方便，对此第 3 章也作了叙述。

大千世界有许多象 F^n(第 1 章) 那样具有线性结构的集合，也有许多象 R^n(第 3.1 节) 那样既有线性结构、又可以定义度量的集合。这就导致第 4 章用公理化方法对抽象的线性空间、欧氏空间以及线性变换、正交变换的讨论，从而大大拓宽了线性代数处理问题的范围。有趣的是，确定了基或标准正交基以后，一切又似乎回归

到 F^n 或 R^n，回归到方阵或正交矩阵。在数学中首先用公理化方法引入抽象空间的概念，应该归功于 20 世纪初法国数学家 M.-R. Frechét 的工作。

鉴于经典逆矩阵及矩阵相似对角化的局限性，本书以附录的形式分别简介在现代科技中日见其广泛应用的广义逆矩阵及 Jordan 标准形，它们分别是前述二者的推广。

通过以上概要介绍，读者或许对本书各章讨论对象的来龙去脉有了一个大致的了解。事实上，线性代数是处理有限维线性问题的代数分支。由于线性问题广泛存在，非线性问题在一定条件下可简化成线性问题来处理，因此线性代数的理论和方法越来越深广地应用于力学、电路理论、系统理论、控制理论、数量经济学等等学科及数学各个分支，产生出许多崭新的理论和方法，并为解决实际问题发挥重要作用。线性代数已列为理工科多数专业的必修课程。同学们通过本书学习线性代数基础知识的同时，也将获得逻辑推理和抽象思维的初步训练。

由于线性代数研究对象和研究方法与中学数学或微积分有很大不同，新的概念和运用新概念进行推理比较多，初学者有时感到困难，这不足为怪。学习的过程就是克服困难的过程。以下几点建议可供初学者参考。首先，本课程以矩阵和向量作为主要研究对象和主要工具，因此要仔细留意有关运算与数的运算之异同，特别是不同之处。其次对抽象概念要多从实例（外延）去领会其内涵，通过 2，3 维空间了解 n 维空间；第三，在逻辑推理方面，要着重注意充分条件和必要条件的区别，注意定义的正确理解和运用，注意原命题与逆否命题的同真同假性（反证法的依据）。限于课程的性质，对较繁难的证明可以暂不细究，而着重对定理本身的理解和应用；第四，要及时复习、独立作题，在联系和对比中理解知识体系，掌握用矩阵处理问题的一些基本方法。

成功属于善于学习、努力学习的莘莘学子。

1 矩阵、向量和线性方程组

矩阵和向量是处理有限维线性问题的重要工具，也是线性代数的主要研究对象。本章叙述矩阵的运算、向量组的线性相关性、矩阵的初等变换和秩，并用来研究线性方程组，不仅要得出相容（有解）性条件和解法，而且要弄清解集的结构。

1.1 矩阵的线性运算及转置

1.1.1 矩阵和向量

定义 1 $m \times n$ 个数 a_{ij} 排成的 m 行、n 列的矩形表格①

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

称为一个 $m \times n$**（型）矩阵**，数 a_{ij} 称为矩阵的**元素**或**元**。特别当 $m = n$ 时，(1.1) 式称为 n **阶（级）矩阵**或 n **阶（级）方阵**。

矩阵通常用一个大写字母或一般元外加括号表示。例如矩阵 (1.1) 可以用 A、$[a_{ij}]$ 或 $A_{m\times n}$、$[a_{ij}]_{m\times n}$ 表示。在矩阵 (1.1) 中，元 a_{ij} 位于第 i 行第 j 列，故称为 (i,j) 元，而 i 称为其**行标**，j 称为其**列标**。例如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2+i & 2i & 3 \\ 1-i & 4 & 3-i \end{bmatrix}$$

分别是 3 阶方阵和 2×3 矩阵，其中 A 的 (1,3) 元是 7，B 的 (2,1) 元是 $1-i$。又如，某工厂一月份十种产品产量的统计日报表就是一

---

① 本书中矩阵多用方括号表示。矩阵也可以用圆括号表示。

个 31×10 矩阵。

定义 2 矩阵 A 和 B **相等**，记为 $A = B$，是指：A, B 同型且一切 (i, j) 元对应相等：$a_{ij} = b_{ij}, \forall\ i, j$。

例如，由

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

可得 $x = 1, y = -7, z = 3, w = 2$。

定义 3 只有一列的矩阵称为**列向量**，只有一行的矩阵称为**行向量**。列向量和行向量统称**向量**。向量的元素又称为向量的分**量**。含 n 个分量的向量称为 **n 维向量**。

例如

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \beta = [4, 0, 1, -2]$$①

分别是 3 维列向量和 4 维行向量。

$n \leqslant 3$ 且分量全为实数时，n 维向量可以看作“有大小有方向”的几何矢量的直角坐标表示式。$n \geqslant 4$ 时，n 维向量不再具有直观的几何意义，但仍然有着广泛的实际背景。例如一个空间飞行器的瞬时状态可以用一个 7 维向量

$$[x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t]$$

来描述，其中 $[x, y, z]$ 代表飞行器的坐标，$[\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]$ 则是它的速度向量，t 表示时间。

1.1.2 矩阵和向量的线性运算

定义 4 设矩阵 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$，$B = [b_{ij}]_{m \times n}$，则称矩阵 $[a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$ 为矩阵 A 与 B 之**和**，记为 $A + B$，相应的运算称为矩阵的**加法**，即

---

① 行向量的分量习惯上用逗号隔开。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\triangleq \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$ ①

定义 5　设 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，k 是一个数，则称矩阵 $[ka_{ij}]_{m\times n}$ 为数 k 与矩阵 A 的**积**，记为 kA 或 Ak，相应的运算称为矩阵的**数乘**，即

$$k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

由上述两定义知：两个同型矩阵相加就是把它们的对应元素相加；数乘矩阵就是把这个数乘到矩阵的每个元素上去。矩阵的加法和数乘统称矩阵的**线性运算**。因为向量是矩阵的特款，因此矩阵的线性运算也就包含了向量的线性运算。

例 1

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(2) $2\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 10 \\ 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $3[1, 0, -2, 3] + 2[3, 0, 1, -2]$

$= [3, 0, -6, 9] + [6, 0, 2, -4]$

$= [9, 0, -4, 5]$.

---

① “$\triangleq$”表示用等号右边的式子定义等号左边的式子或记号。

$$(4)\ x_1\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2\\a_{21}x_1+a_{22}x_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2\end{bmatrix}$$

根据定义4和定义5，很容易验证矩阵(包括向量)的线性运算具有下述基本性质(设 A,B,C 都是 $m\times n$ 矩阵，k,l 是数)：

1° $A+B=B+A$；(加法交换律)

2° $(A+B)+C=A+(B+C)$；(加法结合律)

3° 存在元素全为零的 $m\times n$ 矩阵0，称为**零矩阵**，使对任何 $m\times n$ 矩阵 A 都有 $A+0=A$；

4° 对任一 $m\times n$ 矩阵 $A=[a_{ij}]$，存在 $m\times n$ 矩阵 $[-a_{ij}]$，记为 $-A$，称为 A 的**负矩阵**，使 $A+(-A)=0$；

5° $1A=A$；

6° $k(lA)=(kl)A$；

7° $(k+l)A=kA+lA$；

8° $k(A+B)=kA+kB$。

显然 $m\times n$ 型零矩阵是唯一的；给定矩阵的负矩阵也是唯一的。

利用负矩阵还可以定义两个同型矩阵 A,B 的**减法**：

$$A-B\triangleq A+(-B)\triangleq[a_{ij}-b_{ij}]$$

根据线性运算的基本性质，矩阵"连加"$A+B+C$ 等有意义；"移项法则"也成立：$A+B=C$ 当且仅当 $A=C-B$。

例2 设某班有30名同学，本学期有5门课程，那么该班一张成绩登记表就是一个 30×5 矩阵。假如期中、期末、平时三张成绩表分别为 A,B,C；又假定在评定学期成绩时，期中、期末和平时成绩所占的百分比依次30%，50%和20%，那么该班同学各科学期成绩表(矩阵)P 可由 A,B,C 经线性运算得到：

$$P=0.3A+0.5B+0.2C$$

例3 解矩阵方程 $A-2X=B$，其中已知

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\0 & 1 & 1\\5 & 0 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 5\\-2 & 1 & 0\\3 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

解　由原方程移项可得　$2X=A-B$,两边再乘以$\frac{1}{2}$又得 $X=\frac{1}{2}(A-B)$。我们有

$$A-B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\0 & 1 & 1\\5 & 0 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0 & 5\\-2 & 1 & 0\\3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & -2 & -2\\2 & 0 & 1\\2 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$X=\frac{1}{2}(A-B)=\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\1 & 0 & 1/2\\1 & -1/2 & 0\end{bmatrix}.$$

1.1.3　矩阵的转置及几种特殊矩阵

定义 6　将 $m\times n$ 矩阵 $A=[a_{ij}]$ 行依次改为列所得的 $n\times m$ 矩阵称为 A 的**转置矩阵**,简称 A 的**转置**,记为 A^T 或 A',即

$$A^T=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}^T\triangleq\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

由定义知道:A 的(i,j)元是 A^T 的(j,i)元。由定义还可以知道:行向量的转置是列向量,列向量的转置是行向量。

矩阵的转置作为一种运算,具有以下性质(由读者验证):

$$(A^T)^T=A,\quad (A+B)^T=A^T+B^T,\quad (kA)^T=kA^T$$

例 4　设　$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & -1\\3 & 4\end{bmatrix}$,　$B=\begin{bmatrix}-2 & 0\\1 & 5\\2 & -1\end{bmatrix}$,分别求