偏微分方程的有限差分方法

〔美〕G. E. 福雪斯 W. R. 华沙著 胡祖炽 吴文达 陈永和译

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书讨论用有限差分方法解偏微分方程的问题．全面地综述了最基本的理论材料，诸如构造差分方程的方法，差分方程的解法，差分方程的解收敛于微分方程的解的条件，误差估计，差分格式的稳定性等等．另一方面，本书也很注意实际的材料，提供了不少实验性的数据，并有专门的一节讨论在电子计算机上实现的问题．对于一系列的问题，作者们还表示了他们自己的意见．

本书适用于计算数学方面的工作者，教师，研究生和大学生，以及其他领域内有兴趣于用计算机解偏微分方程的读者阅读和参考．

FINITE-DIFFERENCE METHODS FOR
PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
George E. Forsythe
Wolfgang R. Wasow
John Wiley & Sons, Inc., 1960

偏微分方程的有限差分方法
胡祖炽 吴文达 陈永和 译
上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路 450 号)
新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷
开本 850×1156 1/32 印张 15,5 字数 383,000
1964 年 6 月第 1 版 1979 年 3 月第 2 次印刷
印数 5,001—38,000

书号：13119·554 定价：2.30 元

序　言

随着近年来高速計算技术的惊人发展，数值分析这門数学科学有了极为本质性的成长．要把这門学科的一切重要方面均衡地写在一本书內已不再可能．事实上，这个理論的一些分支，特别是微分方程的数值解方面，实在已够写几本专著的了．

解偏微分方程有許多数值方法．这些方法之中，只有一种是可以同样应用于綫性問題和非綫性問題的，这就是有限差分法．我們只限于研究这个方法．有关偏微分方程差分方法的文献正在飞速增长．它們分布很广，而且在观点和特点方面也有很大区别．要对这一領域作明确的叙述，必須等到目前这个强烈发展的阶段至少进入暫时停頓的时候才能做．在目前，我們相信把許多現在有用的較重要的結果和方法作一个有联系的叙述是有用的．

在选擇主要材料和叙述的深广度方面，我們試图保持在中等水平．本书的絕大部分对于牢固地掌握了质量較好的高等微积分課程中通常讲授的知識和一些矩陣理論的讀者应当能够理解．沒有这个預备知識，对于偏微分方程的任何方面，即使是最初等的方面都不可能有眞正的理解．另一方面，我們并不假定讀者事先具有偏微分方程理論的知識，因为这将严重地限制本书的用处．我們把一些与数值分析沒有直接关系的課題，例如在有限差分近似基础上的存在性和唯一性的証明等剔除了．在另一极端，我們很少企图使本书成为程序設計者的指南或包含許多的数值例子．求偏微分方程的数值解并不是一件容易的事．从物理科学中产生的每一个問題几乎都要有新的想法，都要对已有的方法进行修改．理論背景和已知方法的一般知識对于这些問題的研究几乎是不可

缺少的,这些正是我們在本书中試图介紹的.

除了少数例外，求相应于偏微分方程的差分方程的数值解是一件龐大得只能在自动数字計算机上完成的工作．对于使用这些机器經驗还不多的讀者,§3提供了有关的一些一般背景．在§25中，我們比較詳細地討論了在自动計算机上得到差分方程和求解的某些算法.

本书是以我們在 California 大学为研究生討論班所准备的讲稿为基础写成的，适用于下述几类讀者：(i)純粹数学家与应用数学家；(ii)自动数字計算机的程序設計者；(iii)工程师、物理学家、气象学家和其他对用机器解偏微分方程感兴趣的人；(iv)上述几个領域的研究生．虽然本书不是作为教科书而写的，但曾在我們目前工作的大学里用本书的原稿对研究生讲授过.

George E. Forsythe 于 Stanford 大学
Wolfgang R. Wasow 于 Wisconsin 大学

1959 年 12 月 10 日

目　录

偏微分方程与計算机介紹

§1 有关偏微分方程分类的注記

作为最初的出发点，我們考虑三个微分方程

$$u_{xx}+u_{yy}=0, \tag{1.1}$$

$$u_{xx}-u_{yy}=0, \tag{1.2}$$

$$u_{xx}-u_{y}=0. \tag{1.3}$$

(下标表示求偏导数.)它們是在数学的物理应用中遇到的許多重要的偏微分方程的几个模型.

和在常微分方程論中一样，我們可以求这种偏微分方程的“通”解，但是可以求到通解的情形比常微分方程中还要少些，而且即使求到了，对于回答数学物理学家认为重要的問題也是很少有帮助的．在应用中，我們通常需要求一个解，它除了滿足微分方程之外还要滿足某些附加的要求，例如边值条件或初值条件等．对于綫性常微分方程，所求的解常常可以通过适当地确定通解中的任意常数来求得(但对于非綫性方程一般則不能如此)．对于偏微分方程，这只在一些例外情形才是可能的，其原因之一是現在的通解包含任意函数而不是任意常数.

最后所說的这一点可用方程(1.1)来說明．这个方程，即所謂 Laplace 方程，通常記作 $\nabla^2 u=0$ 或 $\Delta u=0$，和解析函数理論有着密切的关系．令 $z=x+iy$，并設

$$f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$$

是 z 的解析函数．此时 u, v 就由 Cauchy-Riemann 微分方程

$$u_x - v_y = 0,\quad u_y + v_x = 0 \tag{1.4}$$

所联系，而且它們具有任何阶的偏导数（参看 Knopp [1945] 第 28～30 頁）．如果把(1.4)的第一个方程对 x 微分，而把第二个方程对 y 微分，就知道

$$u(x,\ y) = \operatorname{Re} f(z) \tag{1.5}$$

是 Laplace 方程的一个解．反之，我們現在来証明 Laplace 方程的任何一个解必是某个解析函数的实部．假設給定了一个解 u，那末可以从方程組(1.4)解出 v，因为这两个方程的相容性条件正好就是 u 的 Laplace 方程．于是 $u(x,\ y)+iv(x,\ y)$ 就是复变量 $z=x+iy$ 的一个解析函数 $f(z)$（参看 Knopp [1945] 第 30 頁），也就是說(1.5)成立．所以(1.5)是(1.1)的通解．

Laplace 方程的解通常叫做**調和**函数（或势函数），而由 Cauchy-Riemann 方程 (1.4) 所联系的两个調和函数叫做是相互**共軛的**．

方程(1.2)的通解也可以无困难地算出来，因为如果 u_{xx} 和 u_{yy} 都連續，則作变量的变换

$$\xi = x+y,\quad \eta = x-y,\quad u(x,\ y) = \omega(\xi,\ \eta),$$

就把(1.2)变成

$$\omega_{\xi\eta} = 0,$$

这方程的解是

$$\omega = F(\xi) + G(\eta),$$

其中 F 与 G 都是任意的可微函数；如果我們要求 $\omega_{\xi\eta} = \omega_{\eta\xi}$，那就沒有別的解了．所以

$$u(x,\ y) = F(x+y) + G(x-y) \tag{1.6}$$

是(1.2)的解，这里只要 F 与 G 都是两次可微函数，此外則是任意的[要使(1.6)是一个解，F 与 G 的二阶导数甚至不必是連續的，把(1.6)代入(1.2)即可得到証明]．

在一个数学物理問題中，对微分方程的解附加的条件随問題的性质而有所不同．下面給出一些极为簡单但又是典型的例子．

(a) 考虑一条剛性的金属綫，它在 (x, y) 平面上的正投影是一条簡单封閉曲綫 C．在这个框架上張以一个在均匀張力作用下的密度均匀的理想彈性膜．以 $u(x, y)$ 表示这膜对 (x, y) 平面的偏离．假定 u 及其导数都很小，使得 u, u_x, u_y 的高次幂可以忽略不計，則可証明 u 在 C 的內部 R 內是一个調和函数．当然，u 在边界 C 上的值就是預先給定的金属綫框架的偏离 f．所以 u 是問題

$$\Delta u=0 \quad 在\ R\ 內, \quad u=f \quad 在\ C\ 上 \tag{1.7}$$

的解(参看 Courant-Hilbert [1953] 第 247 頁)．这一問題通常叫做 Laplace 方程的 Dirichlet 問題．对于这个問題和其他問題，应当記住，除非 f 是很光滑的函数，否則不能希望解在边界点上会有二阶导数，更談不上在边界上滿足微分方程．我們說 u 取事先給定的边值是指 $u(x, y)$ 当点 (x, y) 从內部趋于边界时趋于这些值．

(b) 一根直而細长的棒作纵向彈性振动．經过数学上的理想化，設棒由 x 軸表示，并以 $u(x, t)$ 表示在静止状态具有横坐标 x 的点在时刻 t 对其静止位置的偏离．如果 $u(x, t)$ 很小，在适当地选擇单位后，u 就是微分方程 $u_{tt}-u_{xx}=0$ 的解．这个微分方程是波的傳播的微分方程的最簡单形式 (Sokolnikoff 与 Sokolnikoff [1941] 第 367 頁)．基于物理学的理由，我們希望 u 在任何时刻的值，当初始偏离 $u(x, 0)$ 及初始速度 $u_t(x, 0)$ 事先給定后将是唯一确定的．这样就导出了在 $t>0$ 求 $u(x, t)$，使

$$\begin{gathered} u_{tt}-u_{xx}=0 \quad 当\ t>0\ 时; \\ u(x, 0)=f(x); \quad u_t(x, 0)=g(x) \end{gathered} \tag{1.8}$$

的問題，其中 $f(x)$, $g(x)$ 除了可能要滿足某些光滑性要求外 (这些要求現在不准备討論)，是事先任意給定的．这是初值問題的一个例子．初值問題有时也叫做 Cauchy 問題．

(c) 再考虑一根細直的无限长的棒．但是这一次用 u 表示它

的温度，而研究 u 与 x, t 的依賴关系．我們假定棒是絕热的，并且已知温度的初始分布 $u(x, 0)$．于是以后的温度分布 $u(x, t)$ 就唯一地确定了，这从物理上看来是合理的．容易証明，只要适当地定义变量的单位，那末在理想的情况下，棒中热流的微分方程是 $u_t-u_{xx}=0$ (参看 Churchill [1944] 第 15 頁起)．于此，自然的初值問題就是

$$u_t-u_{xx}=0 \text{ 当 } t>0 \text{ 时}; \quad u(x, 0)=f(x).$$

在綫性常微分方程論中，一个給定的方程通常可以按不同的方式和附加条件相結合，这些附加条件可以是在一个点，两个点或更多的点上預先給定的数据．在一定的相当广泛的范圍内，只要条件的数目和微分方程的阶数相同，这种問題一般会有唯一的解．对于偏微分方程，这一点不再成立，这个事实具有本质的重要性．Hadamard ([1923] 第 23～24 頁) 曾經着重指出并說明了这一点．

他証明了，例如，Laplace 方程的 Cauchy 問題

$$\Delta u=0 \text{ 当 } y>0 \text{ 时}, \quad u(x, 0)=f(x), \quad u_y(x, 0)=g(x), \tag{1.9}$$

在一定意义下不是适定的．例如，考虑特殊情况 $f(x)\equiv 0$，并假定 $u(x, y)$ 是 (1.9) 在某个以 x 軸的一段为下界的区域内的解．这时可以利用关于調和函数的两条标准定理，第一条是說：調和函数 $u(x, y)$ 是变量 x 或 y 的任何一个的解析函数 (Sommerfeld [1949] 第 47～48 頁)．第二条是关于解析函数反射原理的一个簡单推論 (Nehari [1952] 第 183～187 頁)．它告訴我們：一个函数，如果它在一个以直綫段为部分边界的区域内是調和的，而在这条直綫段上为零，則可調和开拓到这綫段上和这綫段的外面．由于調和函数的导数仍是調和函数，从这两个事实便可推出，当 $y=0$ 时，$u_y(x, y)$ 是 x 的解析函数，这就是說，$g(x)$ 必須是解析的．換言之，除非已知函数 $g(x)$ 属于非常特殊的函数类，即解析函数类，否則 $f(x)\equiv 0$ 的問題(1.9)就沒有解．容易証明，如果 $f(x)$ 不事先規定

为恒等于0，要(1.9)有解也必須$f(x)$是解析的．但是我們不在这里証明了．

在初始值的可以容許的选擇中，这个很严的限制乍一看来会认为是不严重的．因为大家知道，根据 Weierstrass 逼近定理，任何連續函数都可以用解析函数(甚至用多項式)逼近至任意的程度(Courant 与 Hilbert [1953] 第65頁起)．如果边界值的良好逼近一定导致$y>0$时解的良好逼近，那末这一論点将是正确的．但是，对于現在这个問題，正好不是这个情形．作为反例，只須考慮初值

$$f(x)=e^{-\sqrt{n}}\sin nx,\quad g(x)=0,$$

其中n是正整数．容易驗証

$$u(x,\ y)=e^{-\sqrt{n}}\cosh ny\sin nx$$

是具有这些初值的調和函数．当$n\to\infty$时，初值及其一切导数均趋于0，然而$u(x,\ y)$当$y\neq 0$时迅速地发散．

按 Hadamard 所說，对于初始数据的不連續依賴性，使得問題(1.9)不具有任何物理意义，因为物理数据按其性质来說都只是近似的．更一般地說，Hadamard 把一个数学物理問題称为**适定的**，**如果它的解存在、唯一、并且連續地依賴于数据**．可以証明，問題(a)，(b)，(c)都是适定的．如果发現一个具有物理来源的数学問題不是适定的，这通常表明它的叙述是不正确或不完全的．

把問題(a)，(b)，(c)的附加条件互换得出的問題都不是适定的．作为第二个不适定的例子，考慮附加条件的一个这种互换．設

$$u_{xx}-u_{yy}=0\text{ 在 }R\text{ 内},\quad u=f\text{ 在 }C\text{ 上},\tag{1.10}$$

其中R是一个长方形，它的边的斜率为± 1．仍用变换$\xi=x+y$，$\eta=x-y$，微分方程便变成$\omega_{\xi\eta}=0$，而长方形R变成边平行于ξ軸和η軸的长方形R^*．假定(1.10)有解．由于ω_ξ不依賴于η，而

ω_η 也不依賴于 ξ，所以边界值函数 f 的切向导数在边界长方形相对边的对应点上必須具有相同的值．換言之，对于任意的 f，即使加上很严的光滑性限制，問題(1.10)也沒有解．

偏微分方程可以根据附加条件的类型来进行分类，这些附加条件是使問題成为适定所必需的．对于含两个自变量的二阶綫性微分方程，这种分类是容易描述的．这种类型的最一般的微分方程是

$$Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu+G=0, \qquad (1.11)$$

其中的系数都是 x, y 的函数．根据行列式

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

是正的、負的、或零而称(1.11)是**椭圓型的**、**双曲型的**或**抛物型的**．这种分类一般取决于所考虑的 (x, y) 平面上的区域．例如，$xu_{xx}+u_{yy}=0$ 这个微分方程当 $x>0$ 时是椭圓型的；当 $x<0$ 时是双曲型的；而当 $x=0$ 时則是抛物型的．

本节所討論的三个簡单方程的每一个是这三种类型之一的例子：Laplace 方程是椭圓型的；波动方程是双曲型的；热流动方程是抛物型的．可以証明，我們在每个情形所附加的条件和相应类型的較一般的微分方程結合起来会得到适定的問題，但和任何其他类型的微分方程結合起来則不然．

对于含两个以上变量的微分方程，以及对于方程組和非綫性微分方程也能給出关于椭圓型、双曲型、和抛物型的概念的有用定义．我們将在需要时再行介紹．

最近，Hadamard 关于只有适定問題才有物理意义的見解曾經被一些数学家怀疑过．对具有物理来源的椭圓型方程的某些初值問題，提出了应該逼近准确解的数值計算格式，虽然这准确解是以不連續的方式依賴于初始值的．然而这些研究还远不完整，不能在这里加以描述．

§2 方程組和单个方程

任何一个高于一阶的方程可以写成一个一阶方程組．这是很明显的．要做到这一点，一个方法是把方程中出現的未知函数的一切导数，除了最高阶的之外，都作为新的未知函数．这样，方程 $u_{xx}-u_{yy}=0$ 就和三个函数 u, p, q 的方程組

$$u_x=p,\quad u_y=q,\quad p_x-q_y=0$$

等价．

对于常微分方程，这个命題的逆也是真的．从 n 个适合某些不强的正則性条件的函数的 n 个一阶方程的方程組，可以推出一个只包含这些未知函数之一的一个 n 阶方程．例如，从两个联立方程 $f(x, u, v, u', v')=0$ 与 $g(x, u, v, u', v')=0$ 中，先解出 v 与 v'，得到两个方程

$$v=\phi(x, u, u'),\quad v'=\psi(x, u, u'),$$

就可消去未知函数 v 和它的导数 v'．于是函数 u 必須满足二阶微分方程

$$\frac{d}{dx}\phi(x, u, u')-\psi(x, u, u')=0.$$

只要 f, g 具有必要的可微性而 Jacobi 行列式 $f_v g_{v'}-f_{v'} g_v$ 对于所討論的解不为 0，这个消去法总是可能的．

对于偏微分方程，这种消去一般是不可能的．理由是逐次微分时引进的新未知函数可以多于新的方程．假定給了一組 n 个一阶偏微分方程，包含 n 个未知函数和 $p>1$ 个自变量．我們就要消去 $n-1$ 个未知函数和它們的 $p(n-1)$ 个一阶导数．这一般是不可能的．如果添上由对 p 个自变量中的每一个自变量微分每个方程而得到的 np 个新方程，我們就引进了需要消去的 $n-1$ 个函数的每个函数的 $\frac{1}{2}p(p+1)$ 个二阶导数．于是，只要 $\frac{1}{2}p(p+1)(n-1)$