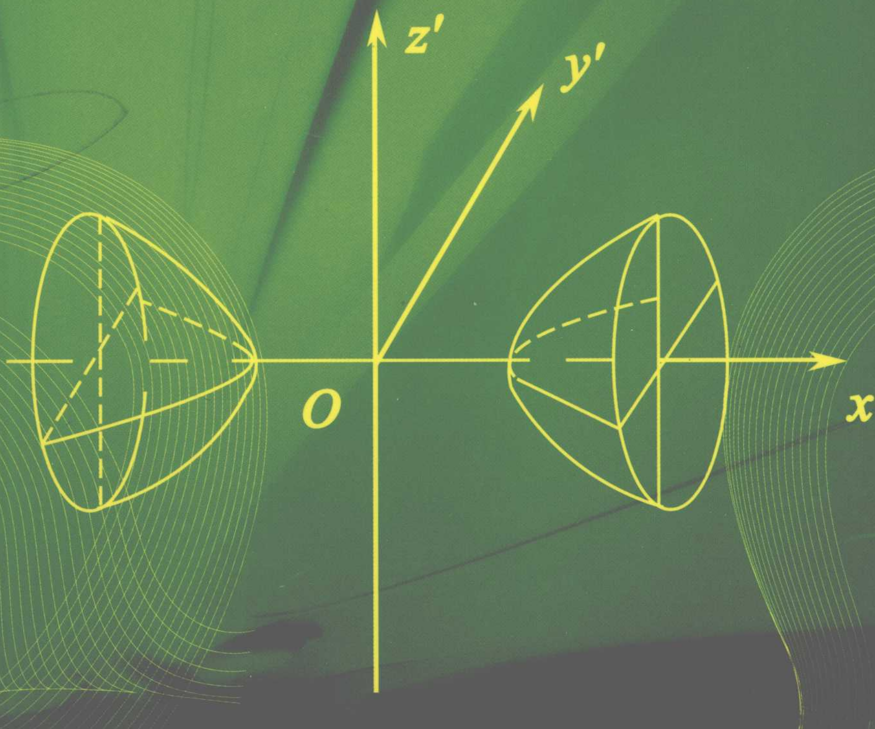
21世纪

高等学校工科数学系列辅导教材

线性代数学习指导与习题解析

宋岱才 路永洁 田秋菊 编著



化学工业出版社

21世纪高等学校工科数学系列辅导教材

线性代数学习指导与习题解析

宋岱才　路永洁　田秋菊　编著
刘国志　陈明明　主审

化学工业出版社
·北京·

线性代数是大学数学教育的重要基础课程之一，也是全国工科硕士研究生入学考试的必考数学内容之一。

本书共五章和四套自测题。具体包括行列式、矩阵及其运算，向量组的线性相关性与矩阵的秩，线性方程组，相似矩阵及其二次型。每章包括内容提要、典型例题、练习题和练习题参考答案。其中习题形式不仅有一般的计算题、证明题，而且还搜集了大量的填空题和选择题以供读者学习和练习。

本书可作为大学理工科与经济、管理等学科线性代数的辅导教材，也可作为参加自学考试及考研复习人员的自学用书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数学习指导与习题解析/宋岱才，路永洁，田秋菊编著.—北京：化学工业出版社，2008.5
ISBN 978-7-122-02755-9
21世纪高等学校工科数学系列辅导教材

Ⅰ.线… Ⅱ.①宋…②路…③田… Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第060181号

责任编辑：唐旭华　　文字编辑：宋湘玲　叶晶磊
责任校对：周梦华　　装帧设计：王晓宇

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
787mm×1092mm　1/16　印张9½　字数230千字　2008年8月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：17.00元

序

在工程问题中，随时都会产生数量关系和相互作用，而这正是数学所研究的重要内容。数学应用的第一步就是对实际问题分析其对象内在的数量关系，反映这种内在数量关系的过程就是数学模型。数学模型按类型可以分为三类：第一类为确定性模型，即模型所反映的实际问题中的关系具有确定性，对象之间的联系是必然的。微积分、线性代数等是其建模的基本数学工具。第二类为随机性模型，其所反映的实际问题具有偶然性或随机性。概率论与数理统计以及随机过程是其建模的基本数学方法。第三类为模糊性模型，该模型所反映的实际问题中的关系呈现模糊性。模糊数学理论是其建模的基本数学手段。

对工科高等学校各专业本科生而言，公共数学基础课程一般包括“高等数学”、“线性代数”、“概率论与数理统计”三门课程，它们都是必修的重要基础理论课程。通过这些课程的学习，学生可以掌握这三门课程的基本概念、基本理论、基本方法和运算技能，为今后学习各类后续课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的数学基础。在学习过程中，通过数学知识与其实际应用的有机结合，可以培养学生抽象思维和逻辑推理的理性思维能力，综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力以及较强的自主学习能力，并逐步培养学生的探索精神和创新能力。

近年来随着普通高校教育规模的不断扩大，受教育群体的不同层次对数学的学习也提出了不同的要求，因此出版一套有针对性的辅助教材就显得十分必要。尽管目前数学教学辅助资料很多，但真正符合现在大学生学习数学需求的资料并不多。因此，辽宁石油化工大学理学院数学系的广大教师结合他们多年的教学经验，编写了这套数学辅导系列教材，以期帮助初学大学数学的学生学好数学基础课程。

这套数学辅导系列教材包括《高等数学学习指导与习题解析》、《线性代数学习指导与习题解析》、《概率论与数理统计学习指导与习题解析》，书中内容完全按照教育部非数学专业数学教学指导委员会最新制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”所编写。该系列教材吸收了国内外同类辅导教材的精华，特别是采纳了近几年一批“面向21世纪课程”教材中的习题，同时也凝结了作者多年来在大学数学教学方面积累的经验，总结了历年数学考研辅导班中学生反映的共性问题。编写中充分考虑了工科数学基础课程的系统性，注意到了时代的特点，以及与后续课程的衔接。本着加强基础、强化应用、整体优化、注意后效的原则，做到了科学性、系统性和可行性的统一，传授数学知识和培养数学素养的统一。注重理论联系实际，通过实际例题展示数学方法在工程领域中的应用。

本系列辅导教材在体系与内容编排方面，认真考虑了工科学生数学教材多采用同济大学《高等数学》、《线性代数》以及浙江大学《概率论与数理统计》的情况，为便于学习，本系列辅导教材所列章节与之相配套。同时考虑到学生不同群体对数学学习的不同需求，书中所选择的习题对学有余力的同学可试做教材的全部练习题，其他同学可以根据自身的实际学习能力选择适当练习题试做。每章后面配备了练习题以及习题参考答案，书后给出了几套自测题及参考答案，供读者参考。

数学基础知识和基本方法的训练，是能力训练的主要手段，也是各类不同专业教学的迫

切需要。相信这套系列辅导教材在具体的使用过程中应该获得成功，学习者的渴望会得到满足，教育者的愿望会得以实现。

吕方
2008 年 3 月于辽宁大学

前　言

线性代数是高等工科院校学生的一门重要基础课程，也是全国工科硕士研究生入学考试的必考数学内容之一。它是自然科学、社会科学、计算机技术和数学科学的重要理论基础和方法。但由于本门课程内容丰富，应用和考研考试要求面较广，所以很多内容和方法不能在教学时数内完成。加之课程中的概念抽象，运算容易出错，多数学生感到难学，做题时甚至感觉无从下手。为了帮助广大同学充分利用自习时间来自学以及帮助准备报考研究生的同学系统复习《线性代数》，我们根据多年的教学经验与体会，编写了这本《线性代数学习指导与习题解析》，以期对学习"线性代数"课程的同学有所帮助。

为了使学生能正确理解和掌握这门课程的内容，本书在内容表达形式上不仅有内容提要和一般的计算题与证明题，而且还搜集了大量的填空题、选择题，并增加了释疑解难内容。另外，笔者从 1987 年到 2008 年以来全国工学、经济学硕士研究生入学试题中摘录了《线性代数》课程的部分试题。书中每章附有练习题及其练习题参考答案与提示，初学者只要求试做练习题的前面部分，后面的习题可作为复习考研的同学参考试做。所以本书不仅可以作为高等学校本科和专科学生学习"线性代数"课程的补充教材，同时也可作为参与自学考试及考研学生复习本课程的辅导教材。

全书由宋岱才教授编写，田秋菊老师提供了全部自测题，最后由路永洁教授修改定稿。刘国志、陈明明教授主审。本书在编写过程中得到辽宁石油化工大学教务处和理学院广大教师的支持和帮助。编者在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，难免有不足之处，希望广大读者批评指正。

编　者

2008 年 3 月

目　　录

第一章　行　列　式

本章主要介绍行列式的定义、性质与计算，由于二、三阶行列式应用最多，务求熟练掌握. n 阶行列式的计算是个难点，这里将举出一些典型例子，介绍其常见的一些计算方法，希望读者仔细体会.

一、内容提要

1. n 阶行列式的定义

（1）排列和逆序

由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组$(i_1,i_2,i_3,\cdots,i_n)$称为一个 n 元排列. 所有不同的 n 元排列共有 $n!$ 个. 在一个排列$(i_1,i_2,i_3,\cdots,i_n)$中，如果一个大的数排在小的数前面，就称这两个数构成一个逆序. 一个排列中逆序的总数称为此排列的逆序数. 通常记为 $\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)$. 若一个排列的逆序数为奇数，则称这个排列为奇排列，否则称为偶排列.

在一个排列$(i_1,i_2,i_3,\cdots,i_n)$中，如果交换任意两个数的位置，称为对排列做一次对换. 对换改变排列的奇偶性.

（2）n 阶行列式的定义

由 n^2 个数排成 n 行 n 列的数表，记为 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$. 做出表中所有取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，就称为此行列式的值. 这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，该项的前面带正号；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，该项的前面带负号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 所有不同的 n 元排列求和.

注：由于 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 所有不同的 n 元排列共有 $n!$ 项，所以 n 阶行列式的值共有不同行、不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的 $n!$ 项的代数和组成.

2. 余子式、代数余子式

在行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行及第 j 列，由剩下的元素按原位置排成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}. 又称$(-1)^{i+j}M_{ij}$为元素 a_{ij} 的代数余子式，记为 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

3. 行列式的性质

性质 1　行列互换，行列式的值不变.

注意　该性质表明了行列式中行、列地位的对称性. 也就是说，行列式中有关行的性质对列也同样成立.

性质 2　对换行列式的两行（列），行列式改变符号.

推论　如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零.

性质 3　用数 k 乘行列式的某一行（列），等于用数 k 乘以此行列式.

推论　行列式中某一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式记号外面.

性质 4　行列式中，如果有两行（列）的对应元素成比例，则此行列式等于零.

性质 5　若行列式的某一行（列）的元素都是两个数之和，则此行列式等于两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6　把行列式某一行（列）的若干倍加到另一行（列）上去，行列式不变.

4. 行列式按行（列）展开定理

n 阶行列式等于它的任一行（列）的所有元素与它们对应的代数余子式的乘积之和.

推论 1　n 阶行列式中某一行（列）的每个元素与另一行（列）相应元素的代数余子式的乘积之和等于零.

推论 2　在 n 阶行列式中，若有一行（列）除去一个元素 $a_{ij}\neq 0$ 外其余元素均为零，则此行列式的值等于这个非零元素与其代数余子式的乘积，即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

以上结论用公式表示为：

设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=\begin{cases} D, & i=k \\ 0, & i\neq k \end{cases} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=\begin{cases} D, & j=k \\ 0, & j\neq k \end{cases} \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

5. 几种特殊行列式的结论

（1）对角行列式、上（下）三角行列式的值等于主对角线上元素之积

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \cdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

（2）两个特殊的展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

(3) 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j).$$

(4) 关于副对角线的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

6. 行列式的计算方法

(1) 基本方法

① 直接利用行列式定义或行列式性质算得结果；

② 用行列式的性质，化行列式成三角形行列式；

③ 按某一行（列）展开.

(2) 常用方法

① 递推法；

② 数学归纳法；

③ 利用一些已知结论，如范德蒙行列式性质和特殊行列式.

7. 克莱姆法则

(1) 如果非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1-1}$$

的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$，则方程组有唯一解 $x_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots,n)$. 其

3. 行列式的性质

性质 1　行列互换，行列式的值不变.

注意　该性质表明了行列式中行、列地位的对称性. 也就是说，行列式中有关行的性质对列也同样成立.

性质 2　对换行列式的两行（列），行列式改变符号.

推论　如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零.

性质 3　用数 k 乘行列式的某一行（列），等于用数 k 乘以此行列式.

推论　行列式中某一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式记号外面.

性质 4　行列式中，如果有两行（列）的对应元素成比例，则此行列式等于零.

性质 5　若行列式的某一行（列）的元素都是两个数之和，则此行列式等于两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6　把行列式某一行（列）的若干倍加到另一行（列）上去，行列式不变.

4. 行列式按行（列）展开定理

n 阶行列式等于它的任一行（列）的所有元素与它们对应的代数余子式的乘积之和.

推论 1　n 阶行列式中某一行（列）的每个元素与另一行（列）相应元素的代数余子式的乘积之和等于零.

推论 2　在 n 阶行列式中，若有一行（列）除去一个元素 $a_{ij}\neq 0$ 外其余元素均为零，则此行列式的值等于这个非零元素与其代数余子式的乘积，即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

以上结论用公式表示为：

设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=\begin{cases} D, & i=k \\ 0, & i\neq k \end{cases} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=\begin{cases} D, & j=k \\ 0, & j\neq k \end{cases} \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

5. 几种特殊行列式的结论

（1）对角行列式、上（下）三角行列式的值等于主对角线上元素之积

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \cdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

（2）两个特殊的展开式

注：①用行列式性质计算行列式时，为减少重复书写，通常计算一步行列式可以多次利用行列式性质；②以后为简单起见，行列式的第 i 行（列）的 k 倍加到第 j 行（列）上，常记为 kr_i+r_j（或 kc_i+c_j）.

（4）若 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & x & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}=0$，则 $x=$________.

解：方法一　用 $(-5)r_1+r_2$，然后按第 1 列展开，得

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & x & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & x & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}=1\cdot(-4)\begin{vmatrix} x & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-4(5x-12)=0,$$

所以
$$x=\frac{12}{5}.$$

方法二　直接用几种特殊行列式的结论中（2），得到

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & x & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-4(5x-12)=0$$

得到答案，$x=\dfrac{12}{5}$.

（5）$D=\begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=$________.

解：方法一　直接按行列式展开公式及对角行列式的结论得

$$D=n\cdot(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot(-1)^{n-1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & n-1 \end{vmatrix}=(-1)^n n!.$$

方法二　注意到，所有 $n!$ 项中，不等于零的项只有 $a_{11}a_{23}a_{34}\cdots a_{n-1,n}a_{n,2}$ 这一项，它为 $(-1)^{\tau(1,3,4,\cdots n,2)}n!=(-1)^{n-2}n!=(-1)^n n!$.

（6）在函数 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -x & -x & x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中，x^3 的系数为________.

解：方法一　根据行列式的定义考察能组成 x^3 的项．由于行列式的 $n!$ 中每一项都是不同行、不同列的 n 个元素的乘积，在此组成 x^3 的项中必须每项都含有 x，由于第一、三行中各只含有一个带 x 的项，即 a_{11} 和 a_{33}，所以根据不同行、不同列的原则，带有 a_{11} 和 a_{33} 的项只能是 $a_{11}a_{22}a_{33}$，又因为这一项的符号为正，所以此项为 $2x\cdot -x\cdot x=-2x^3$，得 x^3 的系数为 -2.

方法二　要求 x^3 的系数，只需考察组成 x^3 的项即可.

事实上，只需考察 $2x\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -x & x \\ 2 & x \end{vmatrix}=-2x^3-4x^2$，或 $x\cdot(-1)^{3+3}$

中 D_j 是把系数行列式 D 中的第 j 列元素换为常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 所构成的行列式.

(2) 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases} \tag{1-2}$$

的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$，则方程组有唯一零解.

推论 1　如果非齐次线性方程组（1-1）的系数行列式 $D=0$，那么它无解或有无穷多解.

推论 2　如果齐次线性方程组（1-2）的系数行列式 $D=0$，那么它有非零解.

注：以上线性方程组是针对 n 个未知数 n 个方程组成的方程组而言，当方程的个数与未知数的个数不相等时，要按第四章的方法解线性方程组.

二、典型例题

1. 填空题

(1) 7 阶行列式中项 $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$ 的符号是__________.

解：方法一　将以上的项，按行标排列为自然排列重新排列，排列后为 $a_{16}a_{27}a_{33}a_{44}a_{55}a_{61}a_{72}$. 考虑列标排列 6,7,3,4,5,1,2 的逆序数 $\tau(6734512)=5+5+2+2+2+0=16$，排列 6,7,3,4,5,1,2 为偶排列，所以其符号为“+”.

方法二　将以上的项，按列标排列为自然排列重新排列，排列后为 $a_{61}a_{72}a_{33}a_{44}a_{55}a_{16}a_{27}$，考虑行标排列 6,7,3,4,5,1,2 的逆序数 $\tau(6734512)=5+5+2+2+2+0=16$，排列 6,7,3,4,5,1,2 为偶排列，所以其符号为“+”.

方法三　分别考虑行标排列 3,1,7,2,5,6,4 的逆序数 $\tau(3172564)=2+0+4+0+1+1=8$，以及列标排列 3,6,2,7,5,1,4 的逆序数 $\tau(3627514)=2+4+1+3+2+0=12$，二者逆序数之和为 12+8=20（偶数），从而其符号为“+”.

(2) $\tau(2,4,6,\cdots,2n,2n-1,\cdots,3,1)=$__________.

解：$\tau(2,4,6,\cdots,2n,2n-1,\cdots,3,1)=1+2+\cdots+n+(n-1)+\cdots+2+1=n^2$.

(3) $D=\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}=$__________.

解：注意到行列式中第 1 列的三个数分别与 100,200,300 较接近，而第 3 列的三个数分别与 200,400,600 较接近，所以由行列式的性质知，将第二列的 −1 倍加到第 1 列上，将第二列的 −2 倍加到第 3 列上，第二列再提取公因数 100，则有

$$D=\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}=100\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix},$$

对于最后的行列式，可以将第 3 行加到第 2 行上，同时将第 3 行的 −3 倍加到第 1 行上，再按第 1 列展开，得

$$D=100\begin{vmatrix} 0 & -8 & 4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}=100\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -8 & 4 \\ 5 & -5 \end{vmatrix}=100\cdot(40-20)=2000.$$

2. 选择题

(1) 与三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 等值的行列式为__________.

(A) $\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$; (B) $\begin{vmatrix} -a_{11} & a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix}$;

(C) $\begin{vmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{12}+a_{13} & a_{13}+a_{11} \\ a_{21}+a_{22} & a_{22}+a_{23} & a_{23}+a_{21} \\ a_{31}+a_{32} & a_{32}+a_{33} & a_{33}+a_{31} \end{vmatrix}$; (D) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+a_{13} & a_{11}+a_{12}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+a_{23} & a_{21}+a_{22}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+a_{33} & a_{31}+a_{32}+a_{33} \end{vmatrix}$.

解: 由行列式性质，得知 (B) 的第 1、第 3 列均有公因数 -1，提取后为 $(-1)^2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，所以应选 (B). 而 (A) 与原行列式相差一个负号. 对于 (C) (D) 按行列式性质展开后可以发现与原行列式不相等.

(2) 下列行列式中，哪一个不等于零__________.

(A) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; (B) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

(C) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$; (D) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

解: 方法一 由于四个行列式形状是相同的，对角线上的数是一样的 (都是 1)，故可以做一个下列行列式，

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & b_1 \\ b_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & 1 \end{vmatrix}，按第 1 行展开后，得 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & b_1 \\ b_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & 1 \end{vmatrix} = 1-b_1b_2b_3b_4,$$

由此得解，应选 (B).

方法二 逐个计算也可得知应选 (B).

(3) 已知三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=3$，则 $\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{31}-5a_{21} & 3a_{21} \\ a_{12} & 2a_{32}-5a_{22} & 3a_{22} \\ a_{13} & 2a_{33}-5a_{23} & 3a_{23} \end{vmatrix}=$__________.

(A) 18; (B) -18; (C) -9; (D) 27 .

解: 先由行列式的性质 5，将 $\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{31}-5a_{21} & 3a_{21} \\ a_{12} & 2a_{32}-5a_{22} & 3a_{22} \\ a_{13} & 2a_{33}-5a_{23} & 3a_{23} \end{vmatrix}$ 分解成两个行列式之和，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{31}-5a_{21} & 3a_{21} \\ a_{12} & 2a_{32}-5a_{22} & 3a_{22} \\ a_{13} & 2a_{33}-5a_{23} & 3a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{31} & 3a_{21} \\ a_{12} & 2a_{32} & 3a_{22} \\ a_{13} & 2a_{33} & 3a_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & -5a_{21} & 3a_{21} \\ a_{12} & -5a_{22} & 3a_{22} \\ a_{13} & -5a_{23} & 3a_{23} \end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 2x & 1 \\ -x & -x \end{vmatrix}=-2x^3+x^2$ 中 x^3 的系数即可.

得 x^3 的系数为 -2.

(7) 设 a,b 为实数，则当 $a=$__________,$b=$__________ 时，行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0$.

解：将行列式按第 3 列展开，得 $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}=-(a^2+b^2)$，所以应填 $a=0,b=0$.

(8) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}=$__________.

解：因为所有 $4!=24$ 项中，只有 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$ 这一项不为零，且列标排列为 4,1,2,3，其为奇排列，符号为负，所以原式 $=-1\cdot2\cdot3\cdot4=-24$.

(9) 已知 $\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix}=1$，则 $\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$__________.

解：考察所求行列式，可见先进行 $3r_3+r_1$，即得 $\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$，为了利用已知行列式，再将 a_{22} 位置元素化为零，为此进行 $(-2)r_3+r_2$，得到

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

这正是已知行列式的转置行列式. 再由性质 1 得

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

(10) $D_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=$__________.

解：按第 1 列展开，得

$$D_n=a\cdot\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}+b(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$=a^n+(-1)^{n+1}b^n.$$

(A) $\pm1,\pm\sqrt{3}$；　(B) $\pm\sqrt{3}$，$\pm\sqrt{5}$；　(C) $\pm\sqrt{5}$，$\pm\sqrt{2}$；　(D) $\pm1,\pm\sqrt{5}$.

解：注意到，方程为四次方程，故有四个根，又由行列式的性质知，当 $3-x^2=2$，及 $5-x^2=2$ 时，行列式中有两行相同，此时行列式等于零. 所以得 $x^2=1$ 和 $x^2=3$，从而 $x=\pm1,\pm\sqrt{3}$，应选（A）.

(7) 已知线性方程组$\begin{cases}\lambda x-y=a\\-x+\lambda y=b\end{cases}$有唯一解，则 λ 满足__________.

(A) 为任意实数；　(B) 等于 ±1；　(C) 不等于 ±1；　(D) 不等于零.

解：由克莱姆法则知，此时系数行列式必有$\begin{vmatrix}\lambda & -1\\-1 & \lambda\end{vmatrix}\neq0$，否则无解或有无穷多解. 所以 $\lambda\neq\pm1$，应选（C）.

(8) 设线性方程组$\begin{cases}bx-ay=-2ad\\-2cy+3bz=bc\\cx+az=0\end{cases}$，则__________.

(A) 当 a,b,c 取任意非零实数时，方程组均有解；　(B) 当 $a=0$ 时，方程组无解；

(C) 当 $b=0$ 时，方程组无解；　(D) 当 $c=0$ 时，方程组无解.

解：方程组的系数行列式为$\begin{vmatrix}b & -a & 0\\0 & -2c & 3b\\c & 0 & a\end{vmatrix}=-5abc$，由克莱姆法则知，当 a,b,c 取任意非零实数时，方程组有唯一解，当然有解. 而当 a,b,c 中有一个为零时，它或无解或有无穷多解，不能确定是否无解. 事实上，由第四章的结论可知，当 a,b,c 中有一个为零时，方程组有无穷多解. 所以应选（A）.

(9) 当 $\lambda=$__________时，齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+\lambda x_3=0\\2x_1-x_4=0\\\lambda x_1+x_2=0\\x_3+2x_4=0\end{cases}$有非零解.

(A) $\frac{1}{2}$；　(B) $-\frac{1}{2}$；　(C) $\frac{1}{4}$；　(D) $-\frac{1}{4}$.

解：方程组的系数行列式为$\begin{vmatrix}1 & 0 & \lambda & 0\\2 & 0 & 0 & -1\\\lambda & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & \lambda & 0\\2 & 0 & -1\\0 & 1 & 2\end{vmatrix}=1-4\lambda$，由克莱姆法则知，当系数行列式为零时，齐次线性方程组有非零解，所以 $\lambda=\frac{1}{4}$，应选（C）.

(10) 对于非齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

，下列结论不正确的是__________.

(A) 若方程组有解，则系数行列式 $D\neq0$；

(B) 若方程组无解，则系数行列式 $D=0$；

(C) 方程组有解时，或者有唯一解，或者有无穷多解；

第 2 个行列式中提取公因数−5 后发现最后两列成比例，所以等于零．第 1 个行列式提取公因数 2 与 3 后，得

$$原式=6\begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & a_{21} \\ a_{12} & a_{32} & a_{22} \\ a_{13} & a_{33} & a_{23} \end{vmatrix}=6\cdot(-3)=-18，应选（B）.$$

(4) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}=$ ________.

(A) $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$； (B) $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$；

(C) $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$； (D) $(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3)$.

解：直接将行列式按第 1 行展开，有 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}=a_1a_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}-b_1b_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}$

$=a_1a_4(a_2a_3-b_2b_3)-b_1b_4(a_2a_3-b_2b_3)$，所以应选（D）.

(5) $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}=0$ 的根的个数为________.

(A) 1； (B) 2； (C) 3； (D) 4.

解：在此求方程 $f(x)=0$ 的根的个数，实际是求多项式的次数．先进行$(-1)c_1+c_2$，$(-1)c_1+c_3$，$(-1)c_1+c_4$，可得 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}$，再进行 c_2+c_4，得

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix},$$

最后进行$(-1)r_2+r_1$，得

$$f(x)=\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix},$$

所以 $f(x)=-x\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}=0$，实际是一个二次多项式，故有 2 个根，应选（B）.

(6) 方程 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3-x^2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 5-x^2 \end{vmatrix}=0$ 的根为________.