



全国高等教育自学考试

高等数学(一)微积分 同步练习册

全国高等教育自学考试指导委员会/组编
张万国 姚慕生 徐诚浩/编写

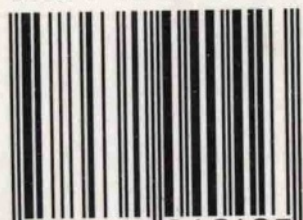
2001
年
版



辽宁大学出版社



ISBN 7-5610-4042-3



9 787561 040423 >

ISBN 7-5610-4042-3/G · 1499 定价:14.80 元

全国高等教育自学考试丛书
财经类专业

高等数学（一）

微积分同步练习册

全国高等教育自学考试指导委员会 组编

张万国 姚慕生 徐诚浩 编

辽宁大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(一),微积分同步练习/张万国等编. - 沈阳:辽宁大学出版社,2002. 1

ISBN 7-5610-4042-3

I. 高… II. 张… III. ①高等数学-高等教育-自学考试-习题②微积分-高等教育-自学考试-习题

IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 33669 号

辽宁大学出版社出版

网址: <http://www.lnupress.com.cn>

Email: mailer@lnupress.com.cn

(沈阳市皇姑区崇山中路 66 号 邮政编码 110036)

开本:880 毫米×1230 毫米 1/32 字数:335 千字 印张:11.375

丹东日报印刷厂印刷

印数:5001-15000 册

2002 年 1 月第 2 版

2002 年 1 月第 2 次印刷

责任编辑:李洪革

封面设计:刘桂湘

责任校对:郑冰

定价:14.80 元

版权所有 翻印必究

如有质量问题请与当地图书供应部门联系调换

组编前言

“高等数学（一）微积分”是高等教育自学考试中的一门重要的基础课。许多考生由学习初等数学到高等数学，感到有不少困难，希望有一本教学参考书可供他们使用。因此我们根据“高等数学（一）自学考试大纲”，结合编者从事自学考试辅导的体会，针对考生的特点编写了本书。我们希望这本书能给参加自学考试的同学提供一些帮助。

本书分两个部分。第一部分基本上沿用了《高等数学（一）微积分》一书中的章节。每一章首先简述了有关内容后，通过对大量的各种类型例题的分析解答，说明了微积分中的各个基本概念，各种题型的解题方法和基本技巧。在每一章的后面还有大量的习题供考生练习。在例题和习题内容的选取上主要是选取历年的考试试题，也选用了一部分教材中的习题。题型是单项选择题、计算题和证明题，与自学考试的试题一致。为了便于读者自学，所有习题都附有解答，选择题说明了解题方法和选择的理由。在这一部分共有 200 余道例题和 400 余道练习题。第二部分是五套模拟试卷及其解答。本书的特点是与大纲和教材同步，便于学生学习使用。

本书的最后有一个附录，附有 1998 年至 2000 年上半年的自学考试试卷及其解答或提示。读者可以通过这五套模拟试题和五套自学考试试题的练习来测试一下自己的水平。

本书可供广大自学考试考生和经济管理人员自学使用，也可供数学教师及自学考试辅导人员参考。

限于编者水平，成书仓促，不足和错误在所难免，欢迎读者批评指正。

目 录

第一部分 主要内容和例题分析	1
第一章 函数及其图形	3
一 内容提要	3
二 例题分析及解题技巧	10
三 练习题	19
四 练习题答案	25
第二章 极限与连续	29
一 内容提要	29
二 例题分析及解题技巧	35
三 练习题	49
四 练习题答案	56
第三章 导数与微分	63
一 内容提要	63
二 例题分析及解题技巧	67
三 练习题	77
四 练习题答案	83
第四章 中值定理与导数的应用	89
一 内容提要	89
二 例题分析及解题技巧	92
三 练习题	107
四 练习题答案	112
第五章 积分	120
一 内容提要	120

二	例题分析及解题技巧·····	125
三	练习题·····	142
四	练习题答案·····	150
第六章	无穷级数·····	160
一	内容提要·····	160
二	例题分析及解题技巧·····	165
三	练习题·····	178
四	练习题答案·····	183
第七章	多元函数微积分·····	189
一	内容提要·····	189
二	例题分析及解题技巧·····	194
三	练习题·····	210
四	练习题答案·····	217
第八章	微分方程初步·····	227
一	内容提要·····	227
二	例题分析及解题技巧·····	229
三	练习题·····	236
四	练习题答案·····	239
第二部分	模拟试题·····	243
试题一·····		245
试题二·····		252
试题三·····		259
试题四·····		266
试题五·····		273
模拟试题答案·····		279
附录	1998 年至 2000 年上半年全国高等教育自学考试	
	高等数学 (一) 试卷及解答·····	303

第一部分

主要内容与例题分析



第一章 函数及其图形

一、内容提要

(一) 集合 集合是指具有某个共同性质的元素的全体,通常用大写字母表示集合,小写字母表示集合中的元素. $a \in A$ 表示元素 a 是集合 A 中的元素, $a \notin A$ 表示 a 不是集合 A 中的元素.

若集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素,则称集合 B 包含集合 A ,也称集合 A 是集合 B 的子集.记作 $A \subseteq B$,或 $B \supseteq A$.若集合 A 的元素都是集合 B 的元素,而集合 B 中有元素不属于 A ,则称 A 是 B 的真子集,记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

若集合 A 和集合 B 彼此包含,则称集合 A 和集合 B 相等,记作 $A = B$.由相等定义知, $A = B$ 等价于 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$.

若一个集合不包含任何元素,则称此集合为空集,记为 $\emptyset$.注意,零元素组成的集合包含零,因此不是空集.

一切同时属于 A 和属于 B 的元素组成的集合称为集合 A 和集合 B 的交集.记为 $A \cap B$.

由属于集合 A 或属于集合 B 的一切元素组成的集合,称为集合 A 与 B 的并集.记为 $A \cup B$.

由属于集合 A 而不属于集合 B 的元素全体组成的集合称作集合 A 和集合 B 的差集.记作 $A - B$.

被研究的所有对象构成的集合称为全集.常用字母 U 表示全集.集合 $U - A$ 称为集合 A 的补集.记作 $\bar{A}$.

集合的运算有如下性质:

交换律 $A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A;$

$$\begin{aligned}
&\text{结合律} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C; \\
&\quad \quad \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C; \\
&\text{分配律} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \\
&\quad \quad \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \\
&\text{对偶律} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \\
&\quad \quad \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.
\end{aligned}$$

(二) 函数 有两个变量 x 和 y . 如果变量 x 在某个变化范围 D 内任取一个值时, 变量 y 按一定的对应关系, 有唯一的一个值与之对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数, 记作 $y = f(x)$. 自变量的取值范围为定义域. 因变量的取值范围为值域, 决定两个函数是否为同一个函数的关键是它们的定义域和对应关系是否完全相同, 而与函数的变量用什么字母来表示无关.

若一个函数其定义域可以分成若干部分, 在每一个部分用一个解析式来表达函数的对应关系, 则这样的函数称为分段函数. 注意, 分段函数表示的是一个函数, 只是在其定义域的不同区间内用不同的解析式来建立对应关系而已.

设 y 是 u 的函数 $y = f(u)$, u 是 x 的函数 $u = \varphi(x)$, 又设 D 表示函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域的一个子集. 若对于 D 中的每一个值 x , 其对应的 u 值, 函数 $y = f(u)$ 有定义, 这样, 变量 y 通过 $u = \varphi(x)$ 而成为 x 的函数, 记为 $y = f(\varphi(x))$, 这个函数称为由 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数.

(三) 函数的基本性质

单调性 若对于 $x_1, x_2 \in I \subseteq D_f$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 总有 $f(x_1) < f(x_2)$. 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 内严格单调增加(或单调上升). 反之, 若 $x_1 < x_2$ 时, 总有 $f(x_1) > f(x_2)$. 则称严格单调减少(或单调下降). 显然, 单调性与所讨论的区间有关.

有界性 若存在 A, B 两常数, 使对一切 $x \in D_f$ 成立 $A \leq f(x) \leq B$, 则称 $f(x)$ 是有界函数. 若在定义域内的一个区间 $I \subseteq D_f$ 成立 $A \leq f(x) \leq B$, 则称在区间 I 内函数有界.

奇偶性 设函数 $f(x)$ 的定义域 D_f , 若对一切 $x \in D_f$ 成立 $f(-x) = f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 是偶函数. 若对一切 $x \in D_f$ 成立

$f(-x) = -f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为奇函数. 注意, 对于奇函数, 若 $x = 0$ 有定义, 则必有 $f(0) = 0$. 偶函数的几何图形是关于 y 轴为对称的, 奇函数的几何图形关于原点对称.

周期性 设函数 $f(x)$ 定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上, 若存在常数 $T > 0$, 使对一切 x 成立 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数, T 为周期. 在一切周期 T 中最小的正数称为最小正周期. 通常以最小正周期来表示一个函数的周期.

(四) 初等函数

基本初等函数是指以下五类函数.

1. 幂函数 $y = x^\mu$, μ 可以是任何实数;
2. 指数函数 $y = a^x$, ($a > 0, a \neq 1$);
3. 对数函数 $y = \log_a x$, ($a > 0, a \neq 1$)
4. 三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$.
5. 反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$.

读者对于上述几个基本初等函数的基本性质及图象应该相当熟悉. 为了便于掌握, 我们在图 1-1 ~ 图 1-12, 列出了这些基本初等函数的图象, 供参考.

初等函数的定义: 由基本初等函数和常数, 经过有限次四则运算和复合运算后构成的函数称为初等函数. 初等函数通常是由一个解析式来表示的.

微积分中也常遇到一类称为幂指函数形式的初等函数, 其一般形式为 $y = [u(x)]^{v(x)}$. 由于这一类函数可以表示为 $y = e^{v(x)\ln u(x)}$, 因此也是初等函数. 它们的极限、导数计算都有一定的法则.

(五) 常见的经济函数

1. 成本函数 $C(x)$. 成本 C 是产量 x 的函数. 通常由固定成本 C_0 和可变成本 $C_1(x)$ 之和组成. 令 $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$, 称 $\bar{C}(x)$ 为平均成本函数, 即单位产品的平均成本.

2. 收益函数 $R(x)$. 收益 R 是销售量 x 的函数. 若产量单价为 p , 则

$$R(x) = p \cdot x.$$

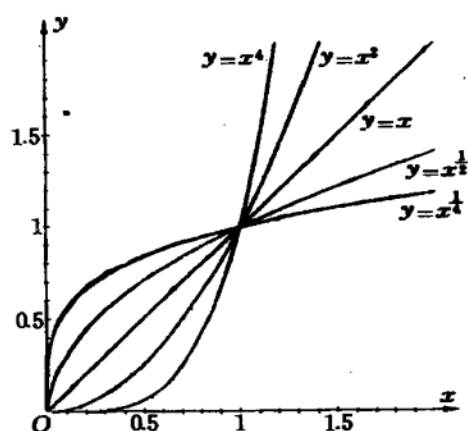


图 1-1 幂函数(正指数)

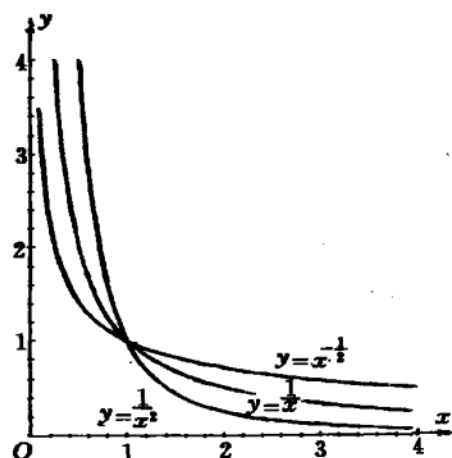


图 1-2 幂函数(负指数)

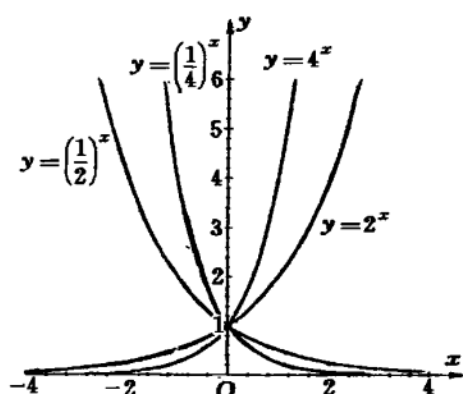


图 1-3 指数函数

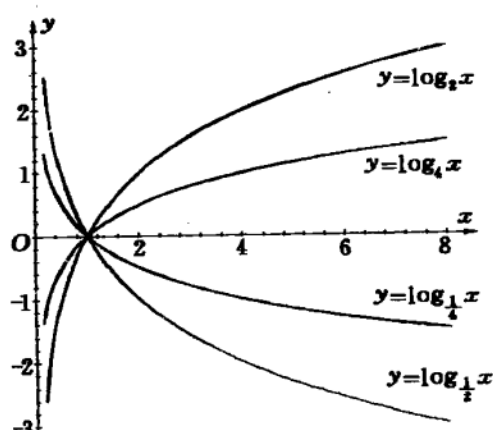


图 1-4 对数函数

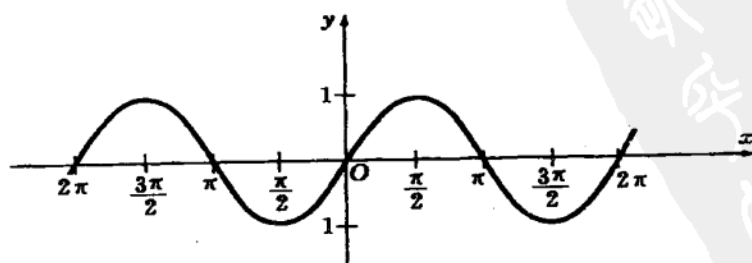


图 1-5 正弦函数 $y = \sin \theta$

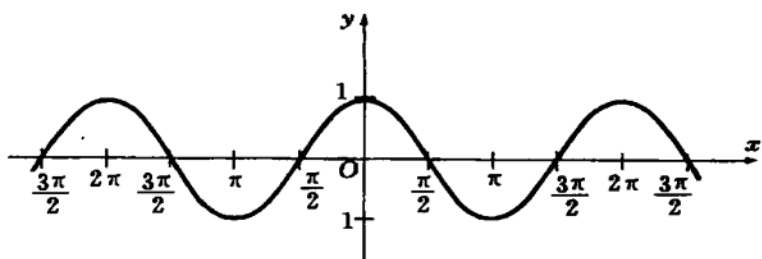


图 1-6 余弦函数 $y = \cos \theta$

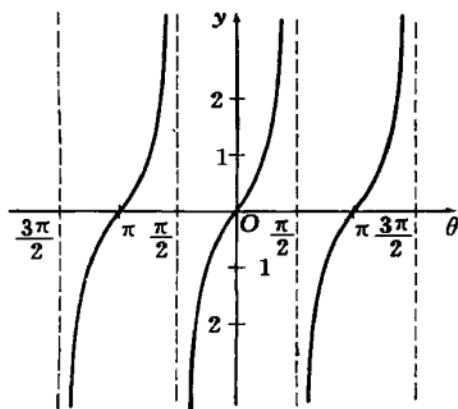


图 1-7 正切函数 $y = \tan \theta$

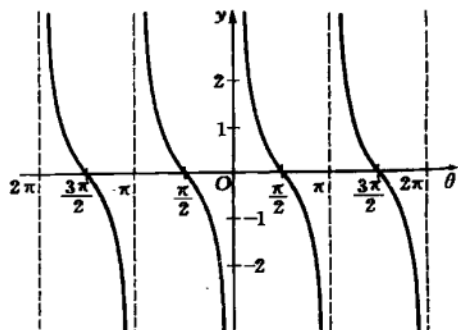


图 1-8 余切函数 $y = \cot \theta$

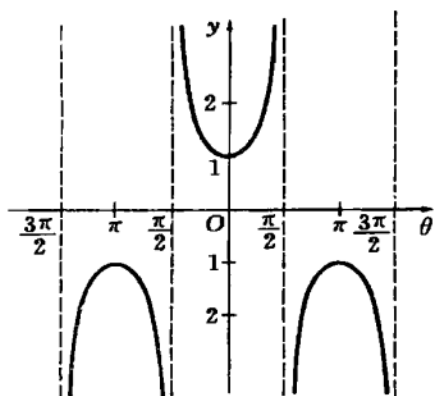


图 1-9 正割函数 $y = \sec \theta$

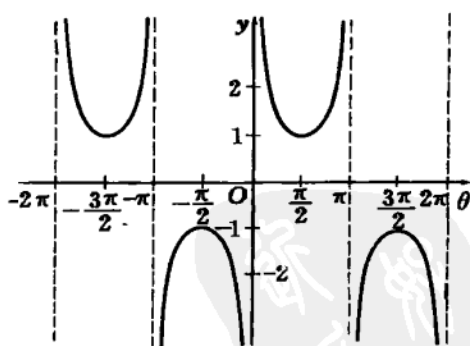


图 1-10 余割函数 $y = \csc \theta$

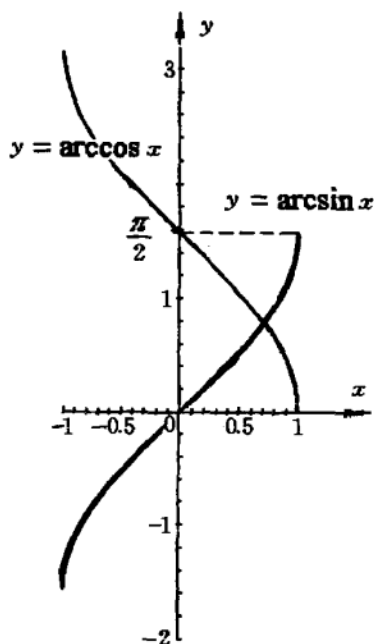


图 1-11 反正弦和反余弦函数

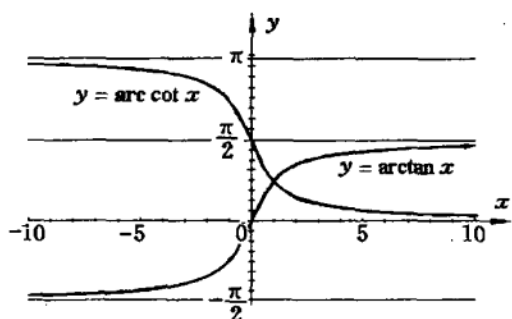


图 1-12 反正切和反余切函数

3. 利润函数 $L(x)$. 利润为收益减去成本 $L(x) = R(x) - C(x)$.

4. 需求函数 $Q(p)$. 社会需求量 Q 为价格 p 的函数. 通常是单调减少的函数, 有时也用其反函数 $p = p(Q)$ 表示需求函数. 在产销平衡的经济模型中, 总认为产量 x 和需求量 Q 是相等的.

5. 供给函数 $Q = g(p)$. 商品供给量 Q (即产品产量 x) 是商品价格 p 的函数, 通常是一个单调增加的函数.

6. 生产函数 $Q = f(K, L)$. 这是一个二元函数, 它表示最大生产能力 Q 是劳动力 K 和固定资产 L 的函数.

7. 消费函数 $C = C(Y)$. 它是指消费总量 C (例如社会商品零售总额) 是社会平均收入 Y 的函数. 通常它是一个单调增加的函数.

为了使读者对某些初等函数有一个直观的了解, 便于以后对极限计算的理解, 我们给出了一些初等函数的图象, 它们是 $y = \frac{\sin x}{x}$, $y = \sin \frac{1}{x}$, $y = \sin(x^2)$, $y = x + \frac{1}{x}$, $y = x - \frac{1}{x}$. 它们分别表示在图

1-13 至图 1-17.

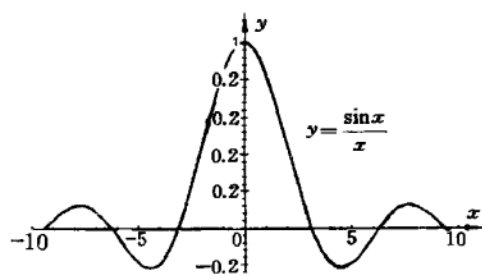


图 1-13 $y = \frac{\sin x}{x}$

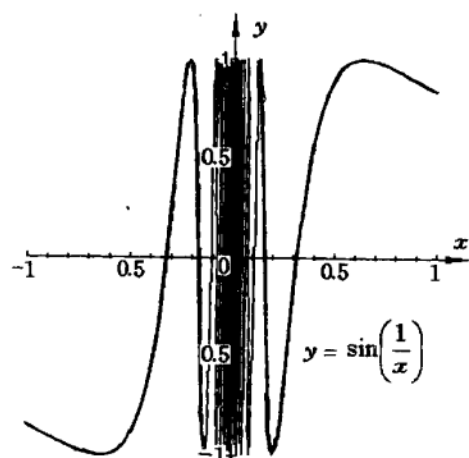


图 1-14 $y = \sin \frac{1}{x}$

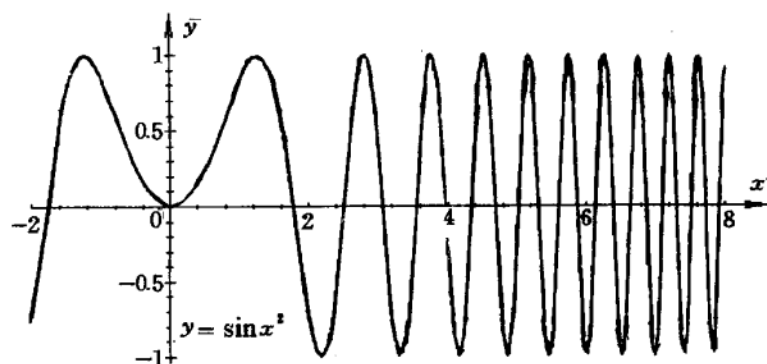


图 1-15 $y = \sin x^2$

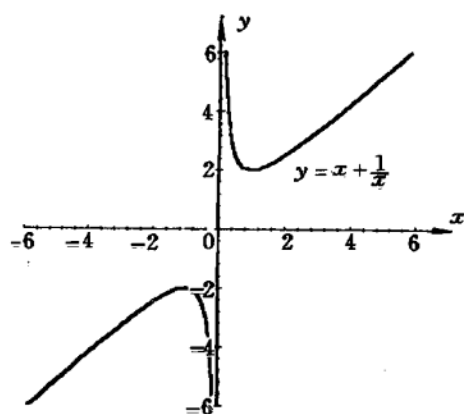


图 1-16 $y = x + \frac{1}{x}$

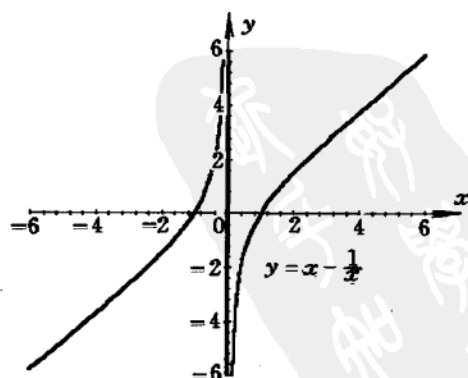


图 1-17 $y = x - \frac{1}{x}$

本章的基本要点和考试重点

本章主要应掌握集合的定义及其简单的运算,应熟练地掌握定义域的确定和计算.了解决定两个函数是否相同,主要是看其定义域及对应关系是否相同,而不是其表示字母是否相同.了解分段函数的含义,复合函数的复合过程,反函数的确定等.要掌握常见的初等函数的图象特点,及函数与其反函数的图象对称性.

能熟练地判别简单的函数的单调性、有界性、周期性、奇偶性等,要求记住几个常用的奇函数与偶函数.

熟悉基本初等函数的几何图象,其定义域,单调性,对称性,有界性,渐近线等.这些知识对于学习高等数学是十分重要的.

本章考试重点是集合的性质及运算;函数的定义域,函数关系,复合函数的复合关系及复合函数的定义域;函数的奇偶性.

本章试题均以概念选择题出现,在选择题中约占4—6题.

二、例题分析及解题技巧

[例1] 如果集合 $A = \{x | x(x^2 - 1) = 0\}$, 下列集合中哪个集合与 A 相等().

- ① $\{x | x(x + 1) = 0\}$; ② $\{x | x^2(x^2 - 1) = 0\}$;
③ $\{x | (x - 1)(x^2 - 1) = 0\}$; ④ $\{x | e^x(x^2 - 1) = 0\}$.

[解] 判别集合是否相等,需用定义检验,本题的集合①中元素是有限个:① = $\{0, 1, -1\}$. 而答案中的① = $\{0, -1\}$, ② = $\{0, 1, -1\}$, ③ = $\{-1, 1\}$, ④ = $\{1, -1\}$, 因此选②.

[例2] 如果集合 A 和 B 满足 $A \cup B = B$, 那么 A 与 B 的关系必是().

- ① $A = B$; ② $A \subset B$;
③ $A \subseteq B$; ④ $A \supset B$.

[解] $A \cup B$ 表示两个集之并,即集合 A 的元素和集合 B 的元素的全体. 现在已知 $A \cup B = B$. 表示 A 和 B 的元素的全体就是 B 集. 因此 A 的元素一定是 B 的元素. 虽然 B 的元素可以不是 A 的元素,但也可能发生 A 和 B 是相同的集. 此时, A 就不是 B 的一个真子集了. 因此应