# 有限群论

[德] 贝·胡佩特 著

## 第一卷 第一分册

福建人民出版社

# 有限群论

第一卷 第一分册

# 有限群论

## 第一卷

### 第一分册

［德］B. 胡佩特著

姜 豪 俞曙霞 译

福建人民出版社

1992年·福州

闽新登字 01 号

**有限群论**

第一卷　第一分册

［德］B.　胡佩特著

姜　豪　　俞曙霞 译

*

福建人民出版社出版

（福州得贵巷 27 号）

福建省新华书店发行

福建省地质测绘印刷厂印刷

开本 850×1168 毫米 1/32　15.875 印张　377 千字

1992 年 5 月第 1 版

1992 年 5 月第 1 次印刷

印数：1—1000

ISBN 7—211—01698—1

O·1　　定价：6.95 元

# 译者说明

本书是根据德国B. 胡佩特撰写的、Springer-Verlay 出版社1967年出版的《有限群论》第一卷翻译而成. 为了便于读者使用，出版时分成两个分册：第一分册包括一～三章，第二分册包括四～六章.

原著再版时有一张勘误表，翻译时已对照此表将错误更正. 原著用德文花体字母来表示群，翻译时按通常习惯尽可能改用拉丁字母大写斜体表示，这样一来小写的拉丁字母既用来表示群中的元素也用来表示整数，但其确切意义不难从上下文判别. 在容易引起混淆的地方，译者将符号做了适当的改动. 外国人名一律译成中文，只在与援引文献有关的地方仍用原文，以便查找.

参加本书翻译工作的，有姜豪（第一章和第二章）、俞曙霞（第三章）、黄建华（第四章和第六章）、李慧陵（第五章），最后由马长冰负责校订.

由于翻译水平所限，错误不当之处在所难免，欢迎读者不吝赐教.

# 前　言

当我在 1958 年开始准备写这本书的时候，用一卷书给出有限群理论的一个比较完整的论述看来好象还是可能的，但从那以后有限群理论的蓬勃发展（书末的文献目录就说明了这一点）使我的设想已不可能实现. 现在这第一卷的内容，除了基本概念外，还包含有幂零群、$p$-幂零群和可解群的理论以及常表示的理论. 由于近年来有限群理论发展的重点不在这些方面，故在此能够对这些理论的近况作一个相当完整的概述（最近几年刚出现的区系和费廷类理论只能编入一部分）. 第二卷包含的内容，将有次正规子群的理论、$p$-长度的更为精致的理论、多重传递置换群和指标理论的一些新的应用，由于近年来有限群研究的成果极为丰富，故在第二卷中已无法追求论述的完整性.

有一些专题没有编入：

1. 如果用谢瓦莱的方法来统一处理如今已知的有限单群的系列，就要求有相当广泛的李代数的基础知识. 故在第二章中我仅限于论述射影群和辛群. 马蒂厄单群和铃木单群要到第二卷里讨论.

2. 方次数为 $p$ 的 $p$-群的理论及为此而必须知道的幂零群与李环之间的关系在本书中没有谈到. 这些理论在内容和方法上与有限群构造理论的其余问题只有很少的联系，而这些理论的应用主要也是在无限群的理论方面.

3. 迄今为止，有限群的上同调理论的最重要的应用是在类域论中而不是在有限群的构造理论中. 因此，第一章 §19（放弃了

用函子描述上同调群）只针对本书所处理问题（扩张理论，$p$-群的自同构，舒尔乘子）的需要，对上同调理论作了适当的论述.

学习本书虽然不要求读者具有群的预备知识，但要求读者具备代数学的基础知识. 群论的基本概念和基本辅助工具在第一章中得到了一个完整的但很紧凑的阐述，尽管在当时并未说明我们的动机. 环论方面的辅助工具，如主理想环的理论（第一章§13）和半单代数的理论（第五章§2—4）在本书中都有完整的阐述，不过有时我也偶尔不加证明就引用关于 *p-adic* 数域和代数数域的一些简单定理.

我没有打算对本书的各部分均衡地配上习题. 在第一章的习题中给出了很多命题和各种不同的证法，但在后面各章中有时在很长篇幅内也没有习题. 书中只在极少数地方引用了习题中的结论.

在我写这本书的原稿时得到了许多人的帮助和支持. R. 贝尔，N. 伊统，O. H. 克格尔和 J. 罗斯评阅了某几章的各种不同的稿本. N. 布莱克本和 H. 吕南博格审阅了全部手稿. 对手稿或校样中的几乎所有各章我都与 W. 加许茨，F. 格罗斯和 J. 诺伊比泽尔进行了详细的讨论. 这共同努力的结果使原稿得到了多方面的改进，避免了错误和含混不清. 我还要感谢 N. 布莱克本，R. 卡特尔，E. 达内，W. 加许茨，P. 霍尔，P. 罗凯特，D. 汤特，J. G. 汤普森和 H. 维兰特为我提供了尚未公开发表过的结果、证明以及例子. A. 布兰迪斯，K. 德尔，W. 加许茨，K. D. 格拉夫，F. 格罗斯，B. 克莱贝尔，J. 诺伊比泽尔和 A. 施勒特帮助进行了长时间的校对工作. 对所有帮助我的人在此表示衷心的感谢. 最后我还要感谢下列单位为我提供了与同事们进行多次交谈的机会及参加与本书有关的工作的机会：不列颠理事会为我提供在曼彻斯特逗留的机会（1958/59）；在厄巴纳的伊利诺斯大学任

客座教授（1963/64）；1964年秋在帕萨迪纳的加利福尼亚理工学院任客座教授. 我还要感谢出版社在校对过程中慷慨地接受我的多次大量修改的要求和感谢其对本书的精美的装帧.

我应特别感谢我的老师赫尔穆特·维兰特. 我是从他那里学习有限群理论的. 他讲授的内容往往成了本书许多章节的原稿的出发点，并始终对我的选材和著述风格发生着影响.

**B. 胡佩特**

1967年9月15日于美因茨

# 再版前言

由于有限群理论的迅速发展，在第一卷问世十年之后，其部分内容已显陈旧，尤其是关于可解群那章，情况更是如此. 作一些小补小改看来已无济于事. 特别是考虑到可望在不久出版的第二卷中再作一些增补，所以我决定这次在第一卷再版时不作任何改动，只是就我已发现的错误附加了一张勘误表. 在书中有关的页数旁加注了星号. 读者自己就很容易看出的纯粹的笔误没有收进勘误表中.

许多同事都给我指出了本书的错误和疏忽之处，在此一并向他们致谢. 我特别要感谢约翰·罗斯博士（纽卡斯尔），他给出了一张很全面的勘误表，而且还附有很好的修改建议.

**B. 胡佩特**

1979年5月于美因茨

# 符 号 表

$p^s \Vert a$：$p$ 是素数且满足 $p^s | a$ 而 $p^{s+1} \nmid a$.

$(a,b)$：整数 $a$ 与 $b$ 的最大公约数.

$V(n,K)$：域 $K$ 上 $n$ 维向量空间.

$V^*$：向量空间 $V$ 的对偶空间.

$\underline{a}^*$：线性变换 $\underline{a}$ 的转置变换.

$\langle v_1,\cdots,v_n\rangle$：由向量 $v_1,\cdots,v_n$ 生成的子空间.

$\left.\begin{array}{l} GL(m,K), PGL(n,K), SL(n,K), PSL(n,L) \\ GL(n,p^f), PGL(n,p^f), SL(n,p^f), PSL(n,p^f) \end{array}\right\}$（第二章，6.1；第 210 页）

$U \leqslant G, U < G$（第一章，2.1；第 5 页）

$U \trianglelefteq G, U \triangleleft G$（第一章，3.1；第 14 页）

$U \triangleleft\triangleleft G$（第三章，7.11；第 371 页）

$e, E$（第一章，2.1；第 5 页）

$|M|$（第一章，1.7；第 4 页）

$|G:U|$（第一章，2.5；第 6 页）

$\langle M\rangle$（第一章，2.4；第 6 页）

$g^a$（第一章，2.14；第 10 页）

$M^g$（第一章，2.15；第 11 页）

$M^G$（第一章，3.14；第 20 页）

$N_G(M), C_G(M)$（第一章，2.17；第 12 页）

$C_G(N/M)$（第一章，4.3；第 22 页）

$o(g)$（第一章，2.8；第 7 页）

Exp$G$（第一章，2.8；第 8 页）

$[a,b]$（第一章，8.1；第 44 页）

$[A,B]$（第一章，8.1；第 44 页）

$G', G'', G^{(i)}$（第一章，8.1；第 44 页）

$G^{(k)}$（第一章，8.7；第 47 页）

$K_i(G), K_\infty(G)$（第三章，2.2；第 313 页）

$c(G)$（第三章，2.7；第 316 页）

$N_G(M)$（第一章，2.17；第 12 页）

$Z_i(G), Z_\infty(G)$（第三章，2.2，第 313 页）

$\Phi(G)$（第三章，3.1；第 323 页）

$\Omega_i(G), \mho_i(G)$（第三章，10.4；第 391 页）

$F(G)$（第三章，4.2，第 333 页）

$n(G)$（第三章，4.7，第 336 页）

$F_p(G)$（第六章，5.4；第 329 页）

$l_p(G)$（第六章，6.1；第 331 页）

$A(G)$（第一章，4.1；第 21 页）

$I(G)$（第一章，4.2；第 21 页）

$\underset{i}{\times} G_i$（第一章，9.1；第 54 页）

$A \curlyvee B$（第一章，9.10；第 58 页）

$A \curlywedge B$（第一章，9.11；第 60 页）

$A \wr B$（第一章，15.1；第 112 页）

$A \underset{r}{\wr} B$（第一章，15.5；第 114 页）

$A \underset{U}{\wr} B$（第一章，15.10；第 116 页）

$\Delta_g$（第一章，5.1；第 28 页）

$G_a, G_\Delta, G^\Delta, \Delta^G$（第一章，5.9；第 31 页）

sgn$g$（第一章，5.4；第 30 页）

$S[G]$（第一章，16.6；第 123 页）

$\tau^G, V^G, \mathbb{D}^G$（第五章，16.1；第 171 页）

$\tau_U, V_U, \mathbb{D}_U$（第五章，16.4；第 173 页）

# 目　　录



## 第一章　基础理论

## 第二章　置换群和线性群



## 第三章　幂零群和 $p$-群

# 第一章　基础理论

在第一章中我们首先紧凑而全面地阐述了群论的基本概念（§1—4）．在这些小节中包含了大量在以后要反复用到的基本定理和引理，特别是乘积定理 2.12a)，德特肯恒等式 2.12c)，引理 2.13 以及定理 4.5，4.8 和 4.9．群的置换表示的一个重要推论是具有基本重要性的西洛定理（§7)，在§8 中由西洛定理导出了一些可解性的初步的判别法则．

第一章的后面几节主要讲有限群理论中的构造方法：直积（§9 和§12)，扩张理论（§14)，织积（§15)．和直积内容放在一起的还有两个从直积导出的结构，即用联合中心子群作的直积(9.10) 和用联合商群作的直积．弄清楚在什么情况下可以用确定的方法从单群构造出预先给定的群是一个重要问题．我们对此进行了反复的讨论．于是在§13 中作为研究主理想环上的模的一种特殊情况，我们获得了有限生成的阿贝尔群的基本定理．查森浩斯定理（§18）指出某些扩张是半直积．这个定理对于有限群理论有着基本的重要性．我们在§16 中论述的上同调理论仅限于以后对研究 $p$-群的自同构（第三章，§19）和处理舒尔乘子（第五章，§23）有用的范围之内．

在好些地方把有限群这个限制取消是妥当的，甚至是必须的．在§9—13 中阐述的直积，合成列以及带算群和模的直分解这些理论是这样安排的，使得许多在表示论（第五章）中需要的关于模的定理都作为其特例而包含在其中了．最后在§19 中通过定义

关系来描述群时对自由群作一番讨论就完全是不可避免的了.

建议初学者先只读§1—9和§18；读者在习题70中可以找到17.5的一个不用上同调理论的证明的梗概.

## §1 群的公理

**1.1 群公理** 如果非空集合$G$满足下列条件，就称为一个群：

a) 对于$G$中元素的每个有序偶对$\{a, b\}$，都有$G$中唯一确定的第三个元素$c$与之对应，我们写成$c=ab$且称$c$为$a$和$b$的积.

b) 对$G$中所有$a$，$b$，$c$结合律成立

$$(ab)c = a(bc).$$

c) $G$中有一个元素$e$，对$G$中所有元素$a$都有$ea=a$. 我们称$e$是$G$的一个单位元.（将会知道，这样的元素只能有一个.）

d) 对$G$中每个元素$a$，存在$G$中一个元素$b$，满足$ba=e$，

我们首先从这些公理导出几个简单的推论：

**1.2 推论** 群中乘积的构成不依赖于括号；更确切地说：对$G$中任意元素$a_1$，$a_2$，…，我们递归地定义$G$的子集$\mathscr{T}_k(a_1, \cdots, a_k)$如下：

$\mathscr{T}_1(a_1)=\{a_1\}$，$\mathscr{T}_2(a_1, a_2)=\{a_1a_2\}$和$\mathscr{T}_k(a_1, \cdots, a_k)=\{xy \mid x\in\mathscr{T}_m(a_1, \cdots, a_m), y\in\mathscr{T}_n(a_{m+1}, \cdots, a_{m+n}), k=m+n\}$.（$\mathscr{T}_k(a_1\cdots, a_k)$中的元素就是添加了各种有意义的括号的乘积$a_1\cdots a_k$）我们断言：对每个$k$，$\mathscr{T}_k(a_1, \cdots, a_k)$中恰含有一个元素. 这个元素我们记为$a_1\cdots a_k$.

**证明**：我们对$k$作归纳法来证明每个$\mathscr{T}_k(a_1, \cdots, a_k)$中恰含有一个元素. 对$k=1$，2由定义结论显然成立. 设$k\geqslant 3$和$g=xy\in\mathscr{T}_k(a_1, \cdots, a_k)$，其中$x\in\mathscr{T}_m(a_1, \cdots, a_m)$和$y\in\mathscr{T}_n(a_{m+1}, \cdots, a_k)$. 根据我们的归纳假设有$x=a_1z$，其中$z=a_2\cdots a_m$，当$m=1$时我

们认为 $z=e$ 而省略. 现有由 1.1b) 有

$$g = xy = (a_1z)y = a_1(zy)$$

而根据归纳假设有

$$zy \in \mathscr{T}_{k-1}(a_2,\cdots,a_k) = \{a_2\cdots a_k\}.$$

**1.3 推论** a) 设 $e$ 是群 $G$ 的单位元，则对 $G$ 中所有元素 $a$，也有 $ae=a$.

b) 由 $ba=e$ 可得 $ab=e$.

c) 由 $ax=ay$ 或 $xa=ya$ 可得 $x=y$.

**证明**：a) 根据 1.1d) 在 $G$ 中存在元素 $x$ 和 $y$ 满足 $xa=e$ 和 $yx=e$. 于是

$$ye = y(xa) = (yx)a = ea = a.$$

由于 $ee=e$ 我们进一步有

$$a = ye = y(ee) = (ye)e = ae.$$

此即所要求证者.

b) 根据 1.1d) 在 $G$ 中有元素 $x$ 满足 $xb=e$. 注意到 1.2，我们有

$$e = xb = xeb = x(ba)b = (xb)(ab) = e(ab) = ab.$$

c) 设 $ba=e$，则我们也有 $ab=e$ 且

$$x = ex = (ba)x = b(ax) = b(ay) = (ba)y = ey = y.$$

同样也有

$$x = xe = x(ab) = (xa)b = (ya)b = y(ab) = ye = y.$$

**1.4 推论** 设 $G$ 是群，则对于 $G$ 中给定的元素 $a$ 和 $b$，$G$ 中恰有一个元素 $x$ 满足 $ax=b$. 同样恰有一个元素 $y$ 满足 $ya=b$.

**证明**：设 $c$ 是根据 1.1d) 而存在的元素，满足 $ca=e$. 由 1.3b) 又有 $ac=e$. 现在 $x=cb$ 就是我们所要找的那种元素，因为我们有

$$ax = a(cb) = (ac)b = eb = b.$$

设元素 $x_1$ 和 $x_2$ 满足 $ax_1=ax_2=b$，则由 1．3c）立得

$$x_1 = x_2.$$

由 1．4 直接可推出，$G$ 只有一个单位元 $e$．还进一步可得：

**1．5 推论**　a）对 $G$ 中预先给定的 $a$，在 $G$ 中恰有一个 $x$ 满足 $xa=e$．因而也有 $ax=e$．我们称 $x$ 为 $a$ 的逆，且写成 $x=a^{-1}$．

b）始终成立 $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$和 $(a^{-1})^{-1}=a$．

**证明**：命题 a）是 1．4 和 1．3b）的推论．由 1．2 我们有 $(b^{-1}a^{-1})\ ab=(b^{-1}\ (a^{-1}a))\ b=b^{-1}b=e$，再由 $aa^{-1}=e$ 和逆元的唯一性即得命题 b)．

**1．6 定义**　我们递归地定义群 $G$ 中元素 $g$ 的幂如下：$g^0=e$，$g^{i+1}=g^ig$；对 $i<0$ 我们定义 $g^i=(g^{-i})^{-1}$．易证对所有有理整数 $i$ 和 $j$ 成立 $g^{i+j}=g^ig^j$．

**1．7 定义**　一个集合 $M$ 的基数我们始终用 $|M|$ 表示．如 $G$ 是一个群，我们称 $|G|$ 为 $G$ 的阶．如果 $|G|$ 是一个有限的基数，我们称 $G$ 为有限群．

使我们感兴趣的常常不是群中元素的自然本性，而是元素之间的代数关系．为此我们在下面引入等价的概念．

**1．8 定义**　两个群 $G_1$ 和 $G_2$ 称为同构的，如果存在一个从 $G_1$ 到 $G_2$ 上的一一对应 $\pi$ 且对于 $G_1$ 中的任意元素 $g$ 和 $h$ 有 $(gh)^\pi=g^\pi h^\pi$．这时我们写成 $G_1\cong G_2$．同构显然是一种等价关系．所谓群特性我们理解为这样一种性质，这种性质对 $G$ 及与 $G$ 同构的每一个群都成立．

我们指出：

**1．9 推论**　设 $\pi$ 是 $G_1$ 到 $G_2$ 上的同构，$e_i$ 是 $G_i$ 的单位元．则 $e_1^\pi=e_2$．且对 $G_1$ 中任意元素 $g$ 有 $(g^{-1})^\pi=(g^\pi)^{-1}$．

**证明**：对 $G_1$ 中任意元素 $g$ 成立等式

$$e_1^\pi g^\pi = (e_1g)^\pi = g^\pi$$

再由 1．4 中所说单位元素唯一性可得 $e_1^\pi = e_2$，由

$$(g^{-1})^\pi g^\pi = (g^{-1}g)^\pi = e_1^\pi = e_2$$

可得

$$(g^{-1})^\pi = (g^\pi)^{-1}.$$

**1．10 定义** 群 $G$ 称为阿贝尔的（也称为交换的），如果对 $G$ 中任意元素 $a$ 和 $b$ 有 $ab=ba$，这时每个乘积 $a_1\cdots a_n$，其中 $a_i\in G$，都不依赖于这些 $a_i$ 的排列次序了．

## §2 子 群

**2．1 定义** 群 $G$ 的一个子集 $U$ 称为 $G$ 的子群．如果 $U$ 在 $G$ 中所定义的乘法下也是一个群．这就是说：

如 $u_1$ 和 $u_2$ 在 $U$ 中，则 $u_1u_2$ 也在 $U$ 中；如 $u$ 在 $U$ 中，则 $u^{-1}$ 也在 $U$ 中；$G$ 的单位元 $e$ 在 $U$ 中．（$e$ 自然也是 $U$ 的单位元．）

如果 $U$ 是 $G$ 的一个子群，则我们表为 $U\leqslant G$；如果 $U$ 是 $G$ 的一个不同于 $G$ 的子群，则我们表为 $U<G$．每个群都含有一个仅由单位元 $e$ 组成的子群 $E=\{e\}$．我们有时称 $G$ 和 $E$ 是 $G$ 的平凡的子群．

经常有用的是：

**2．2 辅理** 设 $U$ 是群 $G$ 的一个有限子集，且对于 $U$ 中任意元素 $u_1$ 和 $u_2$ 始终有 $u_1u_2\in U$，则 $U$ 是 $G$ 的一个子群．

**证明**：设 $u_0$ 是 $U$ 的任一个固定的元素．由 1．3c）可知，对 $u\in U$，乘积 $uu_0$ 是各不相同的，因而恰好产生 $U$ 中 $|U|$ 个元素．因此 $U=\{uu_0 \mid u\in U\}$．特别地在 $U$ 中存在一个元素 $u_1$ 使得 $u_1u_0=u_0=eu_0$．根据 1．3c）有 $u_1=e$．更进一步，在 $U$ 中存在一个 $u_2$ 使得 $u_2u_0=e$，因此 $u_2=u_0^{-1}$ 也在 $U$ 中．

**2．3 定理** 设 $U_i$ 是 $G$ 的子群，其中 $i$ 属于一个下标集 $I$，则其交 $\bigcap_{i\in I} U_i$ 也是 $G$ 的一个子群．