普通高等教育"十一五"国家级规划教材

高等代数学

（第二版）

姚慕生 吴泉水 编著

博学·数学系列

复旦大学出版社
www.fudanpress.com.cn

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等代数学

（第二版）

姚慕生 吴泉水 编著

博学·数学系列

复旦大学出版社
www.fudanpress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

高等代数学(第二版)/姚慕生,吴泉水编著. —上海:复旦大学出版社,2008.6
(博学·数学系列)
ISBN 978-7-309-05963-2

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①姚…②吴…　Ⅲ. 高等代数-高等学校-教材　Ⅳ. 015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 035159 号

高等代数学(第二版)
姚慕生　吴泉水　编著

出版发行　复旦大学 **出版社**　上海市国权路 579 号　邮编 200433
86-21-65642857(门市零售)
86-21-65100562(团体订购)　86-21-65109143(外埠邮购)
fupnet@fudanpress.com　http://www.fudanpress.com

责任编辑　范仁梅
出 品 人　贺圣遂

印　　刷　上海浦东北联印刷厂
开　　本　787×960　1/16
印　　张　25.5
字　　数　471 千
版　　次　2008 年 6 月第二版第一次印刷
印　　数　1—6 000

书　　号　ISBN 978-7-309-05963-2/O·409
定　　价　45.00 元

第一版前言

一、编写指导思想

高等代数是大学数学系学生的一门基础课. 本书是根据国家教育部关于综合性大学数学系的课程设置及教学大纲的要求编写的,可作为综合性大学数学系、师范大学数学系的教材或教学参考书,也可供力学、物理学、工程学、经济学、管理学等系科学生与教师作参考书.

高等代数是一门基础课,它涉及的内容都是早已积累起来的成熟知识. 我们的目的是要根据现代科学技术发展的需要,通过进一步的整理和组织,使学生学到必要的基础知识,为今后的学习和工作打下良好的基础.

本书在结构上采用以线性空间为纲的做法,即把高等代数的主要内容放在线性空间的框架下展开,同时对必要的代数方法也作了尽可能详细的介绍. 事实证明:几何的直观可以帮助学生更好地理解,而代数方法则往往比较简洁直接. 如何使两者有机地结合起来是一个值得研究的问题,编者希望在这一方面作一尝试. 本书常常采用这样的方法:在线性空间的框架下"几何地"提出问题,再把问题"代数化",然后用代数方法来解决问题.

学生能力的培养比单纯知识的积累更重要. 本书在叙述基础知识的同时,努力做到交代清楚概念的来龙去脉. 通过不断地提出问题、分析问题、指明解决问题的途径,让学生主动地思考问题,提高分析能力.

高等代数的内容极其丰富,人们很难简单地断言哪些是有用的,哪些是没有用的. 此外,学生的需要和能力是因人而异的,因而每个学生对学习内容的要求也不相同. 我们不可能做到面面俱到,因此在选材上只能选择最基本、最重要的内容. 同时为了照顾不同的需要,把一些内容作为选修(即打 * 号的内容),教师应鼓励学有余力的学生学习这些内容.

二、内容说明

全书共分 10 章.

第一章主要讲行列式.在行列式的引进上采用比较容易理解的方法,即从解线性方程组提出问题,用归纳的方法引进行列式.这样做的好处是目的性强,容易为学生接受.Cramer 法则放在比较前面也是为了同一个目的.

第二章介绍矩阵的基本概念和运算.重点放在矩阵的乘法和矩阵的初等变换上.对分块矩阵也作了比较详细的介绍.

第三章引进线性空间的概念.从学生熟悉的二维和三维空间出发,引入 n 维向量和 n 维空间.我们把线性空间的基域假设为一般的数域,这样虽然在开始时比较抽象,但对以后的学习有很大的好处.对一般抽象的 n 维空间,我们尽早引入坐标的概念使之表示为具体的 n 维行向量空间或列向量空间.这种把几何的概念代数化的思想将在以后的章节中重复出现,并且作为一种基本的方法要求学生熟练掌握.在引进子空间的概念后我们立即引进了直和的概念,为相似标准型理论的几何背景做好准备.对向量的线性关系、向量组秩的概念和矩阵秩的概念等作了统一处理,从而精简了篇幅.线性方程组的解可以借助子空间的概念来阐明,这样可以使线性方程组的解有了几何意义.当然解法仍然是"代数的",即用矩阵方法.

第四章主要介绍线性映射和线性变换的概念.在思想方法上重点向学生阐明线性映射(或线性变换)与矩阵的关系,让学生学会如何把一个"几何的"问题代数化并用代数的工具加以处理,或者反过来把一个代数的问题"几何"化,用线性空间的理论来解决它.

第五章介绍多项式.多项式理论在本课程中主要作为标准型理论的准备而安排的,因此在内容上可以根据实际情况加以取舍.

第六章介绍特征值.特征值与特征向量是作为一维不变子空间而引进的,这种引进方法具有直观的几何意义.接着就用它们来解决矩阵相似于对角阵的问题.Cayley-Hamilton 定理的引进和证明采用了典型的几何与代数相结合的方法.

第七章介绍相似标准型.相似标准型的理论有各种讲述法,我们采用比较简单的 λ-矩阵的方法.首先把数字矩阵的相似等价于它们的特征矩阵的相抵,然后用 λ-矩阵的初等变换来求法式,求不变因子和初等因子.这样处理不仅比较简单易算,而且可以向学生介绍处理各种标准型问题的思想方法.由于约当标准型的重要性,约当型将作重点介绍.这一章的处理方法基本上是"代数"的,为了让学生从几何的角度来了解标准型理论,我们在本章第七节介绍了根子空间和循环子空间的概念.考虑到矩阵函数在后继课程中的用途,我们在最后一节中作了介绍,可作为选修内容.

第八章介绍二次型.在二次型理论的叙述中,我们仍然将几何问题与代数方

法紧密结合，把几何问题代数化，然后用矩阵来处理.

第九章介绍内积空间. 内积空间主要介绍欧氏空间的理论，但同时也介绍酉空间的理论，而且在一些地方加以统一的处理. 这种安排的目的是让学生对复空间不再感到神秘，看到复线性空间理论与实空间理论的共同之处. 正规算子、谱分解等概念在通常的线性代数课程中不作介绍，但这是一些重要的概念，可以作为选修的内容让学有余力的同学选学. 最小二乘解是很有用的，用欧氏空间来处理非常直观和简单，因此也把它作为选学内容.

第十章介绍双线性型. 这一章都是选修内容. 安排这部分内容主要考虑在我国的大学教育中很少有这方面的内容，而这些内容对数学学科又具有重要的意义，让有兴趣的学生学习这一内容是有益的.

本书是编者在复旦大学数学系多年教学实践的基础上编写而成的，并在教学实践中作了多次修改. 尽管如此，限于编者的水平与经验，错误和不妥之处在所难免. 恳请专家、学者和读者提出宝贵意见.

编　者

2002 年 7 月

再 版 前 言

本书的第一版作为普通高等教育"十五"国家级规划教材于 2003 年出版. 本书出版以来,得到了广大读者的关心和肯定. 本书第二版又作为普通高等教育"十一五"国家级规划教材. 第二版的主导思想是: 废止灌输式,倡导启发式. 编者始终认为学习数学的最好方法是自己动手做数学. 虽然基础课讲授的内容都是前人积累下来的成果,但是自己动手做一遍和光听别人说一遍或被动地读一遍,其收获完全不同. 主动地学习,不断地思考问题,自己动手解决问题是培养创新能力的关键. 编者建议读者在阅读本书的每一章节时,都要认真地思考一下: 这一节要解决什么问题? 我有什么办法去解决这些问题? 对一些定理、例题可尝试给出自己的证明或解答,然后和书本的证明或解答进行比较. 为了帮助初学的读者思考问题,在本书的许多章节,编者都安排了各种问题,读者可以此作为学习的线索;在引进基本概念时也尽量对其来龙去脉进行了说明. 书中配有大量各个层次的习题,有些习题有相当的难度(往往打有星号),初学者可跳过去,不必为之大伤脑筋,亦可参考姚慕生编著的《高等代数(大学数学学习方法指导丛书)》(复旦大学出版社)一书.

与第一版相比,本书第二版作了较大的改动. 第一章和第九章的大部分章节都重新编写. 行列式的引进采用了更加易懂的方法. 第三章也作了较大的改动,特别对向量线性关系的引进、向量线性相关和线性无关的判定、向量秩的计算等方面都作了比较多的改动. 其他各章也不同程度地作了修改. 比如第五章,删去了 Sturm 定理,加进了中国剩余定理. 各章节中许多概念的引进、定理的证明、内容的编排次序也都有不同程度的变动. 第一版中一些文字上的错误及不妥之处也得到了纠正. 所有这些变动的目的是为了使本书更加容易理解,对读者更具启发性. 当然话好说,做起来却不那么容易. 这本书究竟能否达到编者的目的还有待于实践的检验,因此我们真诚地欢迎读者以及同行的批评意见和建议.

本书的出版得到了复旦大学出版社的大力支持,在此谨向他们表示衷心的感谢!

编　者

2007 年于复旦大学

E-mail 地址: yaomsk@126.com

qswu@fudan.edu.cn

内容提要

本书是普通高等教育“十五”、“十一五”国家级规划教材.

全书以线性空间为纲，在线性空间的框架下展开高等代数的主要内容. 内容包括：行列式、矩阵、线性空间和线性变换、多项式、特征值、相似标准型、二次型、内积空间和双线性型等.本书力求深入浅出，在介绍抽象的数学概念时交代其来龙去脉，在讲解精妙的数学方法时不忘交代其思路.书中还有大量精选的例题和习题.

本书是高等学校数学系的教材，也适合统计系、理工科各系，以及经济、管理类专业的学生、研究生和教师参考.

目　　录

第一章 行 列 式

§1.1 二阶行列式

我们在中学里曾经学过如何解二元一次方程组和三元一次方程组.在许多实际问题中,我们还会遇到未知数更多的一次方程组,通常称之为线性方程组.一般来说,具有下列形状的方程组我们称为 n 元线性方程组的标准式:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中 a_{ij}, $b_i(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$ 都是常数,$x_i(i=1, 2, \cdots, n)$是未知数,方程组中所有未知数都是一次的.注意在一般的线性方程组中,m 和 n 可以不相等,即方程组中未知数个数和方程式个数可以不等.凡是经过有限次移项、合并同类项可以变为(1.1.1)式形状的方程组都称为线性方程组.求解线性方程组是线性代数的一个重要任务,我们在这一章中主要讨论当 $m = n$,即方程式个数等于未知数个数时如何来解上述线性方程组.

我们首先回忆一下中学里学过的解二元一次方程组的方法.先看一个简单的例子.

例 1.1.1 *求解二元一次方程组:*

$$\begin{cases} 2x - y = 5, \\ 3x + 2y = 11. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

解 用代入消去法,在第一个方程式中解出 y 用 x 表示的式子:

$$y = 2x - 5.$$

代入第二个方程式中得到

$$3x + 2(2x - 5) = 11.$$

整理后得

$$7x = 21.$$

解得 $x = 3$,代入 $y = 2x - 5$ 求得 $y = 1$. 于是上述线性方程组有唯一组解:

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 1. \end{cases}$$

读者不难想象这种方法也可用来解一般的线性方程组. 比如对一个含 10 个未知数的方程组,利用一个方程式将第一个未知数用其他 9 个未知数表示出来以后分别代入其余方程式,于是原来的方程组就化为只含有 9 个未知数的方程组了. 再用同样的方法可以得到一个只含 8 个未知数的方程组等等. 一直做到只含 1 个未知数. 解出这个一元一次方程式并返回去求所有其他未知数. 这个办法在理论上似乎是可行的,但是当未知数个数很多时(在许多实际问题中,未知数的个数可能有成千上万个),运算将变得难以想象的复杂. 另外,用代入法无法得出一个规范化的公式,这对于从理论上分析线性方程组的解不能不说是个很大的缺陷. 我们现在希望给出线性方程组解的一个公式. 这样的公式真的存在吗?我们首先来考察二元一次方程组的解,设有二元一次方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1.3}$$

用 a_{22} 乘第一式的两边,用 $-a_{12}$ 乘第二式的两边得:

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22}, \\ -a_{12}a_{21}x_1 - a_{12}a_{22}x_2 = -b_2a_{12}. \end{cases}$$

将这两个方程式两边相加得:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

于是

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

用类似的办法消去 x_1,解得:

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

我们注意到二元一次方程组的两个解都可以表示为分数的形状，其中分母仅和未知数的系数有关. 二元一次方程组解的公式是有了，但是这个公式不太好记忆.

如果我们引进二阶行列式，

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

则上述解可用行列式表示：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.1.4}$$

在用行列式表示的解公式(1.1.4)中，我们发现解的表达有一定的规律：

(1) x_1 与 x_2 的分母都是行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，即只需将原方程组未知数前的系数按原顺序排成一个行列式即可.

(2) x_1 的分子行列式的第一列是原方程组的常数列，第二列由 x_2 的系数组成，因此这个行列式可以看成是将 x_1 与 x_2 的分母行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 中的第一列换成常数项而得. 这个规则对 x_2 的分子行列式也适用.

显而易见，这样的解的公式一目了然而且很容易记忆. 我们自然希望用同样的公式来表示三元一次方程组的解乃至 n 元线性方程组的解. 在做这件事之前，我们先来研究二阶行列式的性质，这将启发我们如何定义一般的 n 阶行列式.

设有二阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$|A|$ 的值根据定义为 $a_{11}a_{22}$. 我们称上述行列式为上三角行列式，元素 a_{11}，a_{22} 为行列式的对角线元素(或主对角元素)，于是我们得到行列式的第一个性质.

性质 1 上三角行列式的值等于其对角线元素之积.

性质 2 行列式某行或某列全为零，则行列式的值等于零.

比如若第一行全为零,则显然

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

其他几种情形也类似可验证.

性质 3 用常数 c 乘以行列式的某一行或某一列,得到的行列式的值等于原行列式的值的 c 倍.

比如将 c 乘以 $|A|$ 的第一行,我们有

$$\begin{vmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (ca_{11})a_{22} - (ca_{12})a_{21} = c\,|A|.$$

其他几种情形读者可自己验证.

性质 4 交换行列式不同的两行(列),行列式的值改变符号.

证明也很容易:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

同理

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

性质 5 行列式两行或两列成比例,则行列式的值等于零,特别,若行列式两行或两列相同,则行列式的值等于零.

对列成比例的情形我们可证明如下:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} \\ a_{21} & ka_{21} \end{vmatrix} = a_{11}ka_{21} - ka_{11}a_{21} = 0.$$

同理可证明行成比例的情形.

性质 6 若行列式中某行(列)元素均为两项之和,则行列式可表示为两个行列式之和.

如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & a_{12} \\ b_{21}+c_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & a_{12} \\ c_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

验证也非常容易,只需按照行列式定义计算等式两边的值即可.需要注意的是下面的等式不成立:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

请读者想一想为什么?上式左边的行列式应该等于什么?

性质 7 行列式的某一行(列)乘以某个数加到另一行(列)上,行列式的值不变.

比如行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+ka_{11} \\ a_{21} & a_{22}+ka_{21} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}+ka_{21}) - a_{21}(a_{12}+ka_{11})$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

同理可证

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

设有二阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$|A|$的值根据定义为 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.我们称下列行列式为$|A|$的转置:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

记为$|A'|$.注意$|A'|$的第一列就是$|A|$的第一行,$|A'|$的第二列就是$|A|$的第二

行.根据定义$|A'|=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$,我们发现它就等于行列式$|A|$的值.于是我们得到行列式的又一个性质.

性质 8 行列式和其转置具有相同的值.

注 从性质 1 到性质 7 我们发现行列式性质具有行和列的对称性,即对行成立的性质,对列也成立.这是因为性质 8 在起作用.转置将行变成了相应的列,既然行列式转置后值不改变,那么同样的性质对列也成立.

现在我们试着用行列式性质来解二元一次方程组(1.1.3).

将 b_1,b_2 代入下面的行列式:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2 & a_{12} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 & a_{22} \end{vmatrix}.$$

由性质 7,在右边的行列式中用$-x_2$乘以第二列加到第一列上,行列式值应该不变,即上式等于

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2-a_{12}x_2 & a_{12} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2-a_{22}x_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} \\ a_{21}x_1 & a_{22} \end{vmatrix}.$$

再由性质 3,

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} \\ a_{21}x_1 & a_{22} \end{vmatrix} = x_1\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

综上所述,

$$x_1\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

故

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

同理,通过计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

我们得到