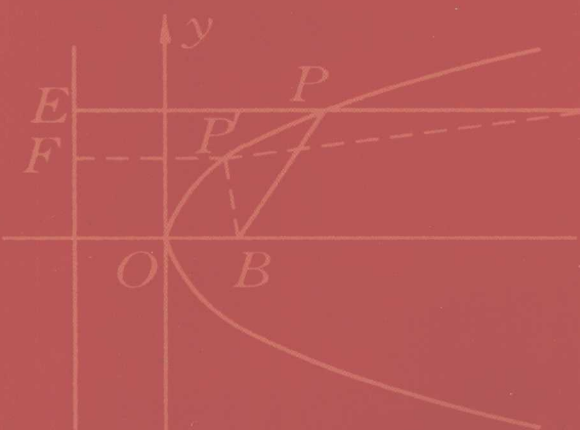
新课标初高中解题思维方法系列

新课标初中数学解题思维方法

总主编 孙元清
主　编 周继光



思维决定成功 方法决定成绩

上海科学普及出版社

新课标初高中解题思维方法系列

新课标初中数学

解题思维方法

总主编 孙元清

主　编 周继光

主　审 姚善源

编　者 周继光 杨 文 刘建云

上海科学普及出版社

图书在版编目(CIP)数据

新课标初中数学解题思维方法/周继光主编.—上海：上海科学普及出版社，2007.5
(新课标初高中解题思维方法系列)
ISBN 978-7-5427-3721-2

Ⅰ.新… Ⅱ.周... Ⅲ.数学课-初中-解题
Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第035586号

责任编辑 郭子安

新课标初高中解题思维方法系列
新课标初中数学解题思维方法
总主编 孙元清 主编 周继光
上海科学普及出版社出版发行
(上海中山北路832号 邮政编码200070)
http://www.pspsh.com

各地新华书店经销 上海中华印刷有限公司印刷
开本 890×1240 1/32 印张 12.75 字数 366 000
2007年5月第1版 2007年5月第1次印刷

ISBN 978-7-5427-3721-2/O·219 定价：20.00元

主编简介

总主编　孙元清

上海市特级教师 、上海市教委教研室原主任。教育部中学校长培训中心兼职教授。“全国优秀教育工作者”,“国务院特殊津贴”获得者。主要论著有《上海中小学课程教材改革的理论与实践》、《高中课程结构与教学管理的研究与试验》等。

高中数学主编　康士凯

上海市数学特级教师,上海市数学会原理事,上海市数学名师培养基地主持人,全国优秀教育工作者,中国数学奥林匹克高级教练。从教三十余年来,曾编著《中学数学教学能力》、《斐波那契数列》、《集合与映射》、《微积分题解辞典》等著作二十余种。

高中物理主编　张　越

上海市物理特级教师,毕业于上海师范学院物理系本科,上海市二期课改物理新教材主编,华东师范大学兼职教授,上海师范大学理工信息学院兼职教授,上海科技馆专家委员会委员,上海教育研究会物理专业委员会学术委员会主任。曾任上海师大附中副校长。曾获全国优秀教师、全国优秀科技辅导员称号。

高中化学主编　吴　峥(女)

上海市化学特级教师,原上海市黄浦区教育学院教研室主任,现任黄浦区化学名师工作室导师。长期从事中学化学教学和

教育科研；参与编写《中学化学教学大纲》、《中学化学课程标准》和先后两期课改的《中学化学》教材。目前主要研究的项目是《中学化学科学思维方法研究》和《中学化学学科观念的教学》。

初中数学主编　周继光

1978 年首批晋升为上海市数学特级教师，上海师范大学数学系本科毕业，1989 年评为全国优秀教师。从教四十余年，其间在上海市卢湾区教育学院任数学教研员八年。数十年来积极参与上海市数学教材的编写、教学大纲及课程标准的制定工作。多次受聘参加上海市中考命题，主持、参与多项教育科研项目的研究。主编或编著几十本数学课外读物，这数百万字。主要的代表性论著有《中学生怎样自学》、《数理化学习大全》、《数学测试与评析》、《数学精练与博览》、《中学数学解题词典》等。

初中物理主编　陈国声

上海市中学物理高级教师，毕业于上海师范大学物理系，现任上海市闸北区教师进修学院物理教研员。曾获全国优秀教师称号。主编了《物理专题教程》等十余本物理专业书。

初中化学主编　袁孝凤

上海市中学化学高级教师，毕业于上海师范大学化学系，现任上海市长宁区教育学院化学教研员。参与《上海市中学化学学科教育改革行动纲领》、《上海市中学化学课程标准》的研制，系上海二期课改化学初三新教材的撰稿人，曾参与上海市化学中考及“天原杯”竞赛的命题、辅导等工作。参加《九年级化学新教材课堂教学设计》、《中考化学新题型》、《初中化学竞赛教程》等的编写。在《课程·教材·教法》、《化学教学》等核心期刊上发表论文多篇。

前　言

《新课标初高中解题思维方法系列》与《新编初高中活用理科手册系列》是两套姊妹丛书.编写这两套丛书的目的都是为了解决素质教育及其课程教材改革和考试改革所涉及的一个重要问题：怎样培养学生自主学习，这是一个能力问题.那么，怎样培养学生会自主学习呢？自主学习的核心是兴趣，兴趣的核心是会学习，会学习的核心是会思维，会思维的核心是会发现问题、会活用知识去解决问题.因此，要培养学生会自主学习，必须重视培养学生学会思维、学会活用知识.思维要以知识为载体，知识对于任何一种思维都是必不可少的，没有知识，一个人无法思维；知识要以思维为活化剂，知识要通过思维去理解、去激化、去构建，没有思维，知识是空洞的、没有活力的、没有意义的.所以在培养学生思维时，要求学生活用知识；在要求学生活用知识时，要培养学生学会思维.

本套书为《新课标初高中解题思维方法系列》，编写时着眼于思维品质和思维能力的提高，着重于思维方法的培养，试图改革传统的课程和教学实践所培养的传统思维方式——通过机械训练、按一种方式来理解知识和认识世界，而代之以注重培养学生会从实际出发、以多种思维方式去理解知识和认识世界，包括创造性思维、分析性思维和实践性思维.为此，本书从三个层面来阐述：每门学科的一般思维方法，理解知识与活用知识解题中常用的各种思维方法，复习与考试中常用的各种思维方法等三个层面；并且以一般思维方法作为基础和指导，以阶段或单元复习中的解题方法作为具体培养思维方法、理解与活用知识点和知识块的一种手段，以在系统复习和考试中灵

活应用各种思维方法去创造性思维、分析性思维和实践性思维作为目的.

本丛书每门学科的编写由三部分组成：

第一部分，先将学科的一般思维方法一一列出，并作简要介绍和示例，使学生对思维方法有一般的了解、整体的了解，以便指导以后的学习，并在以后学习和总复习的过程中逐步加深理解.

第二部分，再以知识块中所用到的思维方法、解题思维方法、考试思维方法作具体的阐述，并配有相应的例题和习题，在每一块之前对知识块的特点作简要的说明.

第三部分，这是作为系统复习与考试用的，作为思维方法的灵活应用与综合应用，并配以例题和习题.

本丛书以学科思维方法的培养为主，不受教材版本内容的限制，知识块和知识点要根据思维方法培养的需要来选择.

本丛书的例题和习题分为三个层次：基本层次——一般的练习题；中等层次——有一定难度和简单的综合题；较高层次——研究性学习的习题、较复杂的综合题、考试和竞赛中较难的题目等.一般说，前两个层次的习题主要放在第二部分中，最后层次的习题放在第三部分中.

本丛书由具有丰富教研、教学经验的特级教师和优秀教师合作编写.丛书主编孙元清，高中数学主编康士凯、初中数学主编周继光，高中物理主编张越、初中物理主编陈国声，高中化学主编吴峥、初中化学主编袁孝凤.

本丛书适合上海及全国各地高初中学生和教师选用，适合平时学习和阶段复习，以及考试时参考使用.

由于改革和编写尚在试验中，有欠妥和不足之处，敬请读者和专家提出宝贵的意见和建议，以便修改和完善.

孙元清

2007 年 5 月

引 言

孙元清先生接受上海科学普及出版社约请，担任《初高中思维方法丛书》总主编. 他和我谈了他对这套丛书编写的指导思想、原则和框架等一些想法，并请我负责《初中数学思维方法》的编写工作. 当时，他对思维、教学与育人辩证关系的一番精辟谈话，对我甚有启发并颇有同感. 在以后半年多的编写过程中，我们努力遵照孙先生的策划和意图，并根据初中数学的特点，力求体现以下几点：

一、指导初中生学点思维方法

“数学是锻炼大脑的体操”，学习数学的过程主要是学习者不断思维的过程. 无数学习成功者的经验表明：要想学好数学，不仅要有扎实的知识与技巧，还要掌握科学的思维方法，具有良好的思维品质. 只有思维畅通、方法得当，才能事半功倍. 为此，本书的第一章“学一点思维方法”从作者小时候学习“鸡兔同笼”的故事谈起，根据初中生的思维特点和认识水平，每一节都用一些日常生活中诸如“集装箱装运货物的方法、查词典的尝试方法、司马光砸缸救人的方法”等一些为青少年所喜闻乐见而又引人入胜的例子，深入浅出地向初中生介绍一、两个常用的思维方法，并尽量与初一、初二的数学知识有机地结合起来，本章精选 26 个典型例题和 84 个思考练习题，一般初二同学经过努力都能读懂、会做. 这些题大多小巧玲珑、构思巧妙、解法简捷，虽然不是很难，但是都需要活用或巧用知识（如果遇到个别涉及尚未学过知识的例题和习题可以先跳过去，待第二遍再来阅读和思考）. 当你初次读完本书第一章时，就能在学习思维方法的同时，掌握一些常用的解题思路、解题策略与解题方法，使你对初中数学中重

要的数学思想有所感悟，从而提高对数学的兴趣，养成良好的思维习惯，不但能为初二读者进入初中最后学年的学习打开思维的窗口.而且能使初中读者的形象思维与抽象思维都得到进一步的有效训练，促进青少年大脑的左、右两半球的协调开发，从而开启大脑的智慧之门.

二、将思维融于探究之中

如果把数学中的定义、公理、定理、法则和公式等比作它的“肢体”，那么，数学的“心脏”便是数学的问题和解.如果把数学的思维比作它的“血脉”，那么，数学的“头脑”便是数学思想.这是对“数学思维”与“问题解决”关系的一个极为生动的比喻.“问题的解决应当成为当代学校数学教育的核心”这一口号已经成为国际、国内越来越多的数学教育家和数学教师的共识.本书的第二章“融思维于探究中”以问题和问题解决为主线，分别对问题的构成(条件与结论)，问题中解的存在性和规律性以及解题的策略(建模与变式)的探究进行有效地指导.本章精选了37道典型例题，(大多选自最近几年上海市及全国各省市的中考试题)新颖、灵活、颇有特色.都是具有探索性、操作性、开放性和应用性的一些好题.作者用心指导读者如何抱着研究的观点去阅读每一道例题，使其能够成为读者一次又一次对数学真理的探究和再发现的过程.着重对每一个问题的命题背景、多种解法以及对命题的引伸、变化和推广作出详尽的分析、精彩的评注和说明.相信初中生认真阅读本章并细心揣摩之后，一定会被其中富有魅力的思路分析所吸引，会对其中扑朔迷离的思维过程有所领悟，同时也会学到许多新的知识、方法和技巧而感到愉悦和满足.当你一旦在数学思想方法的引领之下破解那些历年中考难题，感既它们也不过如此之时，会突然感觉到数学思想是思维的一种升华.数学思维方法将让你终身受用.

三、为读者的思考迷津解惑

一般的教辅类读物都把“习题解答”作为附录，有的书仅给出答案，使部分读者在解题过程中产生疑惑时得不到必要的指点，有的书干脆每一道题都给出详尽的解答过程，往往使不少读者抓不住解题的要领，从而削弱了指导的针对性.为此，作者本着竭诚为读者服务

的精神，对题解作出相应的改进.按中等偏下程度的初中读者的实际水平，全书290道思考题(第一章84题，第二章206题)，除个别题仅给出答案外，绝大部分的题均按不同情况给出详略不同的提示和解题过程，有的甚至给出多种解法，启发读者多角度思考.有的还提醒读者把它与本书某个思考题作比较，让读者了解题目之间的联系和区别，有的还要求并指导读者对原题进行引伸和发展，给读者留有充分思考的空间.总之，力求加强对解题思维过程的分析与指点，提高题解的针对性和实效性.

作者凭借自己的教学经验，精选63道例题、290道思考题作本书的骨骼，融入思维方法的血肉之躯，并以数学思想统领全书，期待改变"题海战术"之现状，对此是充满自信的，但这只是一次尝试，效果如何，须由实践作出检验.本书例题加上思考题总共有353题，如果您能每天拿上一题琢磨琢磨，相信通过一年的学习定会大有收益，当然过年那天您也可以休息休息.

本书由周继光担任主编，参加编写的有周继光、杨文、刘建云等同志，姚善源先生最后审定.在周继光工作室进修的一些同志也参与了本书的部分工作.

由于成稿时间仓促，难免欠妥与不足之处，敬请读者和专家提出宝贵意见和建议，以便修改和完善.

周继光

2007年4月

目 录

第一章 学一点思维方法

§1.1 字母替代

小时候，我对“鸡兔同笼”问题发生了兴趣.

今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足. 问雉、兔各几何?

这个问题最早出现在中国古代数学书《孙子算经》里，它的意思是说，现在有一些野鸡和兔子，关在同一只笼子里，从上面看，共有 35 个头；从下面看，共有 94 只脚. 问有多少只野鸡、多少只兔子?

小学里解这个问题颇费脑筋，一般可以这样想：

先暂时假定笼子里全是野鸡，那么每个头配 2 只脚，总数 35 个头，共有 70 只脚.

实际上有 94 只脚，相差 24 只脚.

拿 1 只野鸡换 1 只兔子，头数不变，脚数加 2.

要能补足 24 只脚，需要换进 12 只兔子.

鸡、兔共有 35 只，减去 12 只兔子，还剩 23 只野鸡.

列出综合算式是：$(94-35\times 2)\div(4-2)=24\div 2=12$.

…………………………………（兔子只数）

$35-12=23$ ……………………（野鸡只数）

所以，笼中共有雉 23 只，兔 12 只.

在上面的解法里，其实已经用到了分析和比较这两种重要的思

维方法.

在《孙子算经》原著里,用了一种别致的简便解法:

取脚数 94 的一半,得 47;

用脚数之半 47 减去头数 35,得 12,这就是兔子的只数;

再拿头数 35 减去兔子的只数 12,得 23,就是雉的只数.

答案完全正确.这是什么道理呢?

我们不妨作一个鸡兔同台表演杂技的比方:设想笼子里所有野鸡都提起一只腿,集体表演“金鸡独立”;所有兔子都提起两条前腿,集体操练“站桩功”.

这时,每个野鸡着地的脚数是 1,等于头数;每个兔子着地的脚数是 2,等于头数加 1.

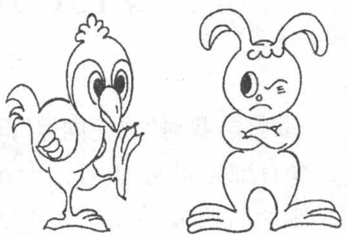


图 1.1-1

鸡和兔各拿自己减半的脚数,减去自己的头数,所得的差分别是:野鸡为 0,兔子为 1.

把所有这些差统统加起来,也就是总脚数的一半与总头数的差,一定等于兔子的只数.

列出的算式是:$94 \div 2 - 35 = 47 - 35 = 12$…(兔子只数)

虽然这种“脚数减半”的解法非常巧妙,但一般人实在是很难想出这个办法.

到了中学里,学了字母表示数会列方程以后,解上面的“鸡兔同笼”问题就变得轻而易举.

解法一:(列一元一次方程解)

设:笼子里有兔子 x 只,

那么,笼子里的鸡有 $(35-x)$ 只.

根据题意列出方程:

$4x + 2(35 - x) = 94.$

$4x + 35 \times 2 - 2x = 94.$

$(4-2)x = 94 - 35 \times 2.$

$\therefore x = (95 - 35 \times 2) \div (4-2).$

解得　$x = 12$，

$35 - x = 23$，

答：略.

解法二：(列二元一次方程组解)

设：笼子里有兔子 x 只，鸡 y 只.

根据题意列出方程组：

$$\begin{cases} x + y = 35, & (1) \\ 4x + 2y = 94. & (2) \end{cases}$$

(2) ÷ 2 得　$2x + y = \frac{94}{2}$.　(3)

(3) − (1) 得　$x = \frac{94}{2} - 35$.

解得 $x = 12$.

再代入(1)得 $y = 23$.

答：略.

[评注]　对照上述算术解法和代数解法，显然代数解法要比算术解法思考起来容易得多，这主要是因为在代数解法中引进了字母 x、y 来表示未知数. 例如，在代数解法一中用 x 表示笼中兔子只数，$(35 - x)$ 表示笼中鸡的只数以后，这些未知数和"兔子有 4 只脚，鸡有 2 只脚，共有 94 只脚"这些已知条件中的已知数 2、4 和 94 一样可以看作是"已知"的，这样问题中涉及的量(不论是已知的还是未知的)都处于相同的地位，因此思考起来直截了当，容易把数量之间的关系平铺直叙地用等式(即方程)"翻译"出来，这一点在代数解法二中更明显地反映出来：

根据上有 35 个头，列出 $x + y = 35$，

根据下有 94 只脚，列出 $4x + 2y = 94$.

列出方程组后，按规则求解是十分轻松的事，然而算术解法只能从已知条件出发，一步一步地用已知数的算式来求出未知数，思考起来当然就比较费力，而这些经过费力思考得到的算式却可以从代数解法中毫不费力地获得.

如从代数解法一中得出的 $x = (94 - 35 \times 2) \div (4 - 2)$ 和从代

数解法二中经(2)式除以2(即脚数减半)，(3)－(1)(即再减头数)，得出的 $x=\frac{94}{2}-35$ 就是解"鸡兔同笼"问题的两个算术解法中得出的算式.

从"鸡兔同笼"问题的算术解法与代数解法的比较中，我们看到了字母替代这种思维方法的优越性，字母表示数，从具体到抽象，使代数方法比算术方法更具有广泛的普遍性.

列出方程或方程组解应用问题，一般都可以用"以假代真，变假成真"的思维模式来解题."以假代真"就是把未知数 x、y 等看作"已知数"，将题目中的已知数和未知数的数量关系直截了当地翻译成"方程"，"变假成真"就是通过解方程或解方程组求出未知数 x、y 的确切值，从而使问题得到解决.然而应用问题的算术解法往往是因题而异，不同类的问题需要寻求不同的思考途径，一般没有固定的思考模式.这就是代数解法和算术解法的根本区别所在.

在这里，字母表示数发挥了巨大的威力.

字母不仅可以表示一个数，也可以表示一个式子.有时候，为了简便，在多项式因式分解、代数式的恒等变形或者解方程中，我们常常把一个式子当作一个整体看待，用一个新的字母表示，由这种整体处理的思维方法很自然地得出初中数学中常用的换元法，当然在"换元法"中也蕴涵着转换的思维方法.

例：有甲、乙、丙三种货物，若购甲3件、乙7件、丙1件共需315元；若购甲4件、乙10件、丙1件共需420元.问购甲、乙、丙各1件共需多少元？

解法一：设甲、乙、丙三种货物的单价分别为 x 元、y 元、z 元，根据题意得

$$\begin{cases}3x+7y+z=315, & (1)\\ 4x+10y+z=420. & (2)\end{cases}$$

要求的是 $x+y+z=?$ (3)

若按常规思路，分别求出 x、y、z 的值，再相加求和.本题给出的条件无法办到，怎么办？若把 $x+y+z=$ 看作一个整体，问题就容易解决.为此将方程变形为

$$\begin{cases}2(x+3y)+(x+y+z)=315,\\3(x+3y)+(x+y+z)=420.\end{cases}$$

用加减消元法消去 $x+3y$，就可得到 $x+y+z=105$. 即购甲、乙、丙各1件共需105元.

解法二：既然解法一已经把问题归结到求 $x+y+z=?$，于是我们设 $x+y+z=u$　　(3)

(1)、(2)、(3)组成一次方程组

$$\begin{cases}3x+7y+z=315, & (1)\\4x+10y+z=420, & (2)\\x+y+z=u. & (3)\end{cases}$$

(2)－(1)　得　$x+3y=105$.　　(4)

(2)－(3)　得　$3x+9y=420-u$.　　(5)

$\therefore 420-u=3(x+3y)=3\times 105$.

从而得到 $u=105$　即 $x+y+z=105$.

［评注］　本例的两个解法中，将 $x+3y$、$x+y+z$ 看作一个整体，这种整体处理的方法，看起来很平常，但在解题中却起了大作用. 日常生活中也有这样的例子. 要把大小不一，杂七杂八的小东西搬走是件麻烦的事，但是把它们集中在一个大箱子里再运走就省事得多. 这种用集装箱运送货物的方法启迪我们用整体思维的方法来解决数学问题，往往能取得出奇制胜的效果.

字母替代，从具体到抽象，从特殊到一般，从个别到整体，使代数比算术更具有广泛的应用性.

思考练习 1.1

1. 莉莉星期天早晨跟随妈妈到菜场买菜，身边带了一大沓零钱.

妈妈边走边问："你带了多少零钱？"

莉莉赶紧回答："30张角票，都是2角和5角的."

妈妈又问："钱数是多少？"

莉莉回答："共计9元9角."

妈妈还不满意，再问一句："有几张 2 角的，几张 5 角的？"

莉莉说："妈妈，走路的时候数钱容易丢，不数了，我能算出来."

莉莉是怎样计算的呢？

2. 乒乓球比赛场地上，共有 10 张球桌同时进行比赛，有单打，也有双打，共有 32 名球员出场比赛. 其中有几桌是单打，几桌是双打呢？

3. 某初中举办"初中生综合智力"竞赛，全卷共 25 题. 规定是：每答对一题得 5 分，每空一题不答就不给分(即得 0 分)；每答错一题，不仅不给分，反而要扣 2 分. 小明在这次竞赛中共得 94 分. 已知他只有两题空着没答，那么，他答对了多少道题？

4. 甲、乙两人相距 100 千米，两人同时出发，相向而行，甲每小时行 6 千米，乙每小时行 4 千米；甲带的一只狗，与甲一起出发，每小时跑 10 千米，碰到乙时它转身往甲方向跑，碰到甲时它又转身往乙方向跑，如此连续往返，直到甲与乙相遇为止，这时，狗一共跑了多少路？

5. 李林喝了一杯牛奶的$\dfrac{1}{6}$，然后加满水又喝了一杯的$\dfrac{1}{3}$，再加到满水后又喝了半杯，又加满水，最后把一杯都喝了，李林喝的牛奶多还是水多？

6. 已知：$\dfrac{xy}{x-y}=-\dfrac{1}{3}$，求$\dfrac{2x+3xy-2y}{x-y-2xy}$的值.

7. 已知：$a=\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right)\times\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}\right)$，

$$b=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right),$$

问 a 与 b 哪个大？大多少？

8. 求$\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$的值.

9. 有一个六位数的首位数是 1，若将 1 移到末位，其他数字顺序不变，则所得的数是原数的 3 倍，求原数.

10. 有两个三位数，它们的和是 999. 如果把较大数放在较小数的左边，点一个小数点在两数之间所成的数，正好等于把较小数放在较大数的左边，中间点一个小数点所成的数的 6 倍，那么这两个数的差是多少？