普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学数学系列教材（第二版）

# 大学数学 1

湖南大学数学与计量经济学院　组编
主编　黄立宏　马柏林

Mathematics

高等教育出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
大学数学系列教材（第二版）

# 大学数学

# 1

湖南大学数学与计量经济学院　组编
主　编　黄立宏　马柏林

高等教育出版社

**内容简介**

本书是《大学数学》系列教材之一，内容包括集合与函数、极限与连续、一元函数微分学理论与应用、一元函数积分学理论与应用、无穷级数、常微分方程和常差分方程等。各节后配有适量习题，书末附有常用积分表和习题答案。

本书结构严谨、内容丰富、重点突出、难点分散，概念、定理及理论叙述准确、精炼，符号使用标准、规范，例题、习题等均经过精选，具有代表性和启发性。

本书是为高等本科院校非数学类专业学生编写的“高等数学”（或“微积分”）课程教材，也适合各类需要提高数学素质和能力的人员使用。

**图书在版编目(CIP)数据**

大学数学.1/黄立宏，马柏林主编；湖南大学数学与计量经济学院组编.—2版.—北京：高等教育出版社，2008.6

（大学数学系列教材）

ISBN 978-7-04-023899-0

Ⅰ.大… Ⅱ.①黄…②马…③湖… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第059178号

**策划编辑** 王 强 **责任编辑** 李 陶 **封面设计** 刘晓翔 **责任绘图** 吴文信
**版式设计** 王 莹 **责任校对** 王效珍 **责任印制** 陈伟光

---

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 购书热线 | 010-58581118 |
| 社　　址 | 北京市西城区德外大街4号 | 免费咨询 | 800-810-0598 |
| 邮政编码 | 100120 | 网　　址 | http://www.hep.edu.cn |
| 总　　机 | 010-58581000 | | http://www.hep.com.cn |
| | | 网上订购 | http://www.landraco.com |
| 经　　销 | 蓝色畅想图书发行有限公司 | | http://www.landraco.com.cn |
| 印　　刷 | 北京市白帆印务有限公司 | 畅想教育 | http://www.widedu.com |
| | | 版　　次 | 2002年8月第1版 |
| | | | 2008年6月第2版 |
| 开　　本 | 787×960　1/16 | 印　　次 | 2008年6月第1次印刷 |
| 印　　张 | 28.75 | 定　　价 | 35.60元 |
| 字　　数 | 540 000 | | |

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。



**物料号　23899-00**

# 大学数学系列教材
## （第二版）

**湖南大学数学与计量经济学院组编**



《大学数学》(1)　主编　黄立宏　马柏林

《大学数学》(2)　主编　曹定华　孟益民

《大学数学》(3)　主编　曾金平　彭亚新

《大学数学》(4)　主编　罗　汉　杨湘豫

《大学数学》(5)　主编　李董辉　蒋月评

# 前　言

湖南大学数学与计量经济学院于2001年组织编写了《大学数学》(1～5)系列教材，由刘楚中任总主编，黄立宏任副总主编，其中，《大学数学》(1)由黄立宏和戴斌祥主编，刘楚中、杨湘豫、李亚琼、邓爱珍、孟益民、朱惠延参加编写；《大学数学》(2)由曾金平和李晓沛主编，彭亚新、邓爱珍、蒋月评参加编写；《大学数学》(3)由刘楚中和曹定华主编，杨冬莲、李建平、刘开宇、彭亚新、历亚、朱郁森参加编写；《大学数学》(4)由杨湘豫和邓爱珍主编，喻胜华、谭德俊、彭国强、晏木荣、刘先霞、胡春华参加编写；《大学数学》(5)由李董辉和曾金平主编，马传秀参加编写。该系列教材被列为"普通高等教育'十五'国家级规划教材"，由高等教育出版社于2002年和2003年相继出版。教材出版后已历经湖南大学各非数学专业多届本科生使用，国内许多高校也将其选作一些本科专业的教材，得到师生的好评，同时我们也收集到了许多宝贵意见和修改建议。为了进一步提高教材质量，打造精品教材，学院决定组织人员对该系列教材进行修订，并于2005年底由黄立宏教授牵头将教材的修订申报了"普通高等教育'十一五'国家级规划教材"，得到顺利通过。现出版的此套教材就是在原《大学数学》(1～5)系列教材的基础上修订而成的。由于参加原系列教材编写的部分教师相继退休或调离，在此次修订工作中，我们新成立了编写委员会，委员会由黄立宏任主任，罗汉任副主任，修订版各分册的主编为成员。

本分册是在原系列教材之一的《大学数学》(1)的基础上修订而成的，由黄立宏和马柏林任主编，内容包括集合与函数、极限与连续、一元函数微分学理论与应用、一元函数积分学理论与应用、无穷级数、常微分方程和常差分方程等。修订版在原教材的基础上对教材内容的取舍和叙述进行了进一步锤炼，调整了部分内容顺序，增加和改写了部分内容，使之更加清晰、易懂、便于教学，更切合理工科各非数学专业的实际要求，也删改和补充了部分例题和习题，修改了个别错误和不当之处。

本教材中难免会有不妥之处和有待进一步改进的地方，希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见。

本系列教材的编写和出版得到湖南大学数学与计量经济学院各位教师、湖南大学教务处、高等教育出版社王强同志的大力支持，在此表示衷心感谢。

湖南大学数学与计量经济学院

2008年1月

# 目　　录


第一章　集合与函数 …… 1
第一节　集合与映射 …… 1
一、集合及其运算 …… 1
二、映射 …… 5
习题 1－1 …… 9
第二节　函数的概念与基本性质 …… 9
一、函数的概念 …… 9
二、函数的基本性质 …… 13
三、函数的代数运算 …… 15
四、反函数 …… 16
习题 1－2 …… 17
第三节　初等函数 …… 19
一、基本初等函数 …… 19
二、初等函数 …… 22
习题 1－3 …… 26
第二章　极限 …… 28
第一节　数列的极限 …… 28
一、数列 …… 28
二、数列极限的定义 …… 29
三、数列极限的性质 …… 33
四、数列的收敛准则 …… 37
习题 2－1 …… 39
第二节　函数的极限 …… 40
一、$x\to\infty$ 时，函数的极限 …… 40
二、$x\to x_0$ 时，函数的极限 …… 42
三、函数极限的性质 …… 45
四、$x\to x_0$ 时，函数的左、右极限 …… 47
习题 2－2 …… 48
第三节　无穷小量与无穷大量 …… 49
一、无穷小量 …… 49
二、无穷大量 …… 52
习题 2－3 …… 55
第四节　极限的运算 …… 55

一、极限的运算法则 …… 55
二、极限运算举例 …… 57
习题 2－4 …… 61
第五节　极限存在定理 …… 62
一、夹逼定理 …… 62
二、函数极限与数列极限的关系 …… 63
三、柯西收敛准则 …… 64
习题 2－5 …… 65
第六节　两个重要极限 …… 65
一、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ …… 65
二、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ …… 68
习题 2－6 …… 71
第七节　无穷小量的比较 …… 72
一、无穷小量比较的概念 …… 72
二、等价无穷小量的性质与应用 …… 73
习题 2－7 …… 75
**第三章　函数的连续性** …… 76
第一节　函数的连续与间断 …… 76
一、函数的连续性 …… 76
二、函数的间断点 …… 79
习题 3－1 …… 81
第二节　连续函数的性质 …… 82
一、连续函数的基本性质 …… 82
二、初等函数的连续性 …… 85
三、闭区间上连续函数的性质 …… 85
四、函数的一致连续性 …… 90
习题 3－2 …… 91
**第四章　函数的导数和微分** …… 93
第一节　导数的概念 …… 93
一、导数的引入 …… 93
二、导数的定义 …… 94
三、导数的几何意义 …… 99
四、可导与连续的关系 …… 100
习题 4－1 …… 101
第二节　求导法则 …… 103
一、函数四则运算的求导法则 …… 103
二、复合函数的求导法则 …… 105

三、反函数的求导法则 …… 107
四、基本导数公式 …… 108
五、隐函数的求导法则 …… 110
六、取对数求导法则 …… 110
七、由参数方程确定的函数的求导法则 …… 111
习题 4-2 …… 113
第三节　高阶导数 …… 114
习题 4-3 …… 118
第四节　微分及其运算 …… 119
一、微分的定义 …… 119
二、微分与导数的关系 …… 120
三、微分的几何意义 …… 121
四、复合函数的微分及基本微分公式 …… 122
五、高阶微分 …… 123
习题 4-4 …… 124
第五节　微分中值定理 …… 125
一、罗尔中值定理 …… 126
二、拉格朗日中值定理 …… 128
三、柯西中值定理 …… 131
四、泰勒中值定理 …… 132
习题 4-5 …… 138
第六节　洛必达法则 …… 140
一、$\frac{0}{0}$型不定式的洛必达法则 …… 140
二、$\frac{\infty}{\infty}$型不定式的洛必达法则 …… 142
三、其他不定式的洛必达法则 …… 144
习题 4-6 …… 146
**第五章　导数与微分的应用举例** …… 148
第一节　函数的单调性与凸性 …… 148
一、函数的单调性 …… 148
二、函数的凸性 …… 150
习题 5-1 …… 154
第二节　函数的极值和最值 …… 155
一、函数的极值 …… 155
二、拐点与导函数极值点的关系 …… 158
三、最优化问题 …… 159
习题 5-2 …… 162
第三节　函数图形的描绘 …… 164

一、曲线的渐近线 …… 164
二、函数图形的描绘 …… 165
习题 5 - 3 …… 169
第四节 相关变化率、曲率 …… 169
一、相关变化率 …… 169
二、曲率 …… 170
习题 5 - 4 …… 175
第五节 在经济学中的应用 …… 175
一、边际函数 …… 175
二、函数的弹性 …… 176
三、增长率 …… 177
习题 5 - 5 …… 178
**第六章 函数的积分** …… 179
第一节 定积分的概念 …… 179
一、曲边梯形的面积 …… 179
二、定积分的定义 …… 180
三、定积分的性质 …… 183
习题 6 - 1 …… 187
第二节 定积分的基本定理 …… 188
一、原函数与积分上限函数 …… 188
二、微积分基本公式 …… 191
习题 6 - 2 …… 192
第三节 不定积分 …… 193
一、不定积分的概念和性质 …… 193
二、求不定积分的方法 …… 197
三、有理函数的不定积分 …… 209
四、三角函数有理式的不定积分 …… 213
五、积分表的使用 …… 216
习题 6 - 3 …… 217
第四节 定积分的计算 …… 218
一、定积分的换元法 …… 219
二、定积分的分部积分法 …… 222
习题 6 - 4 …… 225
第五节 反常积分 …… 226
一、无穷区间上的积分 …… 226
二、暇积分 …… 230
三、Γ 函数 …… 234
*四、反常积分的收敛原理 …… 236

五、反常积分的柯西主值 …… 237
习题 6－5 …… 238
第七章　定积分的应用举例 …… 240
第一节　建立定积分数学模型的微元法 …… 240
第二节　平面图形的面积 …… 241
一、直角坐标情形 …… 241
二、极坐标情形 …… 244
习题 7－2 …… 247
第三节　平面曲线的弧长 …… 248
一、弧长的概念 …… 248
二、弧长的计算 …… 249
三、弧微分的几何意义 …… 252
习题 7－3 …… 253
第四节　立体的体积和旋转体的侧面积 …… 253
一、平行截面面积为已知的立体体积 …… 253
二、旋转体的体积 …… 255
三、旋转体的侧面积 …… 257
习题 7－4 …… 258
第五节　定积分在物理及其他方面的应用 …… 259
一、变力做功 …… 259
二、液体的静压力 …… 261
三、质量分布不均匀的线状物体的质量 …… 263
四、求极限 …… 263
五、连续函数的平均值 …… 265
习题 7－5 …… 266
第八章　无穷级数 …… 267
第一节　常数项级数的概念和性质 …… 267
一、无穷级数的概念 …… 267
二、级数收敛的必要条件 …… 269
三、级数的基本性质 …… 270
习题 8－1 …… 272
第二节　常数项级数敛散性判别法 …… 273
一、正项级数敛散性判别法 …… 273
二、交错级数及其敛散性判别法 …… 278
三、任意项级数及其敛散性判别法 …… 280
习题 8－2 …… 282
第三节　函数项级数 …… 283
一、一般函数项级数 …… 283

二、幂级数 …… 285
习题 8－3 …… 293
第四节 函数展开为幂级数 …… 294
一、函数展开为幂级数 …… 294
二、函数幂级数展开式的应用举例 …… 300
习题 8－4 …… 303
第五节 函数展开为傅里叶级数 …… 304
一、周期函数的傅里叶级数 …… 304
二、非周期函数的傅里叶级数 …… 312
习题 8－5 …… 317
**第九章 常微分方程** …… 319
第一节 微分方程的基本概念 …… 319
习题 9－1 …… 323
第二节 一阶微分方程 …… 323
一、变量可分离方程 …… 323
二、齐次方程 …… 325
三、一阶线性微分方程 …… 328
习题 9－2 …… 332
第三节 几类可降阶的高阶微分方程 …… 333
一、$y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程 …… 334
二、$y''=f(x,y')$ 型的微分方程 …… 335
三、$y''=f(y,y')$ 型的微分方程 …… 336
四、可利用参变量降阶的方程 …… 338
习题 9－3 …… 339
第四节 线性微分方程解的结构与幂级数解法 …… 340
一、线性微分方程解的结构 …… 340
二、微分方程的幂级数解法 …… 344
习题 9－4 …… 348
第五节 高阶常系数线性微分方程 …… 349
一、特征方程与特征根 …… 349
二、二阶常系数齐线性微分方程 …… 349
三、二阶常系数非齐线性微分方程 …… 352
四、$n$ 阶常系数齐线性微分方程 …… 356
五、$n$ 阶常系数非齐线性微分方程 …… 357
习题 9－5 …… 359
第六节 欧拉方程 …… 360
习题 9－6 …… 363
第七节 常系数线性微分方程组求解举例 …… 363

习题 9－7 …… 367
**第十章　常差分方程** …… 369
第一节　差分与差分运算 …… 369
一、差分的基本概念 …… 369
二、差分运算的性质 …… 370
三、几个基本定理 …… 374
习题 10－1 …… 378
第二节　常差分方程的基本概念与差分方程模型举例 …… 379
一、常差分方程的基本概念 …… 379
二、差分方程模型举例 …… 380
习题 10－2 …… 384
第三节　一阶线性差分方程 …… 384
一、一阶齐线性差分方程 …… 384
二、一阶非齐线性差分方程 …… 387
习题 10－3 …… 392
第四节　高阶线性差分方程 …… 393
一、线性差分方程解的结构 …… 393
二、常系数齐线性差分方程 …… 396
三、常系数非齐线性差分方程 …… 399
习题 10－4 …… 404
第五节　差分方程组 …… 405
一、用差分方程组表示的数学模型举例 …… 405
二、常系数线性差分方程组的求解举例 …… 407
习题 10－5 …… 408
**附录一　积分表** …… 410
一、含有 $ax+b$ 的积分($a,b$ 为常数，且 $a\neq0$) …… 410
二、含有 $\sqrt{ax+b}$ 的积分($a,b$ 为常数，且 $a\neq0$) …… 410
三、含有 $x^2\pm a^2$ 的积分($a$ 为常数，且 $a\neq0$) …… 411
四、含有 $ax^2+b$ 的积分($a,b$ 为常数，且 $a>0$) …… 411
五、含有 $ax^2+bx+c$ 的积分($a,b,c$ 为常数，且 $a>0$) …… 412
六、含有 $\sqrt{x^2+a^2}$ 的积分($a$ 为常数，且 $a>0$) …… 412
七、含有 $\sqrt{x^2-a^2}$ 的积分($a$ 为常数，且 $a>0$) …… 413
八、含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ 的积分($a$ 为常数，且 $a>0$) …… 414
九、含有 $\sqrt{\pm ax^2+bx+c}$ 的积分($a,b,c$ 为常数，且 $a>0$) …… 414
十、含有 $\sqrt{\pm\frac{x-a}{x-b}}$ 或 $\sqrt{(x-a)(b-x)}$ 的积分($a,b$ 为常数，且 $a\neq b$) …… 415
十一、含有三角函数的积分 …… 415

十二、含有反三角函数的积分 …… 417
十三、含有指数函数的积分 …… 418
十四、含有对数函数的积分 …… 418
十五、含有双曲函数的积分 …… 419
十六、定积分 …… 419
**附录二 习题答案** …… 420

# 第一章　集合与函数

集合与函数的概念在中学数学里已有介绍,但由于集合是集合论中的基本概念,集合论是现代数学的基础,而函数是高等数学中研究和讨论的主要对象,因此,在本教材中,我们从介绍集合与函数的概念开始.

## 第一节　集合与映射

### 一、集合及其运算

**1. 集合及其表示法**

集合是一个很原始的概念.通常,所谓**集合**(简称集)是指具有某种确定性质的对象的全体.组成集合的各个对象称为该集合的**元素**.

习惯上,用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合,用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素.用 $a\in A$ 表示 $a$ 是集 $A$ 中的元素,读作"$a$ 属于 $A$";用 $a\notin A$(或 $a\overline{\in} A$)表示 $a$ 不是集 $A$ 中的元素,读作"$a$ 不属于 $A$".含有限个元素的集合称为**有限集**;不含任何元素的集合称为**空集**,记作 $\varnothing$;既不是有限集又不是空集的集合称为**无限集**.

集合的表示方法有两种:一种是列举法,即把它的所有元素一一列出来,写在一个花括号内.例如,方程 $x^2-1=0$ 的解集可表示为 $S=\{-1,1\}$.另一种方法是描述法,即指明集合元素所具有的确定性质.将具有性质 $P(x)$ 的对象 $x$ 所构成的集合表示为 $A=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P(x)\}$.例如,方程 $x^2-1=0$ 的解集也可表示为 $S=\{x\mid x^2-1=0\}$.

今后,如无特别声明,我们用 $\mathbf{N}$ 表示非负整数(自然数)集、$\mathbf{Z}_+$ 或 $\mathbf{N}_+$ 表示正整数集、$\mathbf{Z}$ 表示整数集、$\mathbf{Q}$ 表示有理数集、$\mathbf{R}$ 表示实数集、$\mathbf{C}$ 表示复数集.

对一非空实数集 $A$,若存在常数 $M>0$,使对 $A$ 中任何元素 $x$ 均有 $|x|\leqslant M$,则称 $A$ 为**有界集**;若对 $A$ 中任何元素 $x$,有 $x\leqslant M$,则称 $A$ 为**有上界**;若对 $A$ 中任何元素 $x$ 有 $x\geqslant -M$,则称 $A$ **有下界**.

设 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $a<b$,数集 $\{x\mid a<x<b,x\in\mathbf{R}\}$ 称为**开区间**,记为 $(a,b)$;数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$ 称为**闭区间**,记为 $[a,b]$;类似地记 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b,x\in\mathbf{R}\}$,$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$;$a$ 和 $b$ 分别称为区间的**左端点**和**右端点**.

实数集亦可记为区间 $(-\infty,+\infty)$,而 $(a,+\infty)=\{x\mid x>a,x\in\mathbf{R}\}$;

$(-\infty, a] = \{x \mid x \leqslant a, x \in \mathbf{R}\}$ 等.

由于实数可以用数轴上的点来表示,所以我们常将实数 $x$ 也称为点 $x$. 在今后的讨论中,我们常常要考虑一个点附近的情况. 例如研究函数不仅仅是讨论它在一点的取值,更主要的是要研究它在这一点附近的变化. 一个点的附近就是"邻域"的概念.

设 $x_0 \in \mathbf{R}$,对 $\delta \in (0, +\infty)$,数集 $\{x \mid |x - x_0| < \delta, x \in \mathbf{R}\}$ 称为点 $x_0$ 的 **$\delta$ 邻域**,记作 $U(x_0, \delta)$,即

$$U(x_0,\delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta, x \in \mathbf{R}\},$$

点 $x_0$ 称为这邻域的**中心**,$\delta$ 称为这邻域的**半径**.

若只考虑 $x_0$ 附近但不包括点 $x_0$ 自身,即 $\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta, x \in \mathbf{R}\}$,称之为点 $x_0$ 的**去心 $\delta$ 邻域**,记为 $\hat{U}(x_0, \delta)$,即

$$\hat{U}(x_0,\delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta, x \in \mathbf{R}\}.$$

当不强调邻域的半径时,常将 $x_0$ 点的邻域与去心邻域分别简记为 $U(x_0)$ 和 $\hat{U}(x_0)$.

另外,$\{x \mid x_0 - \delta < x \leqslant x_0, x \in \mathbf{R}\}$ 称为 $x_0$ 的**左邻域**,记为 $U(x_0^-, \delta)$;$\{x \mid x_0 \leqslant x < x_0 + \delta, x \in \mathbf{R}\}$ 称为 $x_0$ 的**右邻域**,记为 $U(x_0^+, \delta)$. 不强调邻域的半径时,常将左、右邻域分别简记为 $U(x_0^-)$ 和 $U(x_0^+)$. 相应的也有去心左、右邻域的概念.

**2. 集合的关系及运算**

为了表述方便,我们先介绍几个符号.

符号"$\forall$"表示"对于任意的"、"对于所有的"或"对于每一个";符号"$\exists$"表示"存在". 例如:"对于任意的实数 $a$,都存在实数 $b$,使得 $a - b = 1$"可以写成"$\forall a \in \mathbf{R}$, $\exists b \in \mathbf{R}$,使得 $a - b = 1$".

符号"$\Longrightarrow$"和"$\Longleftrightarrow$"表示蕴涵关系. 设 $S_1$ 和 $S_2$ 是两个陈述句,它们可以指命题,也可以指条件,$S_1 \Longrightarrow S_2$ 表示"若 $S_1$ 成立,则 $S_2$ 也成立";$S_1 \Longleftrightarrow S_2$ 表示"当且仅当 $S_1$ 成立时 $S_2$ 成立". 例如:"若 $a \neq 0$,则 $a^2 > 0$"可记为"$a \neq 0 \Longrightarrow a^2 > 0$";"$a^2 = 0$ 当且仅当 $a = 0$"可记为"$a^2 = 0 \Longleftrightarrow a = 0$".

**定义 1** 设 $A$ 和 $B$ 是两个集合,若 $\forall x \in A$,有 $x \in B$,则称 $A$ 是 $B$ 的**子集**,记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$,亦称 $A$ 包含于 $B$,或 $B$ 包含 $A$. 若 $A$ 是 $B$ 的非空子集,且 $\exists y \in B$ 但 $y \notin A$,则称 $A$ 是 $B$ 的**真子集**,也称 $B$ 真包含 $A$.

规定:$\varnothing$ 是任何集之子集.

**定义 2** 如果 $A \subseteq B$ 和 $B \subseteq A$ 同时成立,则称两集合 $A$ 与 $B$ 相等,记为 $A = B$.

**定义 3** 在讨论的层次和范围中的一切对象的集合称为**全集**,记为 $X$. 在此层次和范围中,每一集合 $A$ 都满足 $\varnothing \subseteq A \subseteq X$.

**定义 4**　（余集）设 $X$ 为全集，$A\subseteq X$. 记 $A^C=\{x\mid x\in X$ 且 $x\notin A\}$，则称 $A^C$ 为 $A$ 的**余（或补）集**，记为 $A^C$. ①

显然：$(A^C)^C=A$.

**定义 5**　集合间的运算：并"$\cup$"、交"$\cap$"、差"$-$"分别定义如下：

$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$，

$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$，

$A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$.

由定义 4、定义 5，知

$$A-B=A\cap B^C.$$

两个集合的并集、交集、差集和余集可以用图形直观表示，见图 1－1 中的阴影部分.

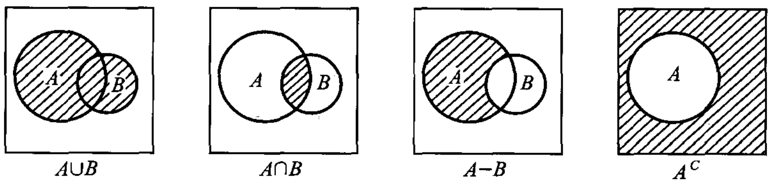


图 1－1

**定义 6**　（直积）给定非空集 $A,B$，称 $A,B$ 的元素所构成的有序对的集合 $\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$ 为 $A$ 与 $B$ 的**直积**，亦称笛卡儿（Descartes）积，记为 $A\times B$.

例如，$M=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$，$N=\{y\mid -2\leqslant y\leqslant -1\}$，则 $M\times N$ 和 $N\times M$ 分别为图 1－2 中坐标平面上所示的矩形.

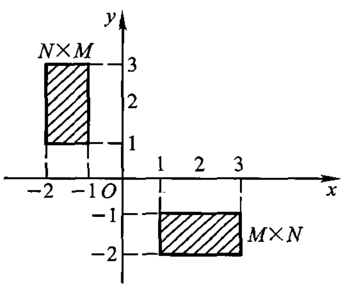


图 1－2

① 中华人民共和国国家标准（GB）"量和单位"中，用 $\complement_X A$ 表示 $A$ 的余集.

特别地,当 $B=A$ 时,$A\times A$(常记为 $A^2$)是 $A$ 中一切元素所组成的有序对的集. $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 是坐标平面上全部点的集.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n$ 个非空集,则定义

$$\begin{aligned}&A_1\times A_2\times\cdots\times A_n\\&=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1\in A_1,x_2\in A_2,\cdots,x_n\in A_n\}.\end{aligned}$$

特别地,记

$$A^n=\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n}.$$

集合的运算满足下面的基本法则:

**定理 1** 设 $A,B,C$ 为三个任意集合,则下列法则成立:

1) 交换律 $A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$;

2) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,
$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

3) 分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,
$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$,
$(A-B)\cap C=A\cap C-B\cap C$;

4) 幂等律 $A\cup A=A,A\cap A=A$;

5) 吸收律 $A\cup\varnothing=A,A\cap\varnothing=\varnothing$;
若 $A\subseteq B$,则 $A\cup B=B,A\cap B=A$,
$A\cup(A\cap B)=A$,且 $A\cap(A\cup B)=A$.

**证** 仅以分配律中第一式为例说明集合等式的证明方法,其余等式读者可以利用类似的方法证明.

设 $x\in(A\cup B)\cap C\Longrightarrow x\in A\cup B$ 且 $x\in C\Longrightarrow x\in A$ 且 $x\in C$ 或 $x\in B$ 且 $x\in C$ $\Longrightarrow x\in A\cap C$ 或 $x\in B\cap C\Longrightarrow x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)\Longrightarrow(A\cup B)\cap C\subset(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

类似可证相反包含关系:$(A\cap C)\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap C$. 由集合相等定义即知等式成立.

**定理 2**(德摩根(De Morgan)律) 设 $X$ 为全集,$A$、$B$ 是它的两个子集,则

1) $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$;

2) $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

该定理通常称为**对偶原理**.

**证** 1) 设 $x\in(A\cup B)^C\Longrightarrow x\notin(A\cup B)\Longrightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B\Longrightarrow x\in A^C$ 且 $x\in B^C\Longrightarrow x\in A^C\cap B^C\Longrightarrow(A\cup B)^C\subseteq A^C\cap B^C$.

显然上式的推理可反向进行,因此相反的包含关系也成立,从而(1)中的等式成立.