21世纪独立学院系列规划教材

线性代数的理论与演练

俞南雁◎编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

21 世纪独立学院系列规划教材

线性代数的理论与演练

俞南雁　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书的开篇是导论，和同学们一起探讨如何学好线性代数. 上篇分矩阵及其运算，行列式，可逆矩阵、分块矩阵，向量组的秩与矩阵的秩，线性方程组，向量空间内积与正交矩阵，相似矩阵与特征值，实对称矩阵与实二次型八个专题辅导线性代数的理论与解题实践. 每个专题包括内容要览、释疑解惑、例题精解、同步练习及同步练习参考答案五个板块. 下篇是综合测试及提高，包括三份模拟期中试卷及七份模拟期末试卷，供同学自测之用. 另外还有 2005～2008 年全国硕士研究生入学考试数学试卷中的线性代数试题，以备参考.

本书适合作为理工科各专业本科生、专科生的学习参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数的理论与演练/俞南雁编著. —北京：机械工业出版社，2008.4

(21世纪独立学院系列规划教材)

ISBN 978-7-111-23729-7

Ⅰ. 线… Ⅱ. 俞… Ⅲ. 线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 036399 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)
策划编辑：郑 丹 郑 玫 责任编辑：郑 玫 版式设计：霍永明
责任校对：张 媛 责任印制：杨 曦
北京机工印刷厂印刷
2008 年 4 月第 1 版第 1 次印刷
169mm×239mm · 6.75 印张 · 261 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-23729-7
定价：19.00 元

前　　言

本书的开篇是导论：和同学们一起探讨如何学好线性代数．上篇分八个专题辅导线性代数的理论与解题实践．每个专题包括内容要览，释疑解惑，例题精解、同步练习及同步练习参考答案五个板块．前两个板块务虚：点明基本要求，罗列重要知识点，理清基本概念和基本理论．后三个板块务实：通过对典型例题的分析，求解和点拨，破析解题思路，总结解题经验，以求触类旁通．再通过同步练习及阶段自测，促进同学自己构架知识体系，培养解题能力．下篇是综合测试及提高，三份期中测试卷及七份模拟期末测试卷，均选自东南大学成贤学院及远程学院的考试真题．另外，还收录 2005～2008 年全国硕士研究生入学考试数学试卷中的线性代数试题，供同学们学习提高和参考．

本书所有同步练习，阶段自测及综合测试中的所有题目都附有参考答案．注意，参考答案不是供阅读用的，而是供同学们做完题后核对用的；或者是动足了脑筋，实在想不出办法时，可以在参考答案中寻找启发，但最终还是要由自己完成解答．也请注意线性代数中有些问题的答案或答案的形式不是唯一的，而解法也往往有多种．在理论的指导下做题，在做题中不断发展对理论的理解和掌握，考试就难不倒了。

本书的疏漏和错误之处，欢迎同行及读者批评指正．

编著者

目　　录

导论　和同学们谈谈线性代数的学习

一、线性代数这门课有什么特点?

线性代数是处理多个变量与多个变量之间线性关系（即一次关系）的数学分支. 在大学线性代数课程中，这种线性关系主要通过矩阵（包括只含一列或只含一行的矩阵，即向量）去刻画和处理. 因此矩阵和向量是本课程的主要研究对象和研究工具.

首先，矩阵是数字排成的矩形表格，其运算规则与数的运算规则有很大不同. 例如乘法，一般情况下，交换律、消去律和“乘法公式”对于矩阵是不成立的. 再者，矩阵无除法. 如果不对这些特点足够重视并保持警觉，就容易犯错.

其次，围绕着矩阵和向量，又产生了一系列概念、理论和方法. 例如（方阵的）行列式、矩阵的秩，矩阵的初等行变换，初等矩阵，向量组的线性相关性和秩、基础解系、正交向量组、正交矩阵，相似矩阵、相合矩阵、特征值与特征向量，对称矩阵，正负惯性指数，规范形等. 概念多，运用概念进行推理也多，定理（性质、公式等）也就多. 这就需要加大预习、复习、思考、记忆的力度，抱着做作业“交差”的想法是断然学不好的.

最后，本课程学时较少，通常每周只有一次课，必须紧跟教学进度不放松，稍有拖延就会造成学习后继内容的困难. “上课听不懂”多半是前面内容“消化不良”造成的.

在大学里，老师的任务是引领同学进入知识殿堂. 在这个殿堂里，同学是主体. 一系列的学习过程必须由同学自己来完成，任何人无法替代. 有些同学进入大学后不去主动适应大学学习的规律和要求，平时松松垮垮，指望考试前靠“划重点”、“押题”过关，这是错误的. 因为第一，重点已体现在老师的讲课中，平时就应该掌握；第二，重点要由同学自己把它放在知识的框架中去体会，否则“重点”就成为孤立的碎片. 希望同学们以主人翁姿态，在学习态度和学习方法上迅速完成中学到大学的转变. 在学时少的情况下，更要抓紧预习、复习和作业，学出主动，学出自信.

二、学习线性代数有什么用?

线性代数是一门基础理论课程. 线性代数的理论与方法，已渗透到自然科学、工程科学和经济科学等众多领域，起着愈来愈重要的作用. 因此线性代数已成为许多专业基础课和专业课的必要基础和必要工具. 反映多个变量与多个变量之间线性关系的时间离散系统或时间连续系统（差分方程组或微分方程组），都可以用向量和矩阵去描述；矩阵相抵、相似、相合和正交相似，则是处理线性关系的重要手段；“在科学技术或工业应用中所包含的大量数学问题中，大约有 75%以上会在某一阶段遇到线性方程组的问题”（当代美国数学家 Steven 语）；极值问题，控制理论和解析几何的一些问题还用到二次型. 这些都是线性代数的论题. 只是限于课程性质、学时数及同学的专业知识背景，教材一般不可能举出太多的应用实例.

数学是关于模式和秩序的科学，是“科学的语言”，学习数学不能急功近利、立竿见影. 通过学习数学，包括线性代数，更重要的是学会数学思维、数学方法，去提升我们的思维能力和创新能力. 基础打好了，在后续课程中，在今后的工作中，你一定会得心应手，发展得更好.

三、怎样学习线性代数中的抽象概念?

概念是一切理论的基础，任何科学都离不开概念，数学尤其如此. 概念越抽象，其外延就越丰富，应用就越广泛. 线性代数对于刚进大学的同学而言是一门“另起炉灶”的数学. 如何克服“概念多”、“概念难懂”的困难？我的建议是：

第一，逐字逐句反复研读每个定义，并结合课本及本书的具体例子，仔细琢磨，反复体会，做到能用自己的语言准确复述定义.

第二，着重弄清定义中的一些关键词语的作用. 例如，线性相关定义中的“不全为零”，特征向量定义中的“非零向量”，正交向量组定义中要求“不含零向量”，正交矩阵定义的前提“实方阵”，正定矩阵定义的前提“实对称”，等等.

第三，借助几何直观帮助想象和理解. 例如，线性代数中向量、向量空间、基、维数、坐标、内积、标准正交基、正交变换等许多概念皆源自解析几何. 有关概念的几何解释，有助于对抽象代数概念的理解.

第四，在阅读例题和做习题时有意识地不断思索，反复磨练，巩固并加深对基本概念的理解，做到能熟练运用定义.

四、对定理（性质、公式）及其证明的要求是什么？

对每个定理、性质或公式应正确理解并记忆它的条件和结论，通过例题、习题来掌握它们的用法. 特别要分清楚充分条件、必要条件和充要条件，避免盲目使用而发生错误.

有些过渡性的结果可以不记忆（例如关于向量组秩的预备定理）；有些结论抓住根本性的东西就很容易记住（例如向量组线性相关或线性无关的判别准则，其关键是对定义的深刻把握）；还有很多结论在联系和对比中记忆效果更好（例如 n 阶方阵可逆的各种充要条件、实对称矩阵正定的各种充要条件等），这些都要在学习过程中不断总结.

限于课程的性质及学时数，对定理证明的要求大致是：简单的会证；简短的看懂；一般的了解证明思路；较长较难的证明不作要求.

五、如何提高解题能力？平时看了很多例题，为什么自己还是做题做不出来？

解题能力首先是来自对知识的理解、掌握. 如果基本概念不清，重要定理（包括性质、公式）不明，凭什么来解题呢？凭想当然来解题，必然错误百出. 因此，同学们要弄清楚每个定义的确切含义，掌握每个定理（包括性质、公式）的条件、结论，并且融会贯通. 写复习笔记可以加深对知识的理解和把握，锻炼分析和综合能力.

理论是做题的武器，习题是理论的靶场. 要提高解题能力，必须扎扎实实地做一定数量的题. 所谓“看了很多例题”，往往很肤浅，没有得其真谛，难免“眼高手低”. 看来听来总归浅，真要会做需多练！做题是不能用看题来代替的. 即使对于例题，也不能光是看，要动脑筋想，动手做，才能加深印象. 我提倡“做例题”，做例题的好处是做不下去时可以看，找到“卡壳”的所在，回到知识点，搞明白了再做，这样就提高了一步. 把例题看懂做对的基础上，还得定时定量地测试自己，不断总结经验教训，拾遗补缺. 并上升到理性认识，完成知识体系在自己头脑中的构架. 这样解题能力才能不断提高，考试时才能得心应手.

六、怎样避免或减少练习和考试中的错误？

1. 认真审题，细致推敲，弄清已知、未知及解题要求，避免出发点和落脚

点的错误.

例如，在不知 $\boldsymbol{A}$ 是方阵，或是方阵但不知可逆的情况下，不能随便写出 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 或用 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 左（右）乘等式两边；再如“用正交变换化简二次型”与“用坐标变换化简二次型”是不同的，一般不能用初等变换法或配方法解答前者.

2. 计算推理，步步有据，避免原则性错误.

例如，把矩阵方程 $\boldsymbol{XA}=3\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}$ 整理成 $(\boldsymbol{A}-3)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，或 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，或“解出”$\boldsymbol{X}=\dfrac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}}$，都犯了原则性错误.

3. 弄清特殊和一般，条件和结论，充分条件、必要条件及充要条件的区别，避免逻辑错误.

如，设 P:“$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关”;Q:“$\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示”，则有命题 $P\Rightarrow Q$. 但若由此得 $Q\Rightarrow P$ 是错误的：Q 是 P 的必要条件，但不充分；P 是 Q 的充分条件，但不必要.

又如，我们可以举反例来否定一个命题，但不能用举例来证明一个命题（那只是验证）.

4. 注意检查验算，避免不应有的错误.

例如，某 3×4 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，有的同学求出 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系竟含有 2 个或 3 个向量. 这不仅反映了基本理论没弄懂，$(n-r=4-3=1)$，基本方法没掌握（不会求矩阵的行最简形，或不会回代），也反映了不懂得或懒于检查验算；把求出的结果代入方程也能立即发现错误.

其实线性代数的许多问题，例如解线性方程组、求逆矩阵、解矩阵方程、求矩阵特征值、特征向量、相似对角化、二次型化简等，都是可以验算的. 并且检查验算应贯穿于整个解题过程中，以便发现问题及时更正. 希望同学们自觉养成检查验算的科学态度和良好习惯. 这是未来工程师、经济师、会计师等应有的素养.

5. 对于某些“客观性试题”，除了上述四点之外，还有一些逻辑方法帮我们减少错误.

例如，对于单项选择题，除了正确求解（证）的直接法之外，还可以用以下间接法：

(1)蕴含关系排除法——若选项 P 蕴含了选项 $Q(P\Rightarrow Q)$，则不选 P. 因为若 P 对，则 Q 也对.

(2)对等关系排除法——若选项 P 与选项 Q 互相蕴含 $(P\Leftrightarrow Q)$，则不选 P,Q.

(3)反例排除法——找到选项 P 的反例则不选 P.

(4)归谬排除法——若由选项 P 出发能导出错误结论，则不选 P.

愿同学们在读书和做题中获得享受，享受冥思苦想后有了一个又一个心得、解出一道又一道题的那份甘甜、那份愉悦. 那时你可以对自己说：我进步了！

上　　篇

解题依据和解题训练

第1讲
矩阵及其运算

内容要览

基 本 要 求

1. 理解矩阵及矩阵相等的概念.

2. 掌握矩阵的加法、数乘、转置、乘法和方阵的幂、方阵的多项式的定义及运算性质.

3. 了解零矩阵、单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、对称矩阵的定义及性质.

1. 矩阵

定义 $m\times n$ 个数排成 m 行 n 列的矩形表格(用括号包围),

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 $m\times n$ 矩阵. 常简记为 $(a_{ij})_{m\times n}$,(a_{ij}) 或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$,$\boldsymbol{A}$ 等.

a_{ij} 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中处于第 i 行第 j 列的位置,称为矩阵的 (i,j) 元(素).

例如,$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$是一个 2×3 矩阵,$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$是一个 2 阶矩阵.

矩阵相等 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$,如果行数相同,列数也相同(称为**同型**),并且一切对应元素相等(即 $\forall\, a_{ij}=b_{ij}$),则称为相等,记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

零矩阵 元素全为零的矩阵称为零矩阵,记为 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$或 $\boldsymbol{O}$.

负矩阵 $(-a_{ij})_{m\times n}$称为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$的负矩阵,记为 $-\boldsymbol{A}$.

向量 $n\times 1$ 矩阵称为 n 维列向量,$1\times n$ 矩阵称为 n 维行向量,统称 n 维向量. 向量的元素也称为分量.

2. 矩阵运算

加法 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 必须同型. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$,则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

数乘(数与矩阵的乘法)　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$k$ 为数,则

$$k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

由加法和数乘还可定义同型矩阵的减法

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-1)\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

加法和数乘(也包括减法)统称**线性运算**.矩阵的线性运算有以下性质:

① $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

② $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

③ $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$;

④ $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$;

⑤ $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;

⑥ $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$;

⑦ $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$;

⑧ $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$;

⑨ $k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}\Leftrightarrow k=0$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$;

⑩ 移项法则:$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$.

转置　将 $m\times n$ 矩阵的行与列互换,得到一个 $n\times m$ 矩阵,称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置,记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

转置运算有如下性质:

① $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

② $(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\pm\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

③ $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

乘法 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，则定义矩阵

$$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}，其中\ c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}.$$

$\boldsymbol{C}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的积，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$. 其性质如下：

① $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

② $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$，$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$；

③ $(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=k(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$；

④ $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_s)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_s^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}$.

注意

① 当 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数时，$\boldsymbol{AB}$ 才有意义，这时 $\boldsymbol{AB}$ 的 (i,j) 元等于 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素乘积之和.

② 一般情况下交换律不成立，即 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 不一定都有意义，都有意义时也未必相等. 因此，更明确地称 $\boldsymbol{AB}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 右乘 $\boldsymbol{B}$，或 $\boldsymbol{B}$ 左乘 $\boldsymbol{A}$.

③ 消去律一般不成立，即

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}\not\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}\ 或\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{O};$$

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}(或\ \boldsymbol{BA}=\boldsymbol{CA})，且\ \boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}\not\Rightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}.$$

方阵的正整数幂 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，k 为正整数，定义

$$\boldsymbol{A}^1=\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{AA},\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A},k=1,2,\cdots.$$

性质如下(设 k,l,n 为正整数)：

① $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$；

② $(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$；

③ 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，(这时称 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 可交换)则"乘法公式"成立，即

$$(\boldsymbol{AB})^n=\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{B}^n,$$

$$(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2\pm2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2,$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2,$$

$$(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}^2\mp\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2)=\boldsymbol{A}^3\pm\boldsymbol{B}^3,$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^n=\boldsymbol{A}^n+\mathrm{C}_n^1\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}+\mathrm{C}_n^2\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{B}^2+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}\boldsymbol{AB}^{n-1}+\mathrm{C}_n^n\boldsymbol{B}^n.$$

注意

① $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}\not\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 如 $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{O}$，但 $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}^2=\boldsymbol{O}$.

② 对于矩阵，在一般情况下($\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 不能交换)，"乘法公式"不成立.

3. 特殊矩阵

单位矩阵 $\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}=(\delta_{ij})$；(单位矩阵有时也记作 $\boldsymbol{I}$)

数量矩阵　$a\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}=(a\delta_{ij})$；

对角矩阵　$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}=(a_i\delta_{ij})$，也记为 $\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$；

对称矩阵　满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$（即 $a_{ij}=a_{ji}$）的方阵；

反对称矩阵　满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$（即 $a_{ij}=-a_{ji}$）的方阵；

上三角矩阵　$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$（$i>j$ 时，$a_{ij}=0$）；

下三角矩阵　$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$（$i<j$ 时，$a_{ij}=0$）.

方阵的多项式　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$f(x)=a_0x^s+a_1x^{s-1}+\cdots+a_{s-1}x+a_s$，定义

$$f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{A}^s+a_1\boldsymbol{A}^{s-1}+\cdots+a_{s-1}\boldsymbol{A}+a_s\boldsymbol{E}_n.$$

公式

① $\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}$；

② $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}$；

③ $(a\boldsymbol{E}_m)\boldsymbol{A}_{m\times n}=a\boldsymbol{A}_{m\times n}$；

④ $\boldsymbol{A}_{m\times n}(a\boldsymbol{E}_n)=a\boldsymbol{A}_{m\times n}$；

⑤ $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1a_{11} & \cdots & \lambda_1a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_ma_{m1} & \cdots & \lambda_ma_{mn} \end{pmatrix}$；

⑥ $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1a_{11} & \cdots & \lambda_na_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1a_{m1} & \cdots & \lambda_na_{mn} \end{pmatrix}$.

释疑解惑

问 1.1　为什么要研究矩阵及其运算？

答　像中学代数和大学高等数学中的函数概念及有关运算一样，线性代数中

的矩阵及其运算概念也是根据实际需要提出的. 大量线性问题可以借助于矩阵方便地得到描述和解决.

例如，某工厂两个车间，用 9 种原料生产 7 种产品. 设每单位第 k 号产品消耗第 j 号原料 b_{kj} 单位，$\boldsymbol{B}=(b_{kj})$ 便是一个 7×9 矩阵. 如 1 月份甲、乙两车间第 k 种产品的产量依次是 a_{1k} 和 a_{2k}($k=1,2,\cdots,7$)，则 $\boldsymbol{A}=(a_{ik})$ 便是一个 2×7 矩阵. 于是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}_{2\times 9}$ 就是一月份两个车间消耗的原料数量. 这类问题不胜枚举.

再如，应用非常广泛的线性方程组(含有 n 个未知量、m 个方程的一次联立方程式)及二次型(n 个变量的二次齐次多项式)，都可以借助于矩阵乘法表达得十分简单. 它们的求解或化简，则需要更深入的讨论，这些讨论仍然离不开矩阵.

矩阵及其运算就是描述和处理多个变量与多个变量之间线性关系问题的最重要、最有效的工具.

问 1.2　乘法交换律、消去律和乘法公式在中学就学过了，为什么现在不成立了？

答　因为运算对象不同了. 中学代数中的乘法及乘法公式的运算对象是数(实数、复数)，现在的对象是矩阵. 中学代数中有些运算规则仍然适用于新的运算对象，例如乘法的结合律；有些有变化，如分配律变成左、右分配律；有些不再适合，如乘法的交换律和消去律. 至于中学数学中的乘法公式，是依据 $ab=ba$ 等合并同类项的结果. 对于同阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 而言，$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 不一定相等，不是“同类项”，无法合并，因此“乘法公式”未必成立.

问 1.3　对于矩阵乘法，交换律、消去律及乘法公式在任何情况下都是不成立的吗？

答　不是的，在一些特殊情况下可以成立. 例如：

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵，λ 是数，则 $\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{E})=\lambda\boldsymbol{A}=(\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}$. 即数量矩阵与同阶方阵乘法可交换.

(2) 同阶对角矩阵可交换：

$$\begin{pmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1&&&\\&b_2&&\\&&\ddots&\\&&&b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_1&&&\\&a_2b_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_nb_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1&&&\\&b_2&&\\&&\ddots&\\&&&b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_n\end{pmatrix}.$$

(3) 当方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可交换($\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$)时，中学代数中的“乘法公式”，包括二项式定理，全都成立.