■ 高等学校理工科力学类规划教材

计算流体力学（第二版）

COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS

张廷芳 编著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

■ 高等学校理工科力学类规划教材

计算流体力学（第二版）

COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS

张廷芳 编著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

计算流体力学 / 张廷芳编著 .—2 版 .—大连:大连理工大学出版社,2007.4
ISBN 978-7-5611-0558-0

Ⅰ.计… Ⅱ.张… Ⅲ.计算流体力学—高等学校—教材
Ⅳ.O35

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 045726 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023
发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm 印张:24 字数:545 千字
1992 年 12 月第 1 版 2007 年 4 月第 2 版
2007 年 4 月第 2 次印刷

责任编辑:梁 锋 范业婷 责任校对:杜祖诚
封面设计:宋 蕾

ISBN 978-7-5611-0558-0 定 价:36.00 元

第2版说明

本书自第1版出版十多年以来，受到相关学校师生和科研工程技术人员的欢迎和认可。值此修订再版之际，向广大读者表示衷心的感谢。

虽然这期间计算流体力学学科研究和应用又有了很大发展，但本书的基本内容，包括各种流体力学数值计算方法、原理和流体力学问题的解题分析与应用，对于学习和从事本学科研究和应用的人员来讲，仍然是非常适用的。近年来，不断有读者来信来电索取本书或希望再版。应广大读者的要求，作者对本书作了部分修订后重新出版。

随着本学科的发展，作者已经收集并积累了一些相关资料和工程实例，准备继续修订和补充本书。希望广大读者继续关注本书，对其内容的修改提出意见和建议，以便使其内容更加丰富，更能符合广大读者的需求。请通过以下方式与我们联系：

邮箱 jcjf@dutp.cn
电话 0411-84707962 84708947

张廷芳

2007年4月

第1版前言

计算流体力学是一门新兴的学科，它是本世纪60年代中期开始形成并迅速发展起来的一门重要学科。现在，计算流体力学已广泛应用于水利、海洋、环境、航运、沿岸工程，以及土木、造船、航空等许多工程中，并且已被许多高等学校列为研究生和本科生的必修或选修课程。为了教学的需要，作者曾于1981年编写了流体力学的数值解法讲义，1983年又和李鉴初教授为全国高等学校水力学专题讲习班编写了计算水力学讲义。在此基础上，作者根据多年来的教学和科研实践以及近年来国内外有关计算流体力学的研究成果，重新修改写成这本计算流体力学。它可作为高等学校有关专业研究生、本科生计算流体力学课程的教材，也可供从事计算流体力学工作的工程技术人员参考。

求解流体力学问题虽然有些可以应用理论或实验的方法，但这对于大量实际流体力学问题来说，或是做不到，或是有困难，因此常常需要依赖于数值解法。目前，应用数值计算方法已能解决许多工程实际提出的各种类型的流体力学问题。

在计算流体力学的各种解法中，有限差分法作为一种主要的计算手段，从本世纪初开始一直用于流体力学的计算中，至今它仍是一种主要的计算方法，并在许多方面得到成功的应用。60年代后期，有限元法开始在计算流体力学中广泛应用，为许多复杂的流体力学问题提供了有效的计算方法。70年代后期 发展起来的边界元法和80年代初出现的有限分析法，也很快地在部分计算流体力学中得到应用。但后两种方法由于本身的特点，或发展较晚，其应用不如前两种方法普遍。可以预料，随着数值计算理论和电子计算机科学的不断发展和完善，各种计算方法还会继续发展和完善，也会出现一些新的计算方法。计算流体力学这门新的学科也将会得到更大的发展，前景是可观的。

本书内容分为流体力学的数值计算方法和流体力学问题的数值分析及应用两大部分。前五章为第一大部分，第一章介绍流体力学数值计算中要用到的变分法和加权余量法；第二章到第五章详细介绍各种数值计算的方法、原理和特点。其中第二章介绍有限差分法，有限体积法与有限差分法相似，也放在这一章中介绍。第三章介绍有限元法及插值函数；第四章介绍边界元法，同时介绍边界法；第五章介绍有限分析法。第二大部分内容为第六到第十一章，研究各种流体力学问题的不同数值解法。其中第六、七章详细讨论不可压非粘性流和粘性流的各种数值计算。第六章还给出三种计算方法求解势流的计算机程序，并对程序作了详细的注解。第七章还讨论了紊流流动的计算。第八、九、十章分别讨论对流扩散问题、浅水环流和势波运动的计算。第十一章讨论流体和弹性体相互作用的计算。在介绍各种流体力学问题的计算时，均附有计算实例。这些实例取之于国内外近几年研究的计算成果，可供读者进行数值计算时参考。

作者希望，通过本书能使读者学到并掌握求解流体力学问题的各种数值计算方法，以便能够得心应手地应用不同的计算方法去解决各个领域中流体力学的实际问题。

本书在编写过程中得到李鉴初教授和大连理工大学水力学教研室同志的关心和帮助；大连理工大学工程力学研究所赖国璋教授认真审读了本书，并提出了许多宝贵的意见。在此，作者谨向他们致以衷心的感谢。

由于计算流体力学的领域很广，涉及的学科又多，加之作者的学识浅，书中的错误和缺欠一定不少，敬请读者批评指正。

张廷芳

1990年10月

目　录

第一章 变分法和加权余量法

变分法和加权余量法是各种数值计算方法的数学基础和根据，为此在讨论和研究计算流体力学的各种数值计算方法之前，先介绍变分法和加权余量法。

§1－1 变 分 法

变分法是研究求取泛函极值的方法。在求解微分方程的边值问题时，应用变分的原理，可以通过求取相应泛函的极值来代替直接求解原微分方程式。变分法就是基于变分原理的有限元法的数学基础。

1. 变分法的基本概念

由一个函数或几个函数所确定的变量称为泛函。所谓泛函，就是函数的函数。变分问题就是求泛函的极大值或极小值的问题，称为泛函的极值问题。在工程上，有时会遇到求取泛函极值的问题，例如最速下降线问题。

如图 1－1 所示，设 A、B 两点在不同的铅直线上，现用某一曲线 $y=y(x)$ 连结 A、B 两点，使重物 m 沿此曲线无摩擦地自由下滑。显然，曲线 $y=y(x)$ 的形状不同，由 A 点自由下滑到 B 点所需的时间 t 也不同，试问沿哪一条曲线下滑所需时间 t 最少？

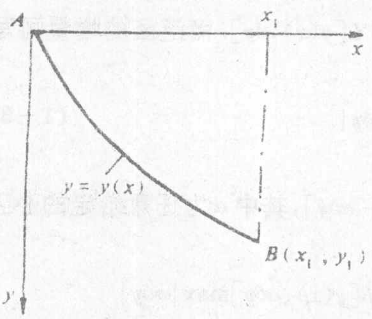

图 1－1 最速下降线问题

将上述问题写成数学形式。已知自由落体的速度 $u=\sqrt{2gy}=\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$，而沿曲线 $y=y(x)$ 的 $\mathrm{d}S=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x$，于是有

$$\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}}\mathrm{d}x$$

则从 A 点到 B 点自由下滑所需的时间为

$$t=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}}\mathrm{d}x \tag{1-1}$$

由此可见，从 A 点到 B 点自由下滑所需的时间 t 是曲线 $y=y(x)$ 的函数，是一个泛函。而最速下降线问题就是求 t 的极小值问题。

泛函和函数相似，它们之间一些对应的量如表 1－1 所示。

变分问题的解法也与求函数极值的解法相类似，下面对照函数的基本概念来介绍变分法的基本概念。

(a) 泛函的定义和泛函的连续性

对于某一类函数中的每一个函数 $y(x)$，都有与之对应的 J 值，则称变量 J 为依赖于 $y(x)$ 的泛函，记为 $J=J[y(x)]$。

表 1－1　泛函和函数对应的量

函　　数	泛　　函
函数 $f(x)$	泛函 $J[y(x)]$
变量 $y=f(x)$	变量 $J=J[y(x)]$
自变量 x	函数 $y(x)$
x 的增量 Δx	$y(x)$ 的变分 $\delta y(x)$
函数的微分 $\mathrm{d}y$	泛函的变分 δJ

对于任意给定的一个小正数 ε，总可以找到一个 δ，当 $|y(x)-y_1(x)|<\delta$，$|y'(x)-y'_1(x)|<\delta$，…，$|y^{(k)}(x)-y_1^{(k)}(x)|<\delta$ 时，可使

$$|J[y(x)]-J[y_1(x)]|<\varepsilon$$

则称泛函 $J[y(x)]$ 在 $y(x)=y_1(x)$ 处是 k 阶连续的。

(b) 泛函的增量和泛函的变分

泛函 $J[y(x)]$ 的宗量 $y(x)$ 的增量 $\Delta y(x)$ 是这个宗量某两个值之差，即 $\Delta y(x)=y(x)-y_1(x)$. 增量 $\Delta y(x)$ 很小时称为变分，用 $\delta y(x)$ 或 δy 来表示。$\delta y(x)$ 就是指 $y(x)$ 和跟它相接近的 $y_1(x)$ 之差，即 $\delta y(x)=y(x)-y_1(x)$.

当泛函的宗量 $y(x)$ 有增量或变分 $\Delta y(x)=\delta y(x)$ 时，则

$$\Delta J=J[y(x)+\delta y(x)]-J[y(x)] \tag{1-2}$$

就是泛函的增量，但是泛涵的增量，即使是很小时也不等于泛函的变分。这和函数的增量不等于函数的微分是一样的。

如果泛函的增量(1－2)可以表示为线性和非线性项之和，即

$$\Delta J=L[y(x),\delta y]+\beta[y(x)+\delta y]\max|\delta y|$$

其中 $L[y(x),\delta y]$ 是关于 δy 的线性泛函，$\beta[y(x),\delta y]$ 是关于 δy 的非线性泛函。当 $\max|\delta y|\to 0$ 时，$\beta[y(x),\delta y]\to 0$，则称泛函 $J[y(x)]$ 有变分，记作 $\delta J=L[y(x),\delta y]$. 而泛函的增量可写为

$$\Delta J=\delta J+\beta[y(x),\delta y]\max|\delta y| \tag{1-3}$$

因此，如果泛函的变分存在，它是泛函增量中的线性主部。

现在对泛函 $J=J[y(x)]$ 引入一个新的泛函 $J[y(x)+\alpha\delta y]$，其中 α 为任意给定的小正数。如泛函在线性主部意义下有变分存在，则有

$$\begin{aligned}J[y(x)+\alpha\delta y]&=J[y(x)]+L[y(x),\alpha\delta y]+\beta[y(x),\alpha\delta y]\max|\alpha\delta y|\\&=J[y(x)]+\alpha L[y(x)+\delta y]+\beta[y(x),\alpha\delta y]\max|\alpha\delta y|\end{aligned}$$

于是有 $J[y(x)+\alpha\delta y]$ 对 α 的导数为

$$\begin{aligned}\frac{\partial J[y(x)+\alpha\delta y]}{\partial\alpha}&=L[y(x),\delta y]+\beta[y(x),\alpha\delta y]\max|\delta y|\\&\quad+\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}(\beta[y(x),\alpha\delta y]\max|\delta y|)\end{aligned}$$

当 $\alpha\to 0$ 时，有

$$\operatorname*{Lim}_{\alpha\to 0}\frac{\partial J[y(x)+\alpha\delta y]}{\partial\alpha}=L[y(x),\delta y]=\delta J$$

由此可定义泛函 $J=J[y(x)]$ 的变分 δJ 等于 $J[y(x)+\alpha\delta y]$ 在 $\alpha=0$ 处对 α 的导数

$$\delta J = \frac{\partial J[y(x) + \alpha\delta y]}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} \tag{1-4}$$

这样定义的泛函变分，便于计算泛函的变分。

(c) 泛函的极值

如果具有变分的泛函 $J[y(x)]$ 在 $y = y_0(x)$ 处取极值，则在 $y = y_0(x)$ 上有

$$\delta J = \frac{\partial J[y(x) + \alpha\delta y]}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} = 0 \tag{1-5}$$

这是泛函取极值的必要条件。

关于泛函的极值问题除有极大值和极小值之分外，还有强极值和弱极值之分。对于只要求 $|y(x) - y_0(x)|$ 很小，不要求 $|y'(x) - y_0'(x)|$ 很小的与 $y = y_0(x)$ 有零阶接近度的一切曲线，泛函在曲线 $y = y_0(x)$ 上达到极值，这类变分问题称为强变分，其极值称为强极值。对于要求 $|y(x) - y_0(x)|$ 和 $|y'(x) - y_0'(x)|$ 都很小的与 $y = y_0(x)$ 有一阶接近度的一切曲线，泛函在曲线 $y = y_0(x)$ 上达到极值，则把这类变分问题称为弱变分，其极值称为弱极值。泛函在 $y = y_0(x)$ 上有强极值就必然有弱极值，反之则不然。强极值和弱极值的差别在讨论极值的必要条件时不很重要，但在研究极值的充分条件时则是重要的。

2. 泛函的变分问题和 Euler 方程

(1) 一维问题的 Euler 方程

现在研究只有一个独立变量的泛函实现极值的条件。设泛函

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x \tag{1-6}$$

式中 F 为 x，y 和 $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的函数。假定泛函有极值，并在 $y = y(x)$ 上实现它的极值。如图 1-2 所示，取

$$\bar{y}(x) = y(x) + \alpha\delta y(x)$$

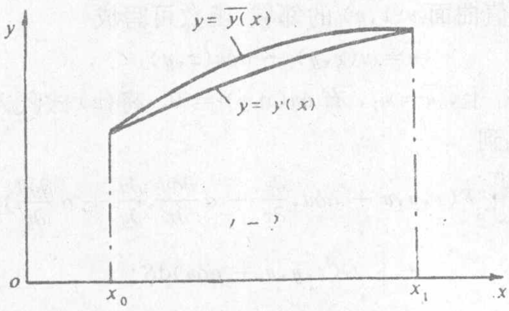

图 1-2 $\bar{y}(x)$ 曲线族

其中 $\delta y(x_0) = 0$，$\delta y(x_1) = 0$. $\bar{y}(x)$ 代表一族通过 (x_0, y_0) 和 (x_1, y_1) 的曲线。将 $\bar{y}(x)$ 代入(1-6)，有

$$J(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y')\mathrm{d}x \tag{a}$$

当 $\alpha = 0$ 时，$y(x) = \bar{y}(x)$，泛函 $J(\alpha)$ 取得极值。其实现极值的必要条件是泛函的变分等于零

$$\delta J(\alpha) = \frac{\partial J}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} = 0$$

根据积分符号下的微分方法，由(a)式

$$\delta J(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} F(x, \bar{y}, \bar{y}')\mathrm{d}x \tag{b}$$

式中 $\bar{y} = y(x) + \alpha\delta y(x)$，$\bar{y}' = y'(x) + \alpha\delta y'(x)$。而

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{\partial F}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{y}}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'}\frac{\partial \bar{y}'}{\partial \alpha} = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'$$

代入(b)式，并令 $\alpha=0$，得到

$$\delta J(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]\mathrm{d}x \tag{c}$$

对上式右端第二项进行分部积分，并考虑到 $\delta y(x_0)=\delta y(x_1)=0$，有

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\,\mathrm{d}x=\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\delta y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\mathrm{d}x$$
$$=-\int_{x_0}^{x_1}\delta y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\mathrm{d}x$$

代入(c)式，得到泛函实现极值的条件为

$$\int_{x_0}^{x_1}\delta y\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\mathrm{d}x=0$$

由于 δy 是任意的，由上式可得到泛函 $J[y(x)]$ 在 $y(x)$ 上实现极值的必要条件为

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \tag{1-7}$$

这就是著名的 Euler-Lagrange 方程，简称 Euler 方程。Euler 方程(1－7)的展开式为

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y'}-y'\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}-y''\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}=0 \tag{1-8}$$

由上可知，泛函 $J[y(x)]$ 在 $y(x)$ 上实现极值的必要条件是 $y(x)$ 满足 Euler 方程(1－7)。Euler 方程的积分曲线 $y(x)$ 称为极值曲线，只有在极值曲线上泛函才能达到极值。

(2) 二维和三维问题的 Euler 方程

考虑二维边值问题，设泛函

$$J(u)=\iint_D F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{S_2}G(x,y,u)\mathrm{d}S \tag{1-9}$$

其中 $u=u(x,y)$，$G(x,y,u)$ 是沿边界 S_2 取值的函数。这里假定 u 在边界 S_1 上的函数值是给定的，在边界 S_2 上是未定的，如图 1－3 所示。

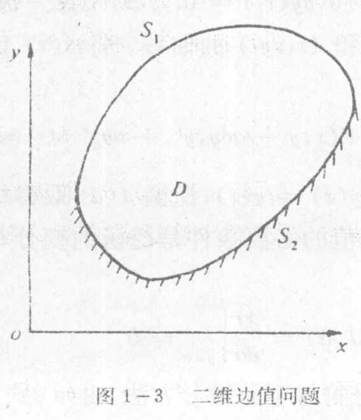

图 1－3　二维边值问题

假定泛函 $J(u)$ 存在，并在 $u=u(x,y)$ 上实现极值，在极值曲面 $u(x,y)$ 的邻域，函数可写成

$$\bar{u}=u(x,y)+\alpha\delta u(x,y) \tag{a}$$

在边界 S_1 上，$\bar{u}=u_1$，有 $\delta u(x,y)=0$。将(a)式代入(1－9)式得到

$$J(\alpha)=\iint_D F\left(x,y,u+\alpha\delta u,\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha\frac{\partial\delta u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}+\alpha\frac{\partial\delta u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$+\int_{S_2}G(x,y,u+\alpha\delta u)\mathrm{d}S \tag{b}$$

上式的泛函为参数 α 的函数。由积分符号下求微分的方法，得到

$$\delta J(\alpha)=\iint_D\frac{\partial}{\partial\alpha}F\left(x,y,\bar{u},\frac{\partial\bar{u}}{\partial x},\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{S_2}\frac{\partial}{\partial x}G(x,y,\bar{u})\mathrm{d}S$$

根据(a)式，当 $\alpha=0$ 时，则上式可得

$$\delta J=\iint_D\left[\frac{\partial F}{\partial u}\delta u+\frac{\partial F}{\partial u_{,x}}\frac{\partial\delta u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u_{,y}}\frac{\partial\delta u}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\int_{S_2}\frac{\partial G}{\partial u}\delta u\mathrm{d}S \tag{c}$$

其中 $u_{,x}=\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$u_{,y}=\dfrac{\partial u}{\partial y}$. 再由分部积分

$$\frac{\partial F}{\partial u_{,x}}\frac{\partial\delta u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta u\frac{\partial F}{\partial u_{,x}}\right)-\delta u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{,x}}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_{,y}}\frac{\partial\delta u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\delta u\frac{\partial F}{\partial u_{,y}}\right)-\delta u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{,y}}\right)$$

代入(c) 式后，得

$$\delta J=\iint_D\delta u\left[\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{,x}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{,y}}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta u\frac{\partial F}{\partial u_{,x}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\delta u\frac{\partial F}{\partial u_{,y}}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\int_{S_2}\frac{\partial G}{\partial u}\delta u\delta x\mathrm{d}S \tag{d}$$

令上式右边第二项中的 $\delta u\dfrac{\partial F}{\partial u_{,x}}=Q$，$\delta u\dfrac{\partial F}{\partial u_{,y}}=P$，根据 Green 定理

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_S(Q\mathrm{d}y-P\mathrm{d}x)$$

则有

$$\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta u\frac{\partial F}{\partial u_{,x}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\delta u\frac{\partial F}{\partial u_{,y}}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_S\delta u\left[\frac{\partial F}{\partial u_{,x}}\mathrm{d}y-\frac{\partial F}{\partial u_{,y}}\mathrm{d}x\right]$$

其中 $S=S_1+S_2$. 考虑到边界 S_1 上的 $\delta u=0$，上式右边只剩下沿边界 S_2 上的线积分。在边界上 $\mathrm{d}y=n_x\mathrm{d}S$，$\mathrm{d}x=-n_y\mathrm{d}S$. 这里 $n_x=\cos(n,x)$，$n_y=\cos(n,y)$，为边界外法线的方向余弦。于是由(d) 式得到

$$\delta J=\iint_D\delta u\left[\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{,x}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{,y}}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\int_{S_2}\delta u\left[\frac{\partial G}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial u_{,x}}n_x+\frac{\partial F}{\partial u_{,y}}n_y\right]\mathrm{d}S$$

考虑到 δu 在域 D 内和边界 S_2 上都是任意的，要使泛函的变分 $\delta J=0$，必须使得下面的两式成立

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{,x}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{,y}}\right)=0,\quad(\text{在 } D \text{ 内})\\&\frac{\partial G}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial u_{,x}}n_x+\frac{\partial F}{\partial u_{,y}}n_y=0,\quad(\text{在 } S_2 \text{ 上})\end{aligned}\right\} \tag{1-10}$$

这便是二维问题的 Euler 方程。

因此由(1-9) 所给的泛函，如在 $u=u(x,y)$ 上取得极值，函数 $u(x,y)$ 必须满足 Euler 方程(1-10).

用同样的方法可以导出三维问题的 Euler 方程。