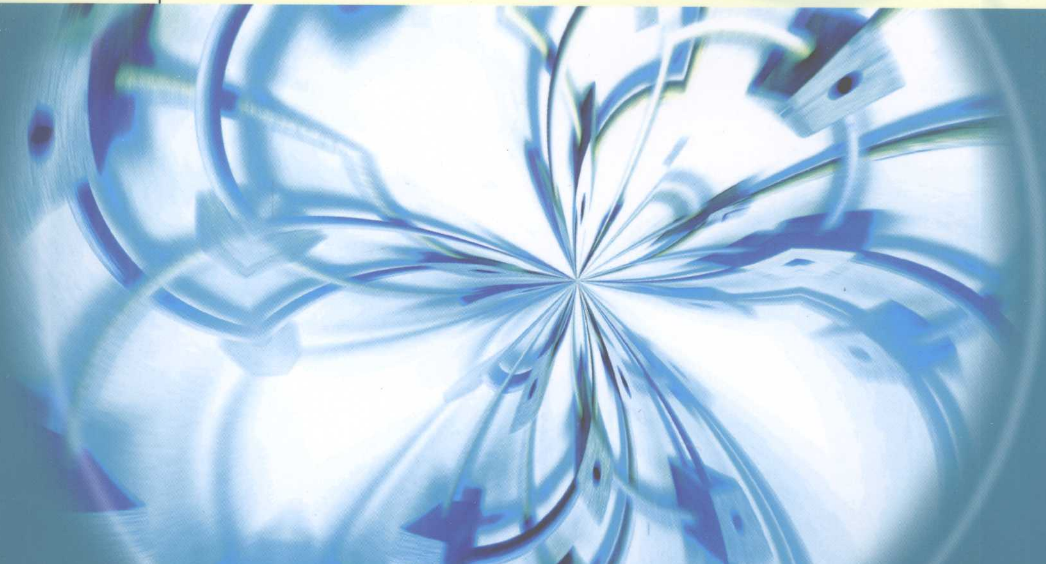
高等学校理工科数学类规划教材

随机过程

STOCHASTIC PROCESS

王丽燕　沈玉波　刘　洪　编著



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

随机过程

STOCHASTIC PROCESS

■ 高等学校理工科数学类规划教材

随机过程

STOCHASTIC PROCESS

王丽燕　沈玉波　刘　洪　编著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

随机过程/王丽燕,沈玉波,刘洪编著.—大连:大连理工大学出版社,2008.9

ISBN 978-7-5611-4401-5

Ⅰ.随… Ⅱ.①王…②沈…③刘… Ⅲ.随机过程—高等学校-教材 Ⅳ.O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 127528 号

大连理工大学出版社出版

大连市软件园路 80 号 邮政编码 116023

发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466

E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn

大连天正华延彩色印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:170mm×240mm 印张:12 字数:195 千字

2008 年 9 月第 1 版 2008 年 9 月第 1 次印刷

责任编辑:梁 锋 王 伟 责任校对:婕 琳

封面设计:宋 蕾

ISBN 978-7-5611-4401-5 定价:24.00 元

前言

随机过程是对一连串随机事件间动态关系的定量描述,是研究自然科学、工程科学、社会科学各领域中随机现象的有力工具。它广泛应用于自动控制、电子工程、通信科学、物理学、经济学、管理学、金融学、天文学、可靠性理论以及生物工程等各学科、各领域。

本书是作者多年从事随机过程教学的积累。它是为研究生公共基础课所编写的教材,可以作为大学理工科本科生专业基础课教材,也可作为需要随机过程知识的读者的自学读本。

学习本书要有微积分和初等概率论的基础,兼顾内容阐述的需要和学生的实际接受能力,书中用到了母函数、生成函数、复变函数以及微分方程求解等数学工具。如果读者对某些数学工具不熟悉,可以跳过相应的数学证明推理过程,直接阅读有关结论,这并不影响对本课程的学习。

为学生学习方便,在本书的第 1 章复习性地简要介绍了本教材需要的概率论的基础知识。第 2 章介绍随机过程的基本概念、随机过程的有限维分布、随机过程的数字特征等,还给出了常用的几个随机过程的例子。在第 3 章,首先介绍了 Levy 过程,作为 Levy 过程的特例介绍了 Poisson 过程、Wiener 过程等。在第 4 章,介绍了二阶矩过程的概念、二阶矩过程的代数性质和分析性质、平稳随机过程及其谱表示理论、遍历性理论。本章还介绍了重要的二阶矩过程——Gauss 过程以及简单的随机微分方程理论等。第 5 章介绍 Markov 过程,包括离散时间的 Markov 链和连续时间的 Markov 链以及嵌入链等。第 6 章介绍随机过程通过线性和非线性系统。

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第7章介绍时间序列分析。书中每一章的正文之后都配备了习题供读者练习，旨在帮助读者进一步理解本章的基本内容。

本书的编写得到了大连理工大学数学系、大连大学信息工程学院数学系、大连理工大学出版社的热情帮助和支持，在此表示衷心的感谢！

我们本着少学时、起点低、由浅入深、便于学习的要求编写了本教材。限于编者水平，缺点、错误在所难免，恳请广大读者对本书提出建议和意见，对不妥之处批评指正。

编者

2008年7月

目 录

第 1 章 预备知识

概率论是本书的基本理论之一. 我们认为读者已熟知概率论的基本知识,所以本章我们仅介绍本书所必须的概率的基本定义和结果.

1.1 概率空间

1.1.1 随机试验与样本空间

【例 1】 抛一枚硬币,观察正反面出现的情况.

【例 2】 掷一颗骰子,观察出现的点数.

这样的试验具有以下三个特点:

(1) 试验在相同的条件下可以重复地进行;

(2) 每次试验结果具有多种可能性,并且在试验之前可以明确知道所有的可能结果;

(3) 在试验之前不能确定哪一个结果会出现.

在概率论中,我们把具有上述三个特点的试验称为**随机试验**,简称为**试验**,记为 E. 将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为试验 E 的**样本空间**,记为 Ω. 样本空间 Ω 的元素,即试验 E 的每一个结果,称为**样本点**,记为 e.

一般地,称试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的**随机事件**,简称为**事件**,记为 A,B,C 等. 特别地,称样本空间 Ω 为必然事件,空集 $\varnothing$ 为不可能事件,只含一个样本点的单点集为**基本事件**.

由于事件是集合,所以集合的运算(并、交、差、上极限、下极限、极限等)都适用于事件.

1.1.2 概率与概率空间

在实际问题中,我们不是对所有的事件都感兴趣,而是关心某些事

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

件及其发生的可能性大小.

定义 1.1.1 设试验 E 的样本空间为 Ω，$\mathscr{F}$ 是由 Ω 的某些子集组成的集合族，如果

(1) $\Omega \in \mathscr{F}$；

(2) 若 $A \in \mathscr{F}$，则 $\overline{A} = \Omega \backslash A \in \mathscr{F}$；

(3) 若 $A_n \in \mathscr{F}(n = 1,2,\cdots)$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$，

则称 $\mathscr{F}$ 为**随机事件域**或 **σ - 代数**. $\mathscr{F}$ 中的任意元素 A 称为随机事件，样本空间 Ω 和随机事件域 $\mathscr{F}$ 组成的二元体 $(\Omega,\mathscr{F})$ 称为**可测空间**.

由定义易知：

(4) $\varnothing \in \mathscr{F}$；

(5) 若 $A,B \in \mathscr{F}$，则 $A \backslash B \in \mathscr{F}$；

(6) 若 $A_i \in \mathscr{F}(i = 1,2,\cdots)$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$，$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$，$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$.

定义 1.1.2 设 $(\Omega,\mathscr{F})$ 是可测空间，$P(\cdot)$ 是定义在 $\mathscr{F}$ 上的实值函数，如果

(1) 对任意的 $A \in \mathscr{F}$，有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

(2) $P(\Omega) = 1$；

(3) $A_i \in \mathscr{F}(i = 1,2,\cdots)$，$A_iA_j = \varnothing(i \neq j = 1,2,\cdots)$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 P 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的**概率测度**，简称为概率. 对任意的 $A \in \mathscr{F}$，$P(A)$ 称为随机事件 A 的概率.

由定义易知：

(4) $P(\varnothing) = 0$；

(5) 若 $A,B \in \mathscr{F}$，$A \subset B$，则 $P(B\backslash A) = P(B) - P(A)$，且 $P(B) \geqslant P(A)$，即概率具有单调性；

(6) 若 $A_n \in \mathscr{F}(n = 1,2,\cdots)$，则

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \begin{cases} P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right), & \text{若 } A_1 \subset A_2 \subset \cdots \\ P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right), & \text{若 } A_1 \supset A_2 \supset \cdots \end{cases}$$

定义 1.1.3 概率空间 Ω、随机事件域 $\mathscr{F}$ 和概率 P 组成的三元体 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 称为**概率空间**.

定义 1.1.4 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是概率空间，$\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$，如果对任意的 $A_1,A_2,\cdots,A_n \in \mathscr{C}(n = 1,2,\cdots)$，有

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

则称 $\mathscr{C}$ 为独立事件族.

1.2 随机变量及其分布

概率论的主要研究对象是随机变量,随机变量的统计规律用分布函数来描述.

1.2.1 一维随机变量及其分布函数

定义 1.2.1 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间,$X = X(e)$是定义在Ω上的一个单值实值函数.如果对任意实数x,$\{e:X(e)\leqslant x\}\in\mathscr{F}$,则称$X(e)$是$\mathscr{F}$上的随机变量,记为$X,Y,Z,\xi,\eta$等.称

$$F(x) = P\{X(e)\leqslant x\}, \quad -\infty < x < +\infty$$

为随机变量 X 的分布函数.

分布函数$F(x)$具有以下性质:

(1)$0\leqslant F(x)\leqslant 1$,且

$$F(-\infty) \triangleq \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$$

$$F(+\infty) \triangleq \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$$

(2)$F(x)$是单调非降函数,即对任意的$x_1 < x_2$,有

$$F(x_1) \leqslant F(x_2)$$

(3)$F(x)$是右连续的,即对任意的x,$F(x+0) = F(x)$.

可以证明,定义在实数域$\mathbf{R}$上的实值函数$F(x)$,若具有以下三个性质,则必存在一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$及其上的随机变量X,其分布函数为$F(x)$.

若离散型随机变量 X 的概率分布律为

$$p_k = P\{X = x_k\}, \quad k = 1,2,\cdots$$

则其分布函数为

$$F(x) = \sum_{x_k\leqslant x} p_k$$

若连续型随机变量X的概率密度函数为$f(x)$,则其分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

1.2.2 n 维随机变量及其分布

定义 1.2.2 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间,$X_1(e),X_2(e),\cdots,X_n(e)$是定义在$\Omega$上的$n$个随机变量,则称$\mathbf{X}=\mathbf{X}(e)=(X_1(e),X_2(e),\cdots,X_n(e))$为 ***n* 维随机变量或 *n* 维随机向量**.称

$$\begin{aligned}F(\boldsymbol{x})&=F(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\&=P\{X_1(e)\leqslant x_1,X_2(e)\leqslant x_2,\cdots,X_n(e)\leqslant x_n\}\end{aligned}$$

为$\mathbf{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合分布函数.其中$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'\in\mathbf{R}^n$.

n维联合分布函数$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$具有以下性质:

(1)$0\leqslant F(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant 1$,且

$$\lim_{x_i\to-\infty}F(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)=0,i=1,2,\cdots,n$$

$$\lim_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\to(+\infty,+\infty,\cdots,+\infty)}F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1$$

(2)对于每一个$x_i(i=1,2,\cdots,n)$,$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是单调非降函数;

(3)对于每一个$x_i(i=1,2,\cdots,n)$,$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是右连续的;

可以证明,对于定义在$\mathbf{R}^n$上具有上述性质的实函数$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,必存在一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$及其上的n维随机变量$\mathbf{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,其联合分布函数为$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

若n维离散型随机变量$\mathbf{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合分布律为

$$p_{i_1i_2\cdots i_n}=P\{X_1=x_{i_1},X_2=x_{i_2},\cdots,X_n=x_{i_n}\}$$

则$\mathbf{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合分布函数为

$$F(\boldsymbol{x})=F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{x_{i_j}\leqslant x_i}p_{i_1i_2\cdots i_n}\quad i,j=1,2,\cdots,n$$

若n维连续型随机变量$\mathbf{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合概率密度函数为$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,则$\mathbf{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合分布函数为

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}f(t_1,t_2,\cdots,t_n)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n$$

定义 1.2.3 设n维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,如果对任意的$(x_1,x_2,\cdots,x_n)'\in\mathbf{R}^n$,有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F_{x_i}(x_i)$$

则称n维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$相互独立.

若 n 维随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$相互独立，则对其中任意 $k(2 \leqslant k \leqslant n)$ 个随机变量 $X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_k}$ 也相互独立.

n 维离散型随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$相互独立的充要条件是

$$P\{X_1 = x_{i_1}, X_2 = x_{i_2}, \cdots, X_n = x_{i_n}\} = \prod_{j=1}^{n} P\{X_j = x_{i_j}\}$$

对任意的 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 都成立，其中 x_{i_j} 是 X_i 的任意可能值，$i = 1, 2, \cdots, n$.

n 维连续型随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$相互独立的充要条件是

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$$

其中 $f_{X_i}(x_i)$ 是$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的第 i 个分量 $X_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的概率密度函数.

1.3 随机变量的数字特征

尽管随机变量的分布函数能够完整地描述随机变量的统计特性，但在一些实际问题中，确定随机变量的分布函数是相当困难的，或根本不需要去全面考察随机变量的变化情况，而只需知道随机变量的某些数值特征就可以了. 常用的随机变量的数字特征有：数学期望、方差、协方差和相关系数.

定义 1.3.1 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，若 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \mathrm{d}F(x) < +\infty$，则称

$$EX \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{d}F(x)$$

为随机变量 X 的**数学期望**，简称为**期望**或**均值**. 上式右边的积分称为 Lebesgue-Stieltjes 积分.

若 X 是离散型随机变量，其分布律为

$$p_k = P\{X = x_k\}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

则

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

若 X 是连续型随机变量，其概率密度函数为 $f(x)$，则

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x$$

定义 1.3.2 设 X 是随机变量，若 $EX^2 < +\infty$，则称

$$DX = E[(X - EX)^2]$$

为随机变量 X 的**方差**，称 $\sqrt{DX}$ 为 X 的**均方差**或**标准差**.

定义 1.3.3 设 X,Y 是随机变量，若 $EX^2<+\infty,EY^2<+\infty$，则称

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]$$

为随机变量 X 和 Y 的**协方差**. 称

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\ \sqrt{DY}}$$

为随机变量 X 和 Y 的**相关系数**.

数学期望、方差、协方差和相关系数具有以下性质：

(1) $E(aX+b)=aEX+b,D(aX+b)=a^2DX$($a,b$ 为任意常数).

(2) $E(\sum\limits_{k=1}^{n}a_kX_k)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kEX_k,D(\sum\limits_{k=1}^{n}a_kX_k)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_ia_j\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$.

特别地，当 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立时，有

$$D(\sum_{k=1}^{n}a_kX_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k^2DX_k\quad (a_k(k=1,2,\cdots,n)\text{ 为任意常数})$$

(3) $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY$.

特别地，

$$\mathrm{Cov}(X,X)=DX=E(X^2)-(EX)^2$$

$$DX\geqslant 0\text{ 且 }DX=0\Leftrightarrow P\{X=C\}=1$$

(4) $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$

(5) $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$

(6) $\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\mathrm{Cov}(X,Y)$

(7) 当 X,Y 独立时，$E(XY)=EXEY$

(8) $|\rho_{XY}|\leqslant 1$，且 $|\rho_{XY}|=1\Leftrightarrow P\{Y=aX+b\}=1$

(9) 柯西-许瓦兹(Cauchy-Schwarz)不等式：

$$[E(XY)]^2\leqslant E(X^2)E(Y^2)$$

1.4 特征函数和母函数

1.4.1 特征函数

随机变量的分布函数能够全面地描述随机变量的统计规律，但如果只用分布函数或分布密度这一工具去研究随机变量的统计规律，有时这一工具本身用起来显得并不得心应手. 特征函数是研究描述随机变量统

计规律的又一有效工具.

1. 特征函数的定义及性质

定义 1.4.1 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$,称

$$\varphi_X(t) \triangleq E\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}F(x)$$

为随机变量 X 的**特征函数**. 这里 t 是任意实数, $\mathrm{i}^2 = -1$.

当 X 是密度为 $f(x)$ 的连续型随机变量时, $\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} f(x)\mathrm{d}x$; 当 X 是分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k (k = 1,2,\cdots)$ 的离散型随机变量时, $\varphi_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx_k}$.

特征函数具有以下性质:

性质 1 $|\varphi_X(t)| \leqslant \varphi_X(0) = 1, \varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$.

性质 2 $\varphi_X(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

性质 3 若 $Y = aX + b$(a,b 为常数),则 $\varphi_Y(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tb}\varphi_X(at)$

性质 4 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量, $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$, 则 $\varphi_Y(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t)$.

性质 5 若 $E(X^n)$ 存在,即 $E|X|^n < +\infty$,则 X 的特征函数 $\varphi_X(t)$ 是 $k(k \leqslant n)$ 次可微的,且

$$E(X^k) = (-\mathrm{i})^k \varphi_X^{(k)}(0), \quad k \leqslant n$$

性质 6(逆转公式) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$,特征函数为 $\varphi_X(t)$,则对任意的 $-\infty < x_1 < x_2 < +\infty$,有

$$\frac{F(x_2+0)+F(x_2-0)}{2} - \frac{F(x_1+0)+F(x_1-0)}{2}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_1} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_2}}{\mathrm{i}t} \varphi_X(t)\mathrm{d}t$$

特别地,当 x_1, x_2 均为 $F(x)$ 的连续点时,有

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_1} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_2}}{\mathrm{i}t} \varphi_X(t)\mathrm{d}t \tag{1.4.1}$$

在式(1.4.1)中,令 $x_1 \to -\infty$,再由 x_2 的任意性,可得 X 的分布函数

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{x_1\to-\infty} \lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_1} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_2}}{\mathrm{i}t} \varphi_X(t)\mathrm{d}t$$

这说明由 $\varphi_X(t)$ 唯一决定 X 的分布函数 $F(x)$.

性质 7(唯一性定理) 随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 与特征函数 $\varphi_X(t)$ 是一一对应且相互唯一确定的.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com