全国高等农林院校“十一五”规划教材

概率论与数理统计

苏金梅　德　娜　主编

中国农业出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

概率论与数理统计

苏金梅　德　娜　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 / 苏金梅，德娜主编.—北京：中国农业出版社，2007.12
全国高等农林院校“十一五”规划教材
ISBN 978-7-109-11976-5

Ⅰ.概… Ⅱ.①苏…②德… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 189788 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）
（邮政编码 100026）
责任编辑 朱 雷

中国农业出版社印刷厂印刷　新华书店北京发行所发行
2007 年 12 月第 1 版　2007 年 12 月北京第 1 次印刷

开本：720mm×960mm 1/16　印张：15.25
字数：268 千字
定价：22.00 元

内容提要

本教材是全国高等农林院校“十一五”规划教材．内容分为两大部分：概率论和数理统计．前五章为概率论部分，其主要内容有随机事件及其概率、随机变量及其概率分布、多维随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理；后五章为数理统计部分，内容包括数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析．本教材可作为高等农林院校概率论与数理统计课程教材，也可作为科技人员参考书．

编 写 人 员

主　编　苏金梅　德　娜

副主编　王万雄　李　炜　吕　雄　袁　星

编　者　（按姓氏笔画为序）

王万雄　王静泉　吕　雄　刘海军

李　炜　苏金梅　张　锋　陈传勇

袁　星　德　娜

前　言

本书是全国高等农林院校“十一五”规划教材．全书共十章，内容分为两大部分，前五章为概率论部分，其主要内容有随机事件及其概率、随机变量及其概率分布、多维随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理；后五章为数理统计部分，内容包括数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析．

在编写过程中，本书力求突出概率统计的基本思想与基本方法，以便读者在学习过程中能够较好地了解各部分的内在联系，从总体上把握概率统计的思想方法，注重概率统计方法的实际应用．为了帮助读者更进一步地理解和掌握所学内容，每章后都配备了一定数量的习题，书后有习题答案．

参加本书编写的是在教学一线，具有多年教学经验的部分农林院校的教师，可以说本书是编者多年教学实践的结晶．其中第一、八、九、十章分别由内蒙古农业大学苏金梅、吕雄、王静泉、刘海军编写，第二、三章分别由仲恺农业技术学院陈传勇、李炜编写，第四、五章分别由甘肃农业大学王万雄、张锋编写，第六、七章分别由新疆农业大学德娜、袁星编写．全书的插图由张锋绘制，附表由王静泉编制．全书的统稿由苏金梅完成．

限于编者水平，错谬之处在所难免，恳请同行和广大读者批评指正．

编　者

2007 年 10 月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

概率论是从数量的侧面研究随机现象规律性的一门数学学科．目前概率论的理论和方法已广泛应用于各个领域，对人类的经济活动和社会活动都起着十分重要的作用，如保险业、医学界、金融界等．当然，随着这种研究需求的推动，也促进了概率理论不断发展，在理论联系实际方面，可以说概率论与数理统计是当前世界上发展最为迅速也是最为活跃的数学学科之一．本章学习概率论的基本内容，主要介绍随机事件及其运算；给出随机事件概率的定义、性质；研究古典概型、几何概型的概率计算方法；讨论事件和试验的独立性问题；引进条件概率，用全概率公式和贝叶斯公式解决概率的一些计算问题．

第一节　随机事件及其运算

一、随机现象

1. 随机现象

随机现象是概率论与数理统计研究的对象．

在客观世界里，存在着两类不同的现象：一类是确定性现象，即在一定条件下必然会发生或必然不会发生的现象．如在标准大气压下，水加热到 100 ℃必然沸腾；又如在不受外力的作用下，做匀速直线运动的物体不会改变运动状态；同性电荷相互排斥，异性电荷相互吸引．另一类现象就是随机现象．随机现象在自然界和生活中随处可见．所谓随机现象指的是：可能的结果不止一个，且预先不能确定将要出现什么样的结果，就个别试验或观察而言，其结果呈现不确定性，随机遇而定的现象．例如：掷一枚硬币，可能出现正面，也可能出现反面．至于出现哪一面，事先谁也说不准；又如：掷一颗骰子，可能出现 1，2，3，4，5，6 点，至于出现哪一点，事先并不知道．再如：110 报警台一天内接到的报警次数，可取所有的非负整数；同一门炮向同一目标发射，每次发射后的弹着点都可能不同．某一生产线，用同一种工艺生产出来的灯泡寿命也有差异等等．

2. 随机试验

为了研究随机现象的数量规律，伴随着就有一些观察或试验，不论是所作

的观察或安排的试验都称为随机试验，简称为试验，用字母 E 表示．随机试验具有以下特点：

（1）可重复性：在相同的条件下，试验可以重复进行；

（2）可观察性：每次试验的可能结果不止一个，但事先可以明确其所有可能的结果；

（3）不确定性：在试验结果出现之前，不能确定哪一个结果会出现．

二、样本空间

定义　随机试验的最简单结果称为基本结果．

如抛一枚硬币有两个基本结果：正面、反面．掷一枚骰子有 6 种基本结果，等等．

对于随机试验，我们关心的是它的结果，虽然事先不能确定试验将会发生哪一个结果，但试验的一切可能的基本结果所构成的集合却是确定的．为了研究随机现象中的规律，人们通常用一个集合 Ω 来表示某个试验 E 的所有基本结果，并称 Ω 为试验 E 的样本空间或基本空间．Ω 的每一个元素 e，即 E 的每一个基本结果，称为试验 E 的一个样本点．

例 1　设 E_1 为“掷一枚硬币，考察其正面朝上还是反面朝上”，则 $\Omega_1=$ {正面，反面}；

设 E_2 为“掷两次硬币，依次考察其正面朝上还是反面朝上”，则 $\Omega_2=$ {正正、正反、反正、反反}；

设 E_3 为“掷两次硬币，考察其正面朝上的个数”，则 $\Omega_3=\{0,1,2\}$；

设 E_4 为“掷一颗骰子，考察其朝上的那一面的点数”，则 $\Omega_4=\{1,2,3,4,5,6\}$；

设 E_5 为“110 报警台一天内接到的报警次数”，则 $\Omega_5=\{0,1,2,\cdots\}$；

设 E_6 为“某批灯泡的使用寿命”，则 $\Omega_6=\{t\mid t\geqslant 0\}$；

设 E_7 为“某种炮弹的弹着点”，则 $\Omega_7=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$．

从而可知：样本空间可以是有限集，可以是可列集，也可以是不可列集，还可在二、三维空间考虑．

给出试验的样本空间，是描述随机现象的基础．值得注意的是：相同的试验，由于研究目的不同，其样本空间也不同，如 Ω_2 和 Ω_3．也就是说，样本空间的样本点取决于随机试验和它的研究目的．

三、随机事件

对于随机现象来说，每一次随机试验都会出现 Ω 中的一个结果 e，各个结

果在一次试验中是否出现是随机遇而定的．在随机试验中通常我们会关心其中的一类结果是否出现，例如：掷一颗骰子，我们可能会关心掷出的点数是否是奇数．当然所关心的这一类结果可能出现也可能不出现，在试验前带有随机性，我们把这种在一次试验中可能出现也可能不出现的一类结果称为随机事件，简称事件．即随机现象的某些基本结果组成的集合就称为随机事件．用字母 A、B、C 等表示．

显然，所谓随机事件，用集合的语言讲，就是样本空间 Ω 的一个子集．如掷一颗骰子的试验中，“出现奇数点”是一个事件，这个事件就是样本空间 $\Omega_4=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的一个子集 $A=\{1, 2, 3\}$．特别地，样本空间 Ω 的每一个元素 e 构成的单点集 $\{e\}$ 也都是随机事件，称为基本事件．

从而可知，事件有如下几个特征：

（1）事件 A 发生当且仅当 A 所包含的某一样本点出现．含 n 个基本结果的试验共有 2^n 个事件．

（2）样本空间 Ω 本身也是 Ω 的一个子集，所以也是事件，只不过在每次试验中必然会发生，故称其为必然事件．

（3）空集 $\varnothing$ 也是 Ω 的子集，所以也是事件，只不过每次试验都不可能发生，所以称其为不可能事件．为了讨论的方便，我们将 Ω 和 $\varnothing$ 作为随机事件的两个极端情形与其他事件统一加以处理．

四、事件间的关系

我们已经知道，样本空间 Ω 就是样本点（基本事件）的集合，随机事件就是 Ω 的子集，而集合间是可以运算的，因此随机事件间也可进行相应的运算．为以后的概率计算化繁为简，下面我们来了解随机事件间的运算所代表的意义．

（1）包含　设 A 和 B 是同一试验中的两个事件，若事件 A 中的每一个样本点都是事件 B 的样本点，则称事件 B 包含事件 A，记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$. 其含义是：若事件 A 发生，则事件 B 一定发生．

如掷一颗骰子，$A=$“出现 4 点”，$B=$“出现偶数点”，则 $A\subset B$.

显然，对任何事件 A，必有：$\varnothing\subset A\subset\Omega$.

如果对事件 A 和 B，有 $A\subset B$ 和 $B\subset A$ 同时成立，则称事件 A 与 B 相等，记为 $A=B$.

（2）并事件　由事件 A 和 B 的所有样本点（相同的只计入一次）所组成的新事件，称为事件 A 与事件 B 的并，记为 $A\cup B$. 其含义是：事件 A 与 B 至少有一个发生．

如掷一颗骰子，$A=$“出现奇数点”，$B=$“出现点数不超过 3”，则 $A\cup B=$

$\{1, 2, 3, 5\}$.

(3) 交事件　由 A 与 B 中公共样本点组成的新事件，称为事件 A 与事件 B 的交，记为 $A\cap B$ 或 AB. 其含义是：事件 A 与 B 同时发生.

如掷一颗骰子，$A=$ "出现奇数点"，$B=$ "出现点数不超过 3"，则 $A\cap B=\{1, 3\}$.

(4) 差事件　由在 A 中但不在 B 中的样本点组成的新事件，称为事件 A 与事件 B 的差，记为 $A-B$. 其含义是：A 发生但 B 不发生.

如掷一颗骰子，$A=$ "出现奇数点"，$B=$ "出现点数不超过 3"，则 $A-B=\{5\}$.

(5) 互斥（互不相容）事件　若 $A\cap B=\varnothing$，则称 A 与 B 互斥或互不相容. 其含义是：A 和 B 不可能同时发生.

显然，不同的基本事件是互不相容的.

(6) 对立事件　若事件 A 与 B 满足 $A\cup B=\Omega$，$A\cap B=\varnothing$，则称 B 是 A 的对立事件，记为 $B=\bar{A}$.

显然，若 B 是 A 的对立事件，则 A 也是 B 的对立事件.

注意　(1) 若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$，$A\cap B=A$；

(2) 对任何事件 A，有 $A\cup\Omega=\Omega$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cap\Omega=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$；

(3) n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 至少有一个发生的事件，即 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，类似可定义可列个事件的并事件为：$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\lim\limits_{n\to\infty}\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 同时发生的事件即 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$，类似可定义可列个事件的交事件为：$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\lim\limits_{n\to\infty}\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

(4) 事件 A 与 B 的差 $A-B=A\cap\bar{B}$.

设 A 为任意事件，显然有 $A\cap\bar{A}=\varnothing$，$A\cup\bar{A}=\Omega$，$\bar{\bar{A}}=A$，$\bar{\Omega}=\varnothing$，$\bar{\varnothing}=\Omega$.

由于任一随机事件 A 都是样本空间 Ω 的子集，所以在概率论中事件间的关系与运算在几何上的表示如同集合表示法，即用维恩（Venn）图表示（图 1-1）.

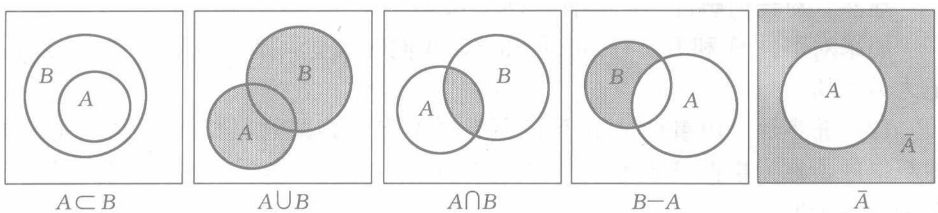

图 1-1　事件间的关系与运算的 Venn 图

与集合一样，事件的运算满足下列运算规律：

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3) 分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

(4) 德·莫根 (De Morgan) 律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

对于多个（甚至可列个）事件，德·莫根律也成立，即

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}=\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A_k};\quad \overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A_k}.$$

例 2　设 A，B，C 是某个试验下的三个事件，则

(1) 事件“A，B，C 都发生”可表示为 ABC；

(2) 事件“A，B，C 中至少有一个发生”可表示为 $A\cup B\cup C$，或表示为互不相容事件的并

$$A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC;$$

(3) 事件“A，B，C 中恰好有一个发生”可表示为

$$A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C;$$

(4) 事件“A 与 B 都发生而 C 不发生”可表示为

$$AB\overline{C}\text{ 或 }AB-C\text{，也可表示为 }AB-ABC;$$

(5) 事件 A，B，C 恰好有两个发生可表示为

$$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC.$$

第二节　事件的概率

一、排列与组合

随机事件的发生是随机遇而定的，在试验前是否发生具有不确定性．可能发生也可能不发生，但是事件发生的可能性的大小却是事件本身所具有的一个确定属性，是可以度量的，这个量就是事件的概率，也就是说，事件的概率是一个数值．为计算这个数值，掌握正确的计数方法是十分必要的，特别是古典概型．

计数法就是排列、组合的方法，基本的组合分析公式基于两条原理．

1. 乘法原理　若进行 A_1 过程有 n_1 种方法，进行 A_2 过程有 n_2 种方法，则进行 A_1 过程后再接着进行 A_2 过程共有 $n_1\times n_2$ 种方法．

推广　如果某件事须经 k 个步骤才能完成，而做第一步有 n_1 种方法，第二步有 n_2 种方法，…，第 k 步有 n_k 种方法，那么完成这件事共有 $n_1\times n_2\times\cdots\times n_k$

种方法．

例 从甲地到乙地有 3 条路线，从乙地到丙地有 2 条路线，则从甲地经乙地到丙地共有 6 条路线可走．

2. 加法原理 若进行 A_1 过程有 n_1 种方法，进行 A_2 过程有 n_2 种方法，假定 A_1 过程与 A_2 过程是并行的，则进行 A_1 过程或进行 A_2 过程的方法共有 n_1+n_2 种．

推广 如果某件事可由 k 类不同办法之一去完成，而第一类办法有 n_1 种完成方法，第二类办法有 n_2 种完成方法，…，第 k 类办法有 n_k 种完成方法，那么，完成这件事共有 $n_1+n_2+\cdots+n_k$ 种方法．

3. 排列 从包含有 n 个不同元素的总体中任意取出 $r(r\leqslant n)$ 个元素排成一列，就称为一个排列．这时既要考虑到取出的元素，又要顾及其取出的顺序．

① 有放回选取 每次选取都是 n 种可能，共有 n^r 种取法．

② 不放回选取 第一次选取有 n 种可能，第二次有 $n-1$ 种可能，…，第 r 次有 $n-r+1$ 种可能，共有 $A_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ 种取法．

特别地，当 $r=n$ 时，称为全排列，记为 $P_n=n!$

4. 组合 从 n 个不同的元素中任意取出 r 个元素并成一组，不考虑其顺序，称为一个组合．总数为

$$C_n^r=\binom{r}{n}=\frac{A_n^r}{r!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

注意 $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n.$

二、频率与概率的统计定义

下面我们从频率稳定性方面认识一下概率．

就频率稳定性问题，历史上有不少人做过大量试验．例如抛掷一枚均匀的硬币，有过如下的纪录：

表 1-1 掷一枚硬币，正面出现的频率

试验者	掷硬币次数	出现正面次数	频率
Buffon（浦丰）	4 040	2 048	0.506 9
Pearson（皮尔逊）	12 000	6 019	0.501 6
	24 000	12 012	0.500 5
Lomanovskii	80 640	39 699	0.492 3
Felle	10 000	4 979	0.497 9