不确定性结构力学问题的集合理论凸方法

邱志平　王晓军　著

科学出版社
www.sciencep.com

不确定性结构力学问题的集合理论凸方法

邱志平　王晓军　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是有关不确定性结构力学正反演问题的非概率集合理论凸方法及其应用的著作，汇集了作者与国内外合作者近年来系统研究工作的重要成果。本书包含两部分内容：第一部分为正演问题，包括不确定性结构静力和动力响应分析、无阻尼和有阻尼结构系统固有振动频率分析和区间参数结构静力响应分析的并行算法；第二部分为反演问题，包括结构静力载荷识别、弹簧质量系统振动反问题、结构物理参数识别和结构动态载荷识别。

本书主要特点是内容系统完整，原创性较强，理论分析与数值算例相结合。本书可作为从事结构力学及其相关专业的科技人员的参考书，也可作为高等学校研究生教材。

图书在版编目(CIP)数据

不确定性结构力学问题的集合理论凸方法/邱志平，王晓军著. —北京：科学出版社，2008

ISBN 978-7-03-021143-9

Ⅰ. 不… Ⅱ. ①邱…②王… Ⅲ. 结构力学-研究 Ⅳ. O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 034461 号

责任编辑：余 丁 / 责任校对：李奕萱
责任印制：刘士平 / 封面设计：耕者

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 4 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2008 年 4 月第一次印刷 印张：9 1/2
印数：1—2 500 字数：178 000

定价：35.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉)

前　　言

集合理论凸方法是分析和计算非线性、误差和不确定性问题的新的求解体系。到目前为止，集合理论凸方法主要包括区间数学（interval mathematics）和凸模型（convex models）。这一新的求解体系近十几年来才为人们所知，然而大多数科学家和工程师还未有所闻，在科学和工程中的大多数领域尚未传播开来。集合理论凸方法可综合考虑科学与工程问题的非线性、误差和不确定性。通常一个科学与工程问题的原始数据并不能精确知道，而只知道包含在给定的界限范围内；有时一个给定过程的理论原理并没有得到完善，但近似描述这一过程的方程已知。对于这两种条件下的问题，集合理论凸方法都可给出这些问题的未知解的界限或范围。从这种界限或范围可以得出解的近似值和近似值的误差界限。

本书是有关不确定性结构力学正反演问题的非概率集合理论凸方法及其应用的专门性著作，汇集了作者与国内外合作者近年来系统研究工作的重要研究成果。这些成果被美国 University of Virginia 的国际著名教授 Noore 定为计算结构技术在 20 世纪最新进展之一。目前，在国内乃至国际上，是继作者编写的《非概率集合理论凸方法及其应用》（国防工业出版社，2005）之后的第二本将区间分析和凸模型理论融为一体的用非概率统计方法处理不确定结构正反演问题的专著，二者为姊妹篇。这两本专著的出版必将在处理不确定问题和非线性问题，特别是不确定性和非线性混合在一起问题的理论方法上带来实质性的突破。

本书共分十章。第一章介绍了本书的撰写背景；第二、三、四、五、六章为不确定性结构力学正问题部分，其中第二章介绍了区间参数结构静力响应分析的区间 Taylor 级数法，第三章介绍了无阻尼结构系统固有振动频率分析的矩阵顶点求解定理、半正定求解定理、参数顶点求解定理，以及广义区间特征值问题参数顶点求解定理在工程中的应用，第四章介绍了有阻尼结构系统固有振动频率的区间 Taylor 级数法、凸模型方法、区间摄动法和矩阵顶点求解定理，第五章介绍了区间参数结构动力响应分析的区间 Taylor 级数法，第六章介绍了区间参数结构静力响应问题的并行算法；第七、八、九、十章为不确定性结构力学反问题部分，其中第七章介绍了静载荷识别的区间分析模型和凸模型，第八章介绍了含不确定参数弹簧质量

系统振动反问题的区间 Taylor 级数法，第九章介绍了单输入单输出系统集员辨识的区间算法和基于 ARMA 时序模型的结构物理参数识别集员算法，第十章介绍了动态载荷识别的区间分析方法。全书大纲由邱志平拟定，第一章至第六章由邱志平主笔，第七章至第十章由王晓军主笔。

感谢国家杰出青年科学基金项目和高等学校学科创新引智计划项目的资助。

作　者

2007 年 12 月 20 日

于北京航空航天大学

目　录

第一章　绪　　论

真正认知事物，应该既能知因求果，又能由果索因。然而，原因和结果中经常存在着某些不确定影响因素，这就使得我们的思维框架已由过去的“确定论”发展到了今天的“选择论”。确定性的描述仅仅反映了事物共性或普遍性的一面，而不确定性的描述则是要刻画事物个性或特殊性的一面，人们认识事物不但要认识它的共性，更重要的是要认识事物的个性或特殊性，以便全面地认识事物甚至改造事物。实际工程结构往往都具有不确定性，只是程度不同而已。有些不确定性又和非线性交叉在一起，从而使得工程问题解决起来非常困难。这就需要发展新的理论和方法，这种新的理论和方法应该能综合考虑各种主要因素的影响，以及能同时进行非线性和不确定的分析和设计。

1.1　工程背景

力学是研究物质机械运动规律的科学[1]。力学正问题，是知因求果的一类问题。在大多数情形下，通常是首先根据具体问题做出假设，提出力学模型，建立基本方程然后通过数值计算，获得数值结果。最后通过实验测定，验证数值结果的正确性。力学正问题的主要任务是研究结构的力学响应(包括位移、应力、应变、固有振动频率和动力响应等)，其目的在于确定它的强度、刚度或稳定性等。用于这些分析和设计的力学理论已相当成熟，并已形成专用和通用有限元分析和设计程序。所谓力学反问题，是相对正问题而言的，是由果索因的一类问题。一般是指利用实验数据构造力学模型或确定基本方程中的参数，也包括在某些给定的条件(如满足强度、刚度或几何约束等)下，寻求结构的最佳设计方案等问题[2]。力学反问题很多，固体力学中反问题的研究目前主要集中在结构力学反问题，包括结构设计、参数识别、载荷识别、损伤识别和模型修正等[3]。

在工程结构的设计和分析中，通常的模型都是建立在参数确定的基础上的，确定性力学问题的研究已经取得了丰硕的理论成果，并且在工程实践中得到很好的应用[4,5]。然而，由于实际工程结构的复杂性和所用材料的离散性，以及测量、加工、制造等误差的存在，必然导致具有未确知参数的不确定系统[6,7]。受这些不确定性因素的影响，系统的解的存在性、唯一性和稳定性等问题如果仍采用确定性的理论和方法，结果必然不稳定而出现大幅度的波动，与实际结果有较大出入。不确定性的存在是在所难免的，且其在工程问题研究中的重要作用是不容忽略的。客

观反映问题不确定性的正反演问题研究是力学问题研究的发展趋势之一，具有重要的实际意义和重大的理论价值。

1.2 不确定性及其分析模型

实际工程领域中，存在着众多的不确定性因素，依据工程背景可以分为量测信息的不确定性、材料参数的不确定性、荷载的不确定性、几何尺寸的不确定性、初始条件和边界条件的不确定性、计算模型的不确定性等[8,9]。

不确定性分析的方法依赖于不确定性信息的描述方式，不确定性信息的描述方式取决于已知信息的数量和类型。目前，概率方法、模糊方法和集合理论凸方法是不确定性建模的三种主要方法[10]。其中最常用的是把结构参数视为随机变量来对问题进行建模与分析，即采用概率方法[11]。在这种情况下，所有不确定结构参数的联合概率密度函数都应该是已知的。但是，当没有足够的数据来验证这些随机变量(或相关的函数)的概率密度的正确性时，概率方法可能难以可靠地得到满足精度要求的计算结果。采用基于模糊集理论的方法来描述不确定性时[12]，也需要知道不确定性结构参数的隶属度函数。与概率方法相比较，在很多情况下，确定隶属度函数甚至更为困难，使用者往往不得不带有很大主观性地选取相应的隶属度函数。这样的分析结果的可靠性也值得怀疑。为了反映客观实际，减少人为因素的影响，在信息不够充分的条件下，描述工程问题不确定性的一种方法是把这些不确定性结构参数视为未知变量，它们在具有已知边界的凸集合内取值，得到的计算结果是包含可行解集的一个最小集合，这就是所谓的集合理论凸方法，包括区间分析方法[6,13,14]和凸模型方法[15~17]。这种描述更符合工程习惯，容易为工程人员所接受。由于真实参数解在所确定的界限之内，这样就为更准确地估计和评价所得结果提供了一定的依据。

1.3 不确定性结构力学问题的集合理论凸方法研究现状

1.3.1 正问题研究现状

近年来，非概率集合理论凸方法在处理具有不确定性结构参数问题方面表现为独特的优点，包括区间分析方法和凸模型方法。

区间分析或称区间数学起源于 20 世纪 60 年代，当初是为研究计算误差而提出的。自 1966 年 Moore 的第一本区间分析专著[18]问世以来，该理论发展很快，已经成为数学领域内一个较新的分支[19]，并且已经扩展到了许多领域[14,20]。近几年的研究表明该理论可以解决两大问题：一类是非线性问题，另一类是不确定问题。

Moore 首先利用区间技术在牛顿迭代法的基础上提出了一种新的求解非线性方程迭代法[18]，其特点是算法具有全局收敛性，可算出非线性问题的全部解，对解的存在性具有计算检验，每次迭代过程不仅能得到解的近似，而且还可得到相应的误差界限等优点，这些是一般求解非线性方程点迭代法所办不到的。随后，Hansen[21,22]、Krawczyk[23]、Nickel[24]和 Moore 等[25]对区间 Newton 法又作了很多改进与推广，使区间迭代法在理论与实践上更趋完善。但是区间数学中的区间迭代算法对多维非线性问题的计算量还是比较大，还需要改进。

人们发现，区间数的概念与不确定参数之间有着天然的联系。但是，由于区间分析的复杂性，把区间分析的数学成果应用于处理实际工程问题是比较困难的。把区间分析的概念应用于结构分析还只是近十年的事情。自 Ben-Haim、Elishakoff[26,27]和邱志平[6,13,28]等的一些开创性的研究开始，区间分析的概念在结构分析中的应用越来越多。主要的研究工作包含四个方面，即用于具有不确定性参数和不确定外力的结构特征值问题、静态响应分析问题、动力响应分析问题和可靠性问题。

对于具有区间参数结构的动力响应分析问题。吴杰等[29]提出了区间参数结构的动态响应问题的区间优化方法，利用摄动理论和函数区间扩张将区间优化问题转化为近似的确定性优化问题。对具有区间参数结构的实特征值问题和复特征值问题，邱志平等将求解标准区间特征值问题的 Deif 方法推广到广义区间特征值问题，提出了扩展 Deif 方法[28]，为克服判断特征向量分量符号不变性的困难和减少计算量，随后又提出了半正定解法[30]、区间参数和区间矩阵摄动法[31]、上下界包含定理[32]。陈塑寰和杨晓伟等针对具有区间参数无阻尼结构系统的实特征值问题提出了基于单元矩阵的区间矩阵摄动法[33]和求解具有区间参数阻尼结构系统复特征值问题的区间参数摄动法[34]。陈怀海等提出了求解实对称矩阵区间特征值问题的直接优化法[35]。

目前，更多研究集中于计算结构静态分析。邱志平等首先采用一阶摄动方法计算了具有区间参数的结构静态响应问题[6]。Koyluoglu、Cakmak 和 Nielsen 把区间概念和有限元方法相结合来处理外载和结构的不确定性，提出了一种新的替代方法[36]，该方法采用一种加速步长搜索方法来寻找未知量的最优集合。Rao 和 Berke 提出了几种基于有限元的区间方法来解决工程不确定性[37]，其中之一是假定区间函数是单调的，提出了一种组合穷举方法来确定最不利的结构响应。当假定正确时，该方法的解是精确的。但是，随着不确定参数个数的增多，该方法很快就变得不可行。陈怀海等提出了非确定区间结构系统静态分析的直接优化法[38]。Mullen 和 Muhanna 基于模糊集合理论和区间分析考虑了具有不确定结构载荷的结构静力问题[39]。郭书祥和吕震宙等将区间分析和有限元方法相结合，提出了非概率不确定结构的一种区间有限元分析方法[40]，将区间有限元静力控制方程中 n

自由度不确定位移场特征参数的求解归结为求解一 $2n$ 阶线性方程组。McWilliam 提出了一种修正的区间摄动方法和一种所谓的单调性方法来更准确地求取结构位移范围[41]。杨晓伟等考虑了区间元素之间的相关性，提出基于单元的静力区间有限元法[42]。

进入 20 世纪 90 年代，Ben-Haim 和 Elishakoff 等提出并倡导使用不确定性的凸模型[16]。1991 年，他们用凸模型理论成功地研究了车辆在不规则路面上行驶时，结构响应量的变化情况[43]。1992 年，Lindberg 将凸模型理论用于多模态动力屈曲不确定非完整性的控制问题上[17,44]。Elishakoff 等提出用椭圆凸集模型描述载荷随机模型中不确定参量所在范围，通过反优化计算确定结构响应的范围，所建立的是一种概率-非概率的混合模型[45]。Ben-Haim 基于凸模型理论，首次提出了非概率可靠性的概念[15,46,47]，认为若系统能容许不确定参量在一定范围内的波动，则系统是可靠的。Elishakoff 于 1995 年在针对此概念的讨论中提出了一种可能的度量方法[48]，认为非概率可靠性同不确定参量一样，属于某一区间，提出的可靠性指标是一区间而非一具体量值，区间的边界是根据传统的安全因子进行区间运算求得。此法实际上是传统的安全因子法和区间算法的简单结合，不易处理复杂的结构问题。之后，Elishakoff、Haftka 和 Fang[49]，Lombardi[50]、Pantelides 和 Ganzeli[51,52]等提出了非概率模型的结构优化设计方法。郭书祥和吕震宙[53]等基于非概率可靠性理论，将稳健设计和稳健可靠性的思想和方法用于结构设计，提出了结构的稳健可靠性设计方法。

1.3.2 反问题研究现状

由于反问题更能全面而深刻地揭示事物的本质及内在关系，因而在最近十多年有了较大地发展，成为数学、力学、电学、光学、海洋学、地质学、计算化学、计算物理学、地球物理学、结构动力学、参数识别技术等众多学科和许多产业部门备受青睐的研究项目，也是当今国际科学技术的前沿课题和重要的研究方向。

将集合理论凸方法应用于反问题的研究还比较少。1995 年，Elishakoff 和 Fang 成功地将集合理论凸方法模型应用于矩形板边界条件修改的诊断问题[54]。Nakagiri 和 Suzuki 基于区间数学知识提出了由具有不确定性的位移输入来识别外力范围的区间分析方法[55]。王登刚等利用区间分析求解一类联合反演问题，将巷道围岩视为受均匀应力场的线弹性体，量测位移和应力作为区间数，采用约束变尺度法优化技术反演出弹性模量和地应力场的上下界范围[56,57]。李爽等提出了利用多种数据进行联合反演的区间模型，并给出了求解优化问题全局最优解的区间算法[58]。刘世君等将量测信息视为区间不确定性的变量，建立了区间参数反分析模型，将区间分析同摄动理论、优化方法相结合，提出了区间参数摄动反分析方法和区间参数优化反分析方法[59~61]；基于确定性逆反分析的思想，提出了区间逆

反分析方法。上述这些文献研究的还主要是结构静力问题，建立区间反分析模型后，求解方法并没有利用区间数学的思想，主要采用的是优化方法来求解，在不确定变量较多的情况下，计算量较大。

集合理论凸方法在其他领域中的应用中也得到了较好的发展。值得一提的是现代控制理论中的集员辨识(set-membership identification)算法，它是对具有未知然而有界(UBB)噪声(不确定性)系统的一类辨识方法[62~66]。由于这类辨识方法对系统噪声先验知识要求较少，只要求系统噪声是有界的且噪声界已知，而不需要知道诸如噪声的分布、均值、方差等统计特性，因而其适用面广，鲁棒性强。集员辨识算法所进行的工作是在参数空间中找到一个与测量数据已知噪声界限相容的参数成员集，成员集内的所有元素都有可能是真实参数值。将其与力学反问题的特点相结合必将会产生新的研究方法。

1.4 本书内容

在作者已出版的专著《非概率集合理论凸方法及其应用》的基础上，对具有不确定性结构正问题做了进一步的创新性研究，而且在具有不确定性结构反问题方面也做出了一些开拓性的工作，现将它们汇集成该书，所包含的主要内容如下：

① 将区间数学理论和方法用于求解工程中不确定结构静动力响应问题。提出了在不知道不确定变量概率统计信息而只知道其变化范围的条件下不确定结构静动力响应问题分析和计算的非概率区间集合理论和方法。所提出的“区间 Taylor 级数法”求解不确定结构静动力响应问题(数学上是区间线性方程组和区间微分方程组)具有计算量成倍地减少，结构静动力响应范围窄等优点，克服了区间数学应用于工程中不确定结构静动力响应问题的两大致命缺点，即计算量过大、结构静动力响应区间结果宽度过宽的缺点。

② 将区间数学与优化理论相结合，提出并证明了标准特征值的区间矩阵顶点法和广义特征值问题的参数顶点法，并将后者成功地应用于实际工程结构固有振动频率范围的估计，为型号的研制作出了贡献。

③ 考虑了不确定结构系统中阻尼的影响，提出了复特征值问题的近似求解的区间 Taylor 级数法、区间摄动法及精确求解的矩阵顶点法。

④ 一般地给出了区间分析法中的超长方体和凸模型理论中的椭球之间关系的数学表达公式，解决了用区间分析法和凸模型理论求解有界不确定结构响应问题的关系问题。

⑤ 根据集合关系和概率统计理论中的切比雪夫不等式，从数学证明和数值计算两方面，解决了用概率统计方法和非概率集合理论方法求解不确定结构响应问题的相容性问题。

⑥ 讨论了一种求解含有界不确定参数的结构静态响应区间上下界的方法——顶点法。为了避免顶点法计算量大、计算时间长的缺点，使其应用于大规模计算，通过对区间求解方法的并行性分析，给出了顶点法的并行算法。

⑦ 借鉴不确定结构静动力响应问题的凸集合理论的思想，提出了利用具有未知然而有界静位移反演结构所受静态外载荷的凸模型方法，并与现有的区间分析方法进行了比较。

⑧ 基于一阶 Taylor 级数展开和区间数学提出了利用具有有界结构特征值反演结构物理参数的区间分析方法。

⑨ 在不确定但有界噪声假设下，提出了针对线性时不变单输入单输出系统参数集员辨识的区间算法，并将应用于单自由度结构系统参数识别。

⑩ 基于现代控制理论中的集员辨识思想和区间数学中的区间分析方法，提出了利用具有不确定但有界结构响应识别外载荷时间历程的区间模型和相应求解方法。

参考文献

[1] 《力学词典》编辑部. 力学词典. 北京：中国大百科全书出版社，1990.

[2] 梁艳春. 计算智能与力学反问题中的若干问题. 力学进展，2000，30(3)：321～331.

[3] 李书. 固体力学中的若干反问题研究. 南京：河海大学博士后研究工作报告，1998.

[4] 程耿东. 工程结构优化设计基础. 北京：水利电力出版社，1983.

[5] 钱令希. 工程结构优化设计. 北京：水利电力出版社，1983.

[6] 邱志平. 不确定参数结构静力响应和特征值问题的区间分析方法. 长春：吉林工业大学博士论文，1994.

[7] 王仁. 地震危险区预测——一个非线性反演问题//材料和结构的不稳定性. 北京：科学出版社，1993.

[8] William L O，et al. Challenge problems：uncertainty in system response given uncertain parameters. Reliability Engineering and System Safety，2004，85：11～19.

[9] Ben-Haim Y. Uncertainty，probability and information-gaps. Reliability Engineering and System Safety，2004，85：249～266.

[10] Elishakoff I. Three versions of the finite element method based on concepts of either stochasticity，fuzziness or anti-optimization. Applied Mechanics Review，1998，51(3)：209～218.

[11] Chen S H，Liu Z S，Zhang Z F. Random vibration analysis for large-scale structures with random parameters. Computers and Structures，1992，43(4)：681～685.

[12] Rao S S，Chen L. Fuzzy finite-element approach for the vibration analysis of imprecisely-defined system. Finite Elements in Analysis and Design，1997，27：69～83.

[13] 邱志平. 非概率凸集合理论模型的拓广及算法的数值化. 大连：大连理工大学博士后研究工作报告，1996.

[14] Jaulin L, et al. Applied Interval Analysis: with Examples in Parameter and State Estimation, Robust Control and Robotics. New York: Springer, 2001.

[15] Ben-Haim Y. Robust reliability of structures. Advances in Applied Mechanics, 1997, 33: 1～41.

[16] Ben-Haim Y, Elishakoff I. Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics. Amsterdam: Elsevier, 1990.

[17] Lindberg H E. Convex models for uncertain imperfection control in multimode dynamic buckling. Journal of Applied Mechanics, 1992, 59: 937～945.

[18] Moore R E. Interval Analysis. New York: Prentice-Hall, 1966.

[19] 王德人，张连生，邓乃杨. 非线性方程的区间算法. 上海：上海科学技术出版社，1987.

[20] Moore R E. Methods and Applications of Interval Analysis. London: Prentice-Hall, 1979.

[21] Hansen E. Topics in Interval Analysis. London: Oxford University Press, 1969.

[22] Hansen E. Interval forms of Newton's method. Computing, 1978, 20: 153～163.

[23] Krawczyk R. Interval extensions and interval iterations. Ibid, 1980, 24: 119～129.

[24] Nickle K. Interval Mathematics. New York: Academic Press, 1980.

[25] Moore R E, Qi L Q. A successive interval test for nonlinear systems. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1982, 19(5): 845～850.

[26] Ben-Haim Y, Elishakoff I. Non-probabilistic models of uncertainty in the nonlinear buckling of shells with general imperfections: theoretical estimates of the knockdown factor. Journal of Applied Mechanics, 1989, 56: 403～410.

[27] Elishakoff I, Ben-Haim Y. Dynamics of a thin cylindrical shell under impact with limitation deterministic information on its initial imperfections. Structural Safety, 1990, 8(1～4): 103～112.

[28] Qiu Z P, Chen S H, Na J X. The Rayleigh Quotient method for computing eigenvalue bounds of vibrational systems with interval parameters. Acta Mechanics Solid Sinica, 1993, 6: 309～318.

[29] 吴杰，陈塑寰. 区间参数结构的动力响应优化. 固体力学学报，2004，25(2)：186～190.

[30] Qiu Z P, Chen S H, Elishakoff I. Natural frequencies of structures with uncertain-but-non-random parameters. Journal of Optimization Theory and Applications, 1995, 6: 669～683.

[31] Qiu Z P, Chen S H, Elishakoff I. Bounds of eigenvalues for structures with an interval description of uncertain-but-non-random parameters. Chaos, Solitons & Fractals, 1996, 7: 425～434.

[32] 邱志平，顾元宪，王寿梅. 有界参数结构特征值的上下界定理. 力学学报，1999，31(4)：466～474.

[33] Chen S H, Lian H D, Yang X W. Interval eigenvalue analysis for structures with interval parameters. Finite Elements in Analysis and Design, 2003, 39(5～6): 419～431.

[34] Yang X W, Chen S H, Lian H D. Bounds of complex eigenvalues of structures with interval parameters. Engineering Structures, 2001, 23(5): 557～563.

[35] 陈怀海,陈正想.求解实对称矩阵区间特征值问题的直接优化法.振动工程学报,2000,13(1):117～121.

[36] Koyluoglu H U,Cakmak A S,Nielsen S R. Interval algebra to deal with pattern loading and structural uncertainty. Journal of Engineering Mechanics,1995,121:1149～1157.

[37] Rao S S,Berke L. Analysis of uncertain structural system using interval analysis. AIAA Journal,1997,35:727～735.

[38] 陈怀海.非确定结构系统区间分析的直接优化法.南京航空航天大学学报,1999,31(2):146～150.

[39] Mullen R L,Muhanna R L. Bounds of structural response for all possible loading combinations. Journal of Structural Engineering,1999,125(1):98～106.

[40] 郭书祥,吕震宙.区间运算和静力区间有限元.应用数学和力学,2001,22(12):1249～1254.

[41] McWilliam S. Anti-optimization of uncertain structures using interval analysis. Computers and Structures,2001,79:421～430.

[42] 杨晓伟,陈塑寰,滕绍勇.基于单元的静力区间有限元法.计算力学学报,2002,19(2):179～183.

[43] Ben-Haim Y,Elishakoff I. Convex models of vehicle response to unknown but bounded terrain. Journal of Applied Mechanics,1991,58:355～361.

[44] Lindberg H E. An evaluation of convex modeling for multimode dynamic buckling. Journal of Applied Mechanics,1992,59:929～936.

[45] Elishakoff I,Colombi P. Combination of probabilistic and convex models of uncertainty when scarce knowledge is present on acoustic excitation parameters. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,1993,104(2):187～209.

[46] Ben-Haim Y. A non-probabilistic concept of reliability. Structural Safety,1994,14:227～245.

[47] Ben-Haim Y. A non-probabilistic measure of reliability of linear systems based on expansion of convex models. Structural Safety,1995,17:91～109.

[48] Elishakoff I. Discussion on a non-probabilistic concept of reliability. Structural Safety,1995,17(3):195～199.

[49] Elishakoff I,Haftka R T,Fang J. Structural design under bounded uncertainty optimization with anti-optimization. Computers and Structures,1994,53(6):1401～1405.

[50] Lombardi M. Optimization of uncertain structures using non-probabilistic models. Computers and Structures,1998,67(1～3):99～103.

[51] Pantelides C P,Ganzeli S. Design of trusses under uncertain loads using convex models. Journal of Structural Engineering,1998,124(3):318～329.

[52] Ganzerli S,Pantelides C P. Optimum structural design via convex model superposition. Computers and Structures,1998,74(6):639～647.

[53] 郭书祥,吕震宙.基于非概率模型的结构稳健可靠性设计方法.航空学报,2001,22(5):