

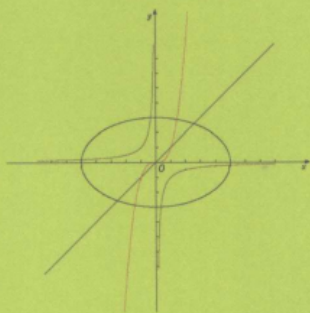
GAOZHONG SHUXUE
zhishi kuaisu

高中数学

陈明 编著

高中数学知识 快速过关精读

guoguan jingdu



西南师范大学出版社

XINAN SHIFAN DAXUE CHUBANSHE

GAOZHONG SHUXUE
zhīshì kuàisù
guānguān jīngdù

高中数学知识 快速过关精读



ISBN 978-7-5621-3900-3



9 787562 139003 >

定价：12.00 元

高中数学知识快速过关精读

陈 明 编著

西南师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学知识快速过关精读/陈明 编著. —重庆:西南
师范大学出版社, 2007. 7

ISBN 978-7-5621-3900-3

I. 高… II. 陈… III. 数学课—高中—教学参考资料
IV. G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 098502 号

高中数学知识快速过关精读

陈 明 编著

责任编辑:朱乃明

封面设计:王 煤

出 版:西南师范大学出版社

重庆·北碚 邮编:400715

<http://www.xscbs.com>

发 行:全国新华书店

印 刷:西南政法大学印刷厂

开 本:850mm×1168mm 1/32

印 张:7.5

字 数:260 千字

版 次:2007 年 8 月第 1 版

印 次:2007 年 9 月第 2 次印刷

书 号:978-7-5621-3900-3

定 价:12.00 元

《高中数学知识快速过关精读》

序 言

谨以此书献给我深爱着的人们！

这是一本薄书，是一本集作者几十年高中数学实战经验之精华，经精耕细作，将高中三年数学内容提精变薄的工具书！它具有通俗化、大众化、可读性、可操作性及实战性强的特点。该书在知识脉络上线条十分清晰，特别注重了“点”、“线”间的相互联系，在对思路、方法、程序、规律的分析 and 总结中，以明晰轻松的口吻娓娓道来，还读者更多的思维空间。全书系统地、简明扼要地对各章知识要点逐一归类总结，侧重于对知识要点的正确解读，着力于对知识的理解、消化、记忆方法及融会贯通上的透彻点拨，多数知识点配有必要的实战举例，相信你只要静下来沉进去，那怕只用十来分钟也会收到意想不到的效果。该书薄而精炼，既便于携带又利于查阅，极具实用性和资料性，集学习性与备考性于一身，是一本不可多得、开卷有益的高中数学工具书。本书不失为全体高中学生、成考自考生、师范院校数学专业学生的首选备用读物。也是战斗在教学第一线的高中数学老师上好的工具书。希望你能喜欢！谢谢！

陈明

2007年春于砭城

本书编写意图及个性特点

“减负”！让学生从厚厚的书本中解脱出来。

询问学生学习中感觉最难学的是什么？相信多数人会“说数学”，再继续追问学数学过程中你最想要的辅助工具是什么？相信大多数同学会本能地告诉你，想要这样一本书，它能在大量压缩的前提下保留所有高中数学内容的精华知识，它能全面准确地提供出各章各节知识的要害和重难点，并在认知、理解、操作等方面提供具体的帮助及相关提示，提供使用这些知识技能的具体操作要点、程序及注意事项，在各个知识点处提供一些必要的基本范例实解助其理解和掌握，提供相应解题的引入思想、方式方法。它必须使用通俗易懂的语言让人一看就明、一读就懂、一想就通、看得见摸得着！也就是说，需要一本薄而精的案头工具书。它必需具有通俗化、大众化、可读性、可操作性及实战性强的特点。但它应与市面上众多的练习册、复习资料一类的东西在取向上有很大的不同。因为上述资料走的都是以讲例为主、以练为辅之路，大多题型新颖，讲得轰轰烈烈很是热闹！对基础好的当然帮助巨大。但对大多数底子不牢、基础不稳的学生而言却缺乏实实在在的取可之处。要知道基础的东西未解决，一味跟着其硬上，必然是只能依样画葫芦，比着别人的模样去做题。为什么要这样想？为什么要这样做？怎样举一反三？由此及彼等统统变成空谈！这样读书当然是费力不讨好，考试的结果可想而知，搞不好读大学只不过是一个美好的梦想而以。针对上述理由和市场需求欲望，《高中数学知识快速过关精读》应运而生，他从一名精于此道的专业优秀一线授课老师的角度，完全按学生的想法和意愿，以业内行家的身份为此量体裁衣，提供针对性极强的全方位服务！他不太在意于题该怎么解，练题不是他的重心（所配实战举例也仅限于对相关知识的应用说明，教你会想能用），它侧重于对双基知识的正确解读，着力于对知识的认知、理解、方式方法的具体落实上，手把手地教你去想、去悟、去探索，引导你快乐轻松地学习，给你一双慧眼让你也能悟透所学知识的内涵实质，给你以明晰的洞察力和丰富的想象力，给你解决实际问题的基本能力，助你成为真正的尖子生。也正是这些构成了本书出彩的闪光点。

目 录

序言	(1)
第一章 集合与简易逻辑	(1)
一、集合	(1)
二、解不等式	(4)
三、简易逻辑	(7)
第二章 函 数	(11)
一、映射	(11)
二、函数解析式求解	(11)
三、函数定义域求解	(12)
四、函数值域求解	(12)
五、函数的奇偶性	(14)
六、函数的单调性	(15)
七、反函数	(18)
八、指数与对数运算	(20)
九、指数函数与对数函数	(21)
十、函数图像及变换关系	(22)
十一、常见对称问题	(25)
十二、周期问题	(27)
第三章 数 列	(28)
一、数列的概念	(28)

二、等差数列定义、通项公式、前 n 项和公式	(28)
三、等差数列的表示	(30)
四、等差数列的性质	(30)
五、等比数列定义、通项公式、前 n 项和公式	(32)
六、等比数列的表示	(33)
七、等比数列的性质	(33)
八、由数列的前几项求通项公式的常见方法	(34)
九、由数列的递推式求通项公式的常见方法	(35)
十、特殊数列求和	(37)
第四章 三角函数	(40)
一、任意角的三角函数	(40)
二、角度制与弧度制的互换及弧长、扇形面积	(40)
三、三角函数相关概念	(42)
四、两角和与差的三角函数	(44)
五、三角恒等式的常见证明方法	(47)
六、三角函数的图像和性质	(48)
七、三角函数问题中的小技巧	(55)
第五章 平面向量	(62)
一、向量的基本概念	(62)
二、向量的加、减法	(63)
三、向量模的性质	(64)
四、实数与向量的积	(64)
五、平面向量的坐标运算	(66)
六、线段的定比分点	(67)
七、平面向量数量积(内积)	(68)
八、平移(有移图与移轴两种情况)	(72)
九、正余弦定理	(74)

第六章 不等式	(78)
一、不等式的性质	(78)
二、解不等式	(80)
三、不等式的证明方法	(85)
第七章 直线和圆的方程	(96)
一、有向线段与定比分点	(96)
二、直线的倾斜角和斜率	(97)
三、直线方程的几种形式	(99)
四、两条直线的位置关系	(101)
五、简单的线性规划	(105)
六、曲线和方程	(107)
七、圆	(107)
第八章 圆锥曲线方程	(111)
一、曲线系理论与四线一方程	(111)
二、椭圆	(112)
三、双曲线	(116)
四、抛物线	(121)
五、有心二次曲线的统一方程	(124)
六、坐标轴的平移	(124)
七、轨迹问题	(126)
八、点与圆锥曲线的位置关系	(128)
九、直线与圆锥曲线的位置关系	(128)
十、向量在解析几何中的应用	(129)
第九章 直线与平面	(134)
一、确定平面的条件	(134)
二、两个基本定理	(134)
三、关于共点、共面、共线问题	(134)

四、直观图的斜二测画法	(135)
五、空间二直线的位置关系及其判定方法	(136)
六、线面关系	(137)
七、面面关系	(138)
八、关于角的说明	(140)
附:用空间向量处理立体几何问题	(142)
一、空间向量的相关概念与结论	(142)
二、空间向量的坐标运算	(142)
三、平面的法向量	(146)
四、常见距离问题的求解	(146)
五、常见角的问题的求解	(146)
六、用空间向量(非坐标运算)处理立体几何问题	(150)
第十章 简单几何体	(152)
一、多面体概念	(152)
二、棱柱的定义和性质	(152)
三、棱锥、棱台的定义和性质	(156)
四、旋转体的定义和性质	(158)
五、欧拉公式	(159)
六、柱、锥、台、球、球缺、球带、球冠的体积和侧面积	(160)
第十一章 排列、组合和二项式定理	(165)
一、排列、组合基本概念	(165)
二、排列组合基本技能方法	(167)
三、二项式定理	(171)
第十二章 概 率	(174)
一、随机事件及其概率	(174)
二、等可能事件的概率	(175)
三、互斥事件有一个发生的概率	(178)

四、相互独立事件及其同时发生的概率	(181)
五、独立重复试验	(183)
六、各种情况下的概率计算公式	(185)
第十三章 概率与统计	(186)
一、离散型随机变量的分布列	(186)
二、离散型随机变量的期望与方差	(190)
三、抽样(均为不放回抽样)方法	(192)
四、总体分布的估计	(195)
五、正态分布	(199)
六、线性回归	(202)
第十四章 极 限	(206)
一、数学归纳法	(206)
二、数列的极限	(208)
三、函数的极限	(209)
四、函数的连续性	(213)
第十五章 导 数	(216)
一、导数的概念及运算	(216)
二、导数应用举例	(220)
第十六章 复 数	(225)
一、复数的有关概念	(225)
二、复数的运算及其应用	(227)

第一章 集合与简易逻辑

一、集合

1. 弄清集合中的代表元素的意义(例:① $\{x \mid y = x^2\}$, ② $\{y \mid y = x^2\}$, ③ $\{(x, y) \mid y = x^2\}$. ①表示函数 $y = x^2$ 定义域; ②表示函数 $y = x^2$ 的值域; ③表示函数 $y = x^2$ 图像上所有点的集合).

2. 注意空集 $\emptyset$ 的特点: ① $\emptyset \in \{\emptyset\}$ ② $\emptyset \subsetneq \{\emptyset\}$ ③ $A \cap \emptyset = \emptyset$ ④ $A \cup \emptyset = A$ ⑤ $\emptyset \subseteq A$.



友情提示

由于 $\emptyset$ 的特殊性,在解题时若忽视 $\emptyset$ 的存在性,就会造成解题结果的残缺不全,命题人常在此设障,应高度重视.

实战举例: 设集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 6x = 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 3(a+1)x + a^2 - 1 = 0\}$ 且 $A \cup B = A$, 求实数 a 的取值范围.

事实上, $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 6x = 0\} = \{0, -6\}$, 由 $A \cup B = A$ 知 $B \subseteq A$. ① 当 $B = A = \{0, -6\}$ 时, 由韦达定理有 $\begin{cases} -3(a+1) = -6 \\ a^2 - 1 = 0 \end{cases}$, 解得 $a = 1$; ② 当 $B \subsetneq A$ 时, (A) 如果 $B \neq \emptyset$, 那么有 $B = \{0\}$ 或 $B = \{-6\}$. 由 $\Delta = [3(a+1)]^2 - 4(a^2 - 1) = 0$ 有 $5a^2 + 18a + 13 = 0$, 解得 $a = -1$ 或 $a = -\frac{13}{5}$. 当 $a = -1$ 时, 有 $x^2 = 0$, 即 $x = 0$, 此时 $B = \{0\}$ 满足题意. 当 $a = -\frac{13}{5}$ 时, 有 $x^2 - \frac{24}{5}x + \frac{144}{25} = 0$, 即 $x_1 = x_2 = \frac{12}{5}$, 此时 $B = \{\frac{12}{5}\}$ (舍). (B) 如果 $B = \emptyset$, 则 $\Delta = [3(a+1)]^2 - 4(a^2 - 1) < 0$, 即 $5a^2 + 18a + 13 < 0$, 解得 $-\frac{13}{5} < a < -1$, 此时也满足 $B \subsetneq A$. 综上所述: $-\frac{13}{5} < a \leq -1$ 或 $a = 1$.

3. ① 元素 x 与集合 A 之间仅有 $\in, \notin$ 两种关系;

② 集合 A, B 之间仅有 $\subseteq, \supseteq, \subsetneq, \supsetneq, \varsubsetneq, =$ 关系, 符号不能混用.

4. 集合中的元素必须是确定的且彼此互异; 集合与元素的顺序无关.

5. 子集: ① 对两集 A 与 B , 若集 A 中每一元素都是集 B 的元素, 则称集 A

是集 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$); ② 特别地, 若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 则称集 A 是集 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$ (或 $B \supsetneq A$).

实战举例: 判断下列集合间的关系.

$$(A) A = \{x \mid x = 2k - 1, k \in \mathbf{Z}\}, B = \{x \mid x = 4k \pm 1, k \in \mathbf{Z}\}.$$

$$(B) A = \{x \mid x = \frac{2k\pi}{7} + \frac{\pi}{7}, k \in \mathbf{Z}\}, B = \{x \mid x = \frac{2k\pi}{7} - \frac{\pi}{7}, k \in \mathbf{Z}\}.$$

$$(C) A = \{(x, y) \mid |x| + |y| < 2\}, B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4\}, C = \{(x, y) \mid |x| < 2 \text{ 且 } |y| < 2\}.$$

$$(D) A = \{x \mid x = \sin \frac{k+3}{4}\pi, k \in \mathbf{Z}\}, B = \{y \mid y = \cos \frac{k-3}{4}\pi, k \in \mathbf{Z}\}.$$

$$(E) A = \{x \mid x = k + \frac{1}{6}, k \in \mathbf{Z}\}, B = \{y \mid y = \frac{m}{2} - \frac{1}{3}, m \in \mathbf{Z}\}, C = \{z \mid z = \frac{n}{2} + \frac{1}{6}, n \in \mathbf{Z}\}.$$

事实上, (A) 对 $A = \{x \mid x = 2k - 1, k \in \mathbf{Z}\}, B = \{x \mid x = 4k \pm 1, k \in \mathbf{Z}\}$, 显然 A, B 均为奇数集, 故 $A = B$. (B) 因 $A = \{x \mid x = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{7}, k \in \mathbf{Z}\}, B = \{x \mid x = (2k-1) \cdot \frac{\pi}{7}, k \in \mathbf{Z}\}$, 所以 $A = B$. (C) $A = \{(x, y) \mid |x| + |y| < 2\}$ 表示以 x 轴, y 轴为对角线, 边长为 $2\sqrt{2}$ 的正方形内的点集; $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4\}$ 表示以原点 O 为圆心, 2 为半径的圆的内部的点集; $C = \{(x, y) \mid |x| < 2 \text{ 且 } |y| < 2\}$ 表示 4 条直线 $x = \pm 2, y = \pm 2$ 所围正方形内的点集, 如图所示: $A \subsetneq B \subsetneq C$. (D) $A = B = \{0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\}$. (E) 显然 $A = \{x \mid x = \frac{1}{6} \cdot (6k+1), k \in \mathbf{Z}\}$, 又 $B = \{x \mid x = \frac{1}{6} \cdot (3k+1), k \in \mathbf{Z}\}$, $C = \{x \mid x = \frac{1}{6} \cdot (3k+1), k \in \mathbf{Z}\}$, 则 $A \subsetneq B = C$.

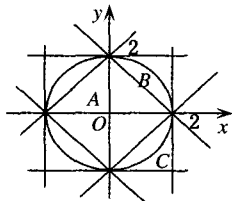


图 1-1

6. 子集的个数: 若集 A 仅有 n 个元素, 则集 A 共有 2^n 个子集, $2^n - 1$ 个真子集.

7. 交集: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\} \Leftrightarrow A \cap B$ 是集 A, B 的所有公共元素构成之集 $\Leftrightarrow$ 任取 $x \in A \cap B$, 则 x 既具有 A 中元素特征, 同时又具有 B 中元素特征.

实战举例 1: $M = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{4}x^2\}$, $N = \{(x, y) \mid x^2 + \frac{(y-a)^2}{4} = 1\}$, 且 $M \cap N \neq \emptyset$, 求 a 的取值范围.

事实上, 由 $\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 \\ x^2 + \frac{(y-a)^2}{4} = 1 \end{cases}$ 有 $y^2 + 2(8-a)y + a^2 - 4 = 0 (y \geq 0)$,

因 $M \cap N \neq \emptyset$, 则方程有非负实根. 函数 $f(y) = y^2 + 2(8-a)y + a^2 - 4$ 表示开口向上的抛物线. ① 若方程仅有一个非负实数解, 则必有 $f(0) \leq 0$, 解得 $a \in [-2, 2]$; ② 若方程有两个非负实数解, 则必有

$$\begin{cases} f(0) \geq 0 \\ \text{对称轴 } x = -(8-a) > 0 \\ \Delta = 4(8-a)^2 - 4(a^2 - 4) \geq 0 \end{cases}, \text{解得 } a \in \emptyset. \text{ 综上所述: } a \in [-2, 2].$$

实战举例 2: 设数集 $M = \{x \mid m \leq x \leq m + \frac{3}{4}\}$, $N = \{x \mid n - \frac{1}{3} \leq x \leq n\}$, 且 M, N 都是集合 $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ 的子集. 若把 $b-a$ 叫做集合 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ 的“长度”, 求集合 $M \cap N$ 的“长度”的最小值.

事实上, 由已知, $M \cap N$ 的“长度”就是该集合中最大实数与最小实数之差, 显然集合 M, N 的长度为定值 $\frac{3}{4}, \frac{1}{3}$, 欲使 $M \cap N$ 的长度最小, 只需 $m = 0$ 且 $n = 1$, 此时 $M = \{x \mid 0 \leq x \leq \frac{3}{4}\}$, $N = \{x \mid \frac{2}{3} \leq x \leq 1\}$, 那么 $M \cap N = \{x \mid \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{3}{4}\}$. 所以 $M \cap N$ 的最小长度为 $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$.

8. 并集: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\} \Leftrightarrow A \cup B$ 是由集 A, B 的所有互异元素(相同者只记一次)构成之集 $\Leftrightarrow$ 任取 $x \in A \cup B$, 则 x 具有 A 中元素特征或具有 B 中元素特征.

实战举例 1: 若集合 $A = \{1, 3, x\}$, $B = \{1, x^2\}$, $A \cup B = A$, 求满足条件的实数 x 的个数.

事实上, 因 $A \cup B = A$, 所以 $B \subseteq A$. 当 $x^2 = 3$ 时, 有 $x = \pm\sqrt{3}$; 当 $x^2 = x$ 时, 有 $x = 0$ 或 $x = 1$ (舍), 那么, 所求实数 x 的值为 $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$ 共 3 个值.

实战举例 2: 若 $A = \{x \mid 2x^2 - px + q = 0\}$, $B = \{x \mid 6x^2 + (p+2)x + 5 + q = 0\}$, 且 $A \cap B = \{\frac{1}{2}\}$, 求 $A \cup B$.

事实上, 因 $A \cap B = \{\frac{1}{2}\}$, 那么 $\frac{1}{2} \in A, \frac{1}{2} \in B$, 故有

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{p}{2} + q = 0 \\ \frac{3}{2} + \frac{p+2}{2} + 5 + q = 0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} p = -7 \\ q = -4 \end{cases}, \text{所以 } A \cup B = \{-4, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}.$$

9. 补集: $\complement_U A = \{x \mid x \in U \text{ 但 } x \notin A\} \Leftrightarrow \complement_U A$ 是由全集 U 中除去 A 中元素后余下的元素构成之集 $\Leftrightarrow$ 任取 $x \in \complement_U A$, 则 x 具有 U 中元素特征但不具有 A 中元素特征.

实战举例: 已知 $A = \{-3, a^2, a+1\}, B = \{a-3, 2a-1, a^2+1\}, A \cap B = \{-3\}$, 若全集 $U = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, 求 $\complement_U(A \cup B)$.

事实上, 因为 $A \cap B = \{-3\}$, 则 $a-3 = -3$ 或 $2a-1 = -3$. ① 由 $a-3 = -3$ 有 $a = 0$, 此时 $A = \{-3, 0, 1\}, B = \{-3, -1, 1\}$ (舍); ② 由 $2a-1 = -3$ 有 $a = -1$, 此时 $A = \{-3, 1, 0\}, B = \{-4, -3, 2\}$, 则 $A \cup B = \{-4, -3, 0, 1, 2\}$, 那么 $\complement_U(A \cup B) = \{-2, -1, 3, 4\}$.

10. 运算性质除几条常见性质外应格外注意以下几条:

① $\complement_U(\complement_U A) = A$ ② $(\complement_U A) \cup A = U$ ③ $(\complement_U A) \cap A = \emptyset$.

④ (摩根律) $\complement_U(A \cup B) = \complement_U A \cap \complement_U B; \complement_U(A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B$.

⑤ $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B, A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$.

⑥ 有限集元素个数公式



如图所示: $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$;

同理可得: $\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C)$.

二、解不等式

1. $\begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ a \quad x \\ x > a \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ a \quad x \\ x < a \end{array}.$

2. 不等式组的解: 所有解曲线的公共部分.

3. ① $\begin{cases} |f(x)| \leq a (a > 0) \Leftrightarrow -a \leq f(x) \leq a \\ ax^2 + bx + c \leq 0 (a > 0) \Leftrightarrow x_{\text{小}} \leq x \leq x_{\text{大}} (\Delta > 0) \end{cases}$

② $\begin{cases} |f(x)| \geq a (a > 0) \Leftrightarrow f(x) \geq a \text{ 或 } f(x) \leq -a \\ ax^2 + bx + c \geq 0 (a > 0) \Leftrightarrow x \geq x_{\text{大}} \text{ 或 } x \leq x_{\text{小}} (\Delta > 0) \end{cases}$



友情提示

① 对绝对值不等式,若 a 符号未定,应就 $a \leq 0$ 和 $a > 0$ 两种情况进行讨论.

② 对 $x^2 + px + q > 0$;若 $\begin{cases} \Delta < 0, \text{则 } x \in \mathbf{R} \\ \Delta = 0, \text{则 } x \in (-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty) \end{cases}$.

③ 对 $x^2 + px + q < 0$ 若 $\begin{cases} \Delta < 0, \text{则 } x \in \emptyset \\ \Delta = 0, \text{则 } x \in \emptyset \end{cases}$.

实战举例 1:解不等式 $|x^2 - 3x - 4| < x + 1$.

事实上, 方法 1: $|x^2 - 3x - 4| < x + 1$ 等价于 $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ -(x + 1) < x^2 - 3x - 4 < x + 1 \end{cases}$, 解得 $x \in (3, 5)$. 方法 2: $|x^2 - 3x - 4| < x + 1$ 等价于 $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ (x^2 - 3x - 4)^2 < (x + 1)^2 \end{cases}$, 解得 $x \in (3, 5)$. 方法 3: $|x^2 - 3x - 4| < x + 1$ 等价于函数 $y = |x^2 - 3x - 4|$ 的图像在直线 $y = x + 1$ 下方时, 求对应 x 的范围. 借助图像得 $x \in (3, 5)$.

实战举例 2:不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 之解集为 $x \in (\alpha, \beta)$ ($1 < \alpha < \beta$), 求不等式 $cx^2 + bx + a < 0$ 的解集.

事实上, 解集 $(\alpha, \beta) \Leftrightarrow (x - \alpha)(x - \beta) < 0$, 即 $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta < 0$, 即 $-x^2 + (\alpha + \beta)x - \alpha\beta > 0$, 等价于 $ax^2 + bx + c > 0$, 故有 $\begin{cases} a = -k \\ b = (\alpha + \beta)k \\ c = -\alpha\beta k \end{cases}$ (这里 $k > 0$). 那么, 不等式 $cx^2 + bx + a < 0$ 等价于 $-\alpha\beta x^2 + (\alpha + \beta)x - 1 < 0$, 即 $\alpha\beta x^2 - (\alpha + \beta)x + 1 > 0$, 因 $1 < \alpha < \beta$, 有 $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta} > 0$, 故 $x \in (-\infty, \frac{1}{\beta}) \cup (\frac{1}{\alpha}, +\infty)$ 为所求.

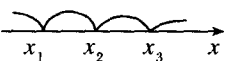
4. 形如 $|f(x)| \geq |g(x)|$ 型: 只需两边平方则可去掉绝对值符号.

实战举例:解不等式 $|x| > |x + 1|$.

事实上, $|x| > |x + 1| \geq 0$, 即 $x^2 > (x + 1)^2 \geq 0$, 即 $2x + 1 < 0$, 不等式的解集为 $(-\infty, -\frac{1}{2})$.

5. 形如 $|f(x)| \geq g(x)$ 型: 依绝对值定义分 $f(x) \geq 0$ 和 $f(x) < 0$ 两种情况进行讨论求解.

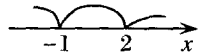
6. 形如 $|f(x)| + |g(x)| + |q(x)| + \cdots \geq 0$ 型(零点分片讨论法): 令 $f(x), g(x), q(x), \cdots$ 分别为 0, 将所得根按从小到大的顺序放置在数轴上(如图)



这就将数轴分成了若干片, 然后从左到右逐片讨论解不等式.

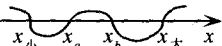
实战举例: 解不等式 $|x+1| - |x-2| < 1$.

事实上, 令 $x+1, x-2$ 为 0, 有 $x = -1, 2$



① 由 $\begin{cases} x < -1 \\ -(x+1) + (x-2) < 1 \end{cases}$, 解得 $x < -1$; ② 由 $\begin{cases} -1 \leq x < 2 \\ x+1 + x-2 < 1 \end{cases}$, 解得 $-1 \leq x < 1$; ③ 当 $\begin{cases} x \geq 2 \\ x+1 - (x-2) < 1 \end{cases}$ 时无解. 综上所述 $x \in (-\infty, 1)$.

7. 形如 $(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) > 0$ 或 $\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x-y_1)(x-y_2)\cdots(x-y_m)} > 0$ 型(数轴标根法): 令每个因式为 0, 将所得根按从小到大的顺序放置在数轴上, 用一条曲线从左上角第一个根处按如图的规律穿行, 将数轴分成上、下部两类, 所求答案是上部区域, 或者是下部区域(可试取检验值如 $x=0$ 或 1 进行检验, 但 0, 1 不是根)

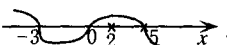



友情提示

① 若含因式 $(x-a)^{2n}$, 可删去因式 $(x-a)^{2n}$, 但应增添条件 $x \neq a$, 此时 a 不是原不等式的标根; ② 若含因式 $(x-a)^{2n+1}$, 先改为 $(x-a)^{2n}(x-a)$, 可删去因式 $(x-a)^{2n}$, 但应增添条件 $x \neq a$, 此时 a 是原不等式的标根.

实战举例: 解不等式 $x(\frac{1}{3}x+1)(x-2)^2(5-x)^5 > 0$.

事实上, 原不等式等价于 $x(\frac{1}{3}x+1)(x-2)^2(x-5)^4(x-5) < 0$, 即 $x(\frac{1}{3}x+1)(x-5) < 0$ 且 $x \neq 2, 5$, 如图所示, 不等式的解集为 $(-\infty, -3) \cup (0, 2) \cup (2, 5)$



8. 涉及一元二次方程根的讨论问题: 应关注三条控制工具: $\Delta, x_1 + x_2, x_1 \cdot x_2$, 要注意开口方向, 并依对称轴的位置进行讨论.

9. 不等式极端性原理: 若 $a \geq f(x)$ 恒成立, 则 $a \geq f(x)_{\max}$; 若 $a \leq f(x)$