GAOZHONG SHUXUE

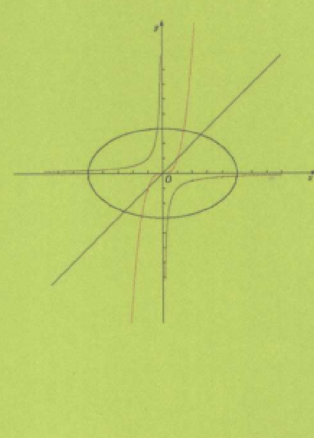
zhishi kuaisu

高中数学

陈明　编著

高中数学知识快速过关精读

guoquan jingdu



西南师范大学出版社
XINAN SHIFAN DAXUE CHUBANSHE

GAOZHONG SHUXUE
zhishi kuaisu
guoguan jingdu

高中数学知识
快速过关精读

ISBN 978-7-5621-3900-3

9 787562 139003 >

定价：12.00元

高中数学知识快速过关精读

陈　明　编著

西南师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学知识快速过关精读/陈明　编著. —重庆:西南师范大学出版社,2007.7

ISBN 978-7-5621-3900-3

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 陈…　Ⅲ. 数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 098502 号

高中数学知识快速过关精读

陈　明　编著

责任编辑:朱乃明

封面设计:王　煤

出　　版:西南师范大学出版社

重庆·北碚　邮编:400715

http://www.xscbs.com

发　　行:全国新华书店

印　　刷:西南政法大学印刷厂

开　　本:850mm×1168mm　1/32

印　　张:7.5

字　　数:260 千字

版　　次:2007 年 8 月第 1 版

印　　次:2007 年 9 月第 2 次印刷

书　　号:978-7-5621-3900-3

定　　价:12.00 元

《高中数学知识快速过关精读》

序 言

谨以此书献给我深爱着的人们!

这是一本薄书,是一本集作者几十年高中数学实战经验之精华,经精耕细作,将高中三年数学内容提精变薄的工具书!它具有通俗化、大众化、可读性、可操作性及实战性强的特点。该书在知识脉络上线条十分清晰,特别注重了"点"、"线"间的相互联系,在对思路、方法、程序、规律的分析和总结中,以明晰轻松的口吻娓娓道来,还读者更多的思维空间。全书系统地、简明扼要地对各章知识要点逐一归类总结,侧重于对知识要点的正确解读,着力于对知识的理解、消化、记忆方法及融会贯通上的透彻点拨,多数知识点配有必要的实战举例,相信你只要静下来沉进去,那怕只用十来分钟也会收到意想不到的效果。该书薄而精炼,既便于携带又利于查阅,极具实用性和资料性,集学习性与备考性于一身,是一本不可多得、开卷有益的高中数学工具书。本书不失为全体高中学生、成考自考生、师范院校数学专业学生的首选备用读物。也是战斗在教学第一线的高中数学老师上好的工具书。希望你能喜欢!谢谢!

陈明

2007 年春于碚城

本书编写意图及个性特点

“减负”！让学生从厚厚的书本中解脱出来。

询问学生学习中感觉最难学的是什么？相信多数人会说“数学”，再继续追问学数学过程中你最想要的辅助工具是什么？相信大多数同学会本能地告诉你，想要这样一本书，它能在大量压缩的前提下保留所有高中数学内容的精华知识，它能全面准确地提供出各章各节知识的要害和重难点，并在认知、理解、操作等方面提供具体的帮助及相关提示，提供使用这些知识技能的具体操作要点、程序及注意事项，在各个知识点处提供一些必要的基本范例实解助其理解和掌握，提供相应解题的引入思想、方式方法。它必须使用通俗易懂的语言让人一看就明、一读就懂、一想就通、看得见摸得着！也就是说，需要一本薄而精的案头工具书。它必需具有通俗化、大众化、可读性、可操作性及实战性强的特点。但它应与世面上众多的练习册、复习资料一类的东西在取向上有很大的不同。因为上述资料走的都是以讲例为主、以练为辅之路，大多题型新颖，讲得轰轰烈烈很是闹热！对基础好的当然帮助巨大。但对大多数底子不牢、基础不稳的学生而言却缺乏实实在在的可取之处。要知道基础的东西未解决，一味跟着其硬上，必然是只能依样画葫芦，比着别人的模样去做题。为什么要这样想？为什么要这样做？怎样举一反三？由此及彼等统统变成空谈！这样读书当然是费力不讨好，考试的结果可想而知，搞不好读大学只不过是一个美好的梦想而以。针对上述理由和市场的需求欲望，《高中数学知识快速过关精读》应运而生，他从一名精于此道的专业优秀一线授课老师的角度，完全按学生的想法和意愿，以业内行家的身份为此量体裁衣，提供针对性极强的全方位服务！他不太在意于题该怎么解，练题不是他的重心（所配实战举例也仅限于对相关知识的应用说明，教你会想能用），它侧重于对双基知识的正确解读，着力于对知识的认知、理解、方式方法的具体落实上，手把手地教你去想、去悟、去探索，引导你快乐轻松地学习，给你一双慧眼让你也能悟透所学知识的内涵实质，给你以明晰的洞察力和丰富的想象力，给你解决实际问题的基本能力，助你成为真正的尖子生。也正是这些构成了本书出彩的闪光点。

目 录

第一章　集合与简易逻辑

一、集合

1. 弄清集合中的代表元素的意义(例:①$\{x \mid y = x^2\}$,②$\{y \mid y = x^2\}$,③$\{(x,y) \mid y = x^2\}$. ① 表示函数 $y = x^2$ 定义域;② 表示函数 $y = x^2$ 的值域;③ 表示函数 $y = x^2$ 图像上所有点的集合).

2. 注意空集 $\varnothing$ 的特点:①$\varnothing \in \{\varnothing\}$②$\varnothing \subsetneq \{\varnothing\}$③$A \cap \varnothing = \varnothing$ ④$A \cup \varnothing = A$ ⑤$\varnothing \subseteq A$.

友情提示

由于 $\varnothing$ 的特殊性,在解题时若忽视 $\varnothing$ 的存在性,就会造成解题结果的残缺不全,命题人常在此设障,应高度重视.

实战举例: 设集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 6x = 0\}$,$B = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 3(a+1)x + a^2 - 1 = 0\}$ 且 $A \cup B = A$,求实数 a 的取值范围.

事实上,$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 6x = 0\} = \{0, -6\}$,由 $A \cup B = A$ 知 $B \subseteq A$. ① 当 $B = A = \{0, -6\}$ 时,由韦达定理有 $\begin{cases} -3(a+1) = -6 \\ a^2 - 1 = 0 \end{cases}$,解得 $a = 1$;② 当 $B \subsetneq A$ 时,(A) 如果 $B \neq \varnothing$,那么有 $B = \{0\}$ 或 $B = \{-6\}$. 由 $\Delta = [3(a+1)]^2 - 4(a^2 - 1) = 0$ 有 $5a^2 + 18a + 13 = 0$,解得 $a = -1$ 或 $a = -\dfrac{13}{5}$. 当 $a = -1$ 时,有 $x^2 = 0$,即 $x = 0$,此时 $B = \{0\}$ 满足题意. 当 $a = -\dfrac{13}{5}$ 时,有 $x^2 - \dfrac{24}{5}x + \dfrac{144}{25} = 0$,即 $x_1 = x_2 = \dfrac{12}{5}$,此时 $B = \{\dfrac{12}{5}\}$(舍). (B) 如果 $B = \varnothing$,则 $\Delta = [3(a+1)]^2 - 4(a^2 - 1) < 0$,即 $5a^2 + 18a + 13 < 0$,解得 $-\dfrac{13}{5} < a < -1$,此时也满足 $B \subsetneq A$. 综上所述:$-\dfrac{13}{5} < a \leqslant -1$ 或 $a = 1$.

3. ① 元素 x 与集合 A 之间仅有 $\in$, $\notin$ 两种关系;

② 集合 A,B 之间仅有 $\subseteq$, $\supseteq$, $\subsetneq$, $\supsetneq$, $\not\subseteq$, $=$ 关系,符号不能混用.

4. 集合中的元素必须是确定的且彼此互异;集合与元素的顺序无关.

5. 子集:① 对两集 A 与 B,若集 A 中每一元素都是集 B 的元素,则称集 A

是集 B 的子集，记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$)；② 特别地，若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称集 A 是集 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$(或 $B\supsetneqq A$).

实战举例：判断下列集合间的关系.

(A)$A=\{x\mid x=2k-1,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=4k\pm1,k\in\mathbf{Z}\}$.

(B)$A=\{x\mid x=\frac{2k\pi}{7}+\frac{\pi}{7},k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=\frac{2k\pi}{7}-\frac{\pi}{7},k\in\mathbf{Z}\}$.

(C)$A=\{(x,y)\mid |x|+|y|<2\}$，$B=\{(x,y)\mid x^2+y^2<4\}$，$C=\{(x,y)\mid |x|<2$ 且 $|y|<2\}$.

(D)$A=\{x\mid x=\sin\frac{k+3}{4}\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{y\mid y=\cos\frac{k-3}{4}\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.

(E)$A=\{x\mid x=k+\frac{1}{6},k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{y\mid y=\frac{m}{2}-\frac{1}{3},m\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{z\mid z=\frac{n}{2}+\frac{1}{6},n\in\mathbf{Z}\}$.

事实上，(A) 对 $A=\{x\mid x=2k-1,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=4k\pm1,k\in\mathbf{Z}\}$，显然 A,B 均为奇数集，故 $A=B$.(B) 因 $A=\{x\mid x=(2k+1)\cdot\frac{\pi}{7},k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=(2k-1)\cdot\frac{\pi}{7},k\in\mathbf{Z}\}$，所以 $A=B$.(C)$A=\{(x,y)\mid |x|+|y|<2\}$ 表示以 x 轴，y 轴为对角线，边长为 $2\sqrt{2}$ 的正方形内的点集；$B=\{(x,y)\mid x^2+y^2<4\}$ 表示以原点 O 为圆心，2 为半径的圆的内部的点集；$C=\{(x,y)\mid |x|<2$ 且 $|y|<2\}$ 表示 4 条直线 $x=\pm2$，$y=\pm2$ 所围正方形内的点集，如图所示：$A\subsetneqq B\subsetneqq C$.(D)$A=B=\{0,-\frac{\sqrt{2}}{2},-1,\frac{\sqrt{2}}{2},1\}$.(E) 显然 $A=\{x\mid x=\frac{1}{6}\cdot(6k+1),k\in\mathbf{Z}\}$，又 $B=\{x\mid x=\frac{1}{6}\cdot(3k+1),k\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{x\mid x=\frac{1}{6}\cdot(3k+1),k\in\mathbf{Z}\}$，则 $A\subsetneqq B=C$.

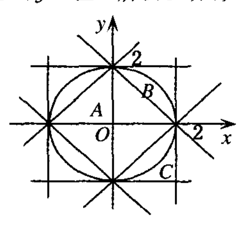


图 1-1

6. 子集的个数：若集 A 仅有 n 个元素，则集 A 共有 2^n 个子集，2^n-1 个真子集.

7. 交集：$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}\Leftrightarrow A\cap B$ 是集 A,B 的所有公共元素构成之集 $\Leftrightarrow$ 任取 $x\in A\cap B$，则 x 既具有 A 中元素特征，同时又具有 B 中元素特征.

实战举例 1:$M=\{(x,y)\mid y=\frac{1}{4}x^2\}$,$N=\{(x,y)\mid x^2+\frac{(y-a)^2}{4}=1\}$,且 $M\cap N\neq\varnothing$,求 a 的取值范围.

事实上,由$\begin{cases}y=\frac{1}{4}x^2\\x^2+\frac{(y-a)^2}{4}=1\end{cases}$有 $y^2+2(8-a)y+a^2-4=0(y\geqslant 0)$,因 $M\cap N\neq\varnothing$,则方程有非负实根.函数 $f(y)=y^2+2(8-a)y+a^2-4$ 表示开口向上的抛物线. ① 若方程仅有一个非负实数解,则必有 $f(0)\leqslant 0$,解得 $a\in[-2,2]$;② 若方程有两个非负实数解,则必有$\begin{cases}f(0)\geqslant 0\\\text{对称轴 } x=-(8-a)>0\\\Delta=4(8-a)^2-4(a^2-4)\geqslant 0\end{cases}$,解得 $a\in\varnothing$. 综上所述:$a\in[-2,2]$.

实战举例 2:设数集 $M=\{x\mid m\leqslant x\leqslant m+\frac{3}{4}\}$,$N=\{x\mid n-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant n\}$,且 M,N 都是集合 $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$ 的子集.若把 $b-a$ 叫做集合 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 的"长度",求集合 $M\cap N$ 的"长度"的最小值.

事实上,由已知,$M\cap N$ 的"长度"就是该集合中最大实数与最小实数之差,显然集合 M,N 的长度为定值 $\frac{3}{4}$,$\frac{1}{3}$,欲使 $M\cap N$ 的长度最小,只需 $m=0$ 且 $n=1$,此时 $M=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}\}$,$N=\{x\mid\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1\}$,那么 $M\cap N=\{x\mid\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}\}$. 所以 $M\cap N$ 的最小长度为 $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$.

8. 并集:$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}\Leftrightarrow A\cup B$ 是由集 A,B 的所有互异元素(相同者只记一次)构成之集 $\Leftrightarrow$ 任取 $x\in A\cup B$,则 x 具有 A 中元素特征或具有 B 中元素特征.

实战举例 1:若集合 $A=\{1,3,x\}$,$B=\{1,x^2\}$,$A\cup B=A$,求满足条件的实数 x 的个数.

事实上,因 $A\cup B=A$,所以 $B\subseteq A$. 当 $x^2=3$ 时,有 $x=\pm\sqrt{3}$;当 $x^2=x$ 时,有 $x=0$ 或 $x=1$(舍),那么,所求实数 x 的值为 $-\sqrt{3},0,\sqrt{3}$ 共 3 个值.

实战举例 2:若 $A=\{x\mid 2x^2-px+q=0\}$,$B=\{x\mid 6x^2+(p+2)x+5+q=0\}$,且 $A\cap B=\{\frac{1}{2}\}$,求 $A\cup B$.

事实上，因 $A \cap B = \{\frac{1}{2}\}$，那么 $\frac{1}{2} \in A$，$\frac{1}{2} \in B$，故有

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{p}{2} + q = 0 \\ \frac{3}{2} + \frac{p+2}{2} + 5 + q = 0 \end{cases}$$，解得 $\begin{cases} p = -7 \\ q = -4 \end{cases}$，所以 $A \cup B = \{-4, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$.

9. 补集：$\complement_U A = \{x \mid x \in U 但 x \notin A\} \Leftrightarrow \complement_U A$ 是由全集 U 中除去 A 中元素后余下的元素构成之集 $\Leftrightarrow$ 任取 $x \in \complement_U A$，则 x 具有 U 中元素特征但不具有 A 中元素特征.

实战举例：已知 $A = \{-3, a^2, a+1\}$，$B = \{a-3, 2a-1, a^2+1\}$，$A \cap B = \{-3\}$，若全集 $U = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$，求 $\complement_U(A \cup B)$.

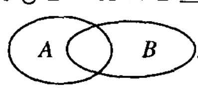
事实上，因为 $A \cap B = \{-3\}$，则 $a - 3 = -3$ 或 $2a - 1 = -3$. ① 由 $a - 3 = -3$ 有 $a = 0$，此时 $A = \{-3, 0, 1\}$，$B = \{-3, -1, 1\}$（舍）；② 由 $2a - 1 = -3$ 有 $a = -1$，此时 $A = \{-3, 1, 0\}$，$B = \{-4, -3, 2\}$，则 $A \cup B = \{-4, -3, 0, 1, 2\}$，那么 $\complement_U(A \cup B) = \{-2, -1, 3, 4\}$.

10. 运算性质除几条常见性质外应格外注意以下几条：

① $\complement_U(\complement_U A) = A$ ②$(\complement_U A) \cup A = U$ ③$(\complement_U A) \cap A = \varnothing$.

④（摩根律）$\complement_U(A \cup B) = \complement_U A \cap \complement_U B$；$\complement_U(A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B$.

⑤$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$，$A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$.

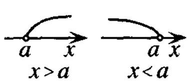
⑥ 有限集元素个数公式 

.

如图所示：$\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B)$；

同理可得：$\mathrm{card}(A \cup B \cup C) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) + \mathrm{card}(C) - \mathrm{card}(A \cap B) - \mathrm{card}(A \cap C) - \mathrm{card}(B \cap C) + \mathrm{card}(A \cap B \cap C)$.

二、解不等式

1. 

.

2. 不等式组的解：所有解曲线的公共部分.

3. ① $\begin{cases} |f(x)| \leqslant a(a > 0) \Leftrightarrow -a \leqslant f(x) \leqslant a \\ ax^2 + bx + c \leqslant 0(a > 0) \Leftrightarrow x_{小} \leqslant x \leqslant x_{大}(\Delta > 0) \end{cases}$

② $\begin{cases} |f(x)| \geqslant a(a > 0) \Leftrightarrow f(x) \geqslant a 或 f(x) \leqslant -a \\ ax^2 + bx + c \geqslant 0(a > 0) \Leftrightarrow x \geqslant x_{大} 或 x \leqslant x_{小}(\Delta > 0) \end{cases}$.

友情提示

① 对绝对值不等式，若 a 符号未定，应就 $a\leqslant 0$ 和 $a>0$ 两种情况进行讨论.

② 对 $x^2+px+q>0$；若 $\begin{cases}\Delta<0,\text{则 } x\in\mathbf{R}\\ \Delta=0,\text{则 } x\in(-\infty,x_0)\cup(x_0,+\infty)\end{cases}$.

③ 对 $x^2+px+q<0$ 若 $\begin{cases}\Delta<0,\text{则 } x\in\varnothing\\ \Delta=0,\text{则 } x\in\varnothing\end{cases}$.

实战举例 1：解不等式 $|x^2-3x-4|<x+1$.

事实上，方法 1：$|x^2-3x-4|<x+1$ 等价于 $\begin{cases}x+1>0\\ -(x+1)<x^2-3x-4<x+1\end{cases}$，解得 $x\in(3,5)$. 方法 2：$|x^2-3x-4|<x+1$ 等价于 $\begin{cases}x+1>0\\ (x^2-3x-4)^2<(x+1)^2\end{cases}$，解得 $x\in(3,5)$. 方法 3：$|x^2-3x-4|<x+1$ 等价于函数 $y=|x^2-3x-4|$ 的图像在直线 $y=x+1$ 下方时，求对应 x 的范围. 借助图像得 $x\in(3,5)$.

实战举例 2：不等式 $ax^2+bx+c>0$ 之解集为 $x\in(\alpha,\beta)(1<\alpha<\beta)$，求不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集.

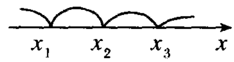
事实上，解集 $(\alpha,\beta)\Leftrightarrow(x-\alpha)(x-\beta)<0$，即 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta<0$，即 $-x^2+(\alpha+\beta)x-\alpha\beta>0$，等价于 $ax^2+bx+c>0$，故有 $\begin{cases}a=-k\\ b=(\alpha+\beta)k\\ c=-\alpha\beta k\end{cases}$（这里 $k>0$）. 那么，不等式 $cx^2+bx+a<0$ 等价于 $-\alpha\beta x^2+(\alpha+\beta)x-1<0$，即 $\alpha\beta x^2-(\alpha+\beta)x+1>0$，因 $1<\alpha<\beta$，有 $\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}>0$，故 $x\in(-\infty,\frac{1}{\beta})\cup(\frac{1}{\alpha},+\infty)$ 为所求.

4. 形如 $|f(x)|\geqslant|g(x)|$ 型：只需两边平方则可去掉绝对值符号.

实战举例：解不等式 $|x|>|x+1|$.

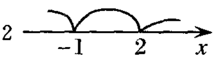
事实上，$|x|>|x+1|\geqslant 0$，即 $x^2>(x+1)^2\geqslant 0$，即 $2x+1<0$，不等式的解集为 $(-\infty,-\frac{1}{2})$.

5. 形如 $|f(x)|\geqslant g(x)$ 型：依绝对值定义分 $f(x)\geqslant 0$ 和 $f(x)<0$ 两种情况进行讨论求解.

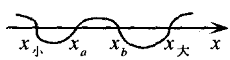
6. 形如 $|f(x)|+|g(x)|+|q(x)|+\cdots \geqslant 0$ 型(零点分片讨论法):令 $f(x),g(x),q(x),\cdots$ 分别为 0,将所得根按从小到大的顺序放置在数轴上(如图) 

,这就将数轴分成了若干片,然后从左到右逐片讨论解不等式.

实战举例: 解不等式 $|x+1|-|x-2|<1$.

事实上,令 $x+1,x-2$ 为 0,有 $x=-1,2$ 

,① 由 $\begin{cases} x<-1 \\ -(x+1)+(x-2)<1 \end{cases}$,解得 $x<-1$;② 由 $\begin{cases} -1\leqslant x<2 \\ x+1+x-2<1 \end{cases}$,解得 $-1\leqslant x<1$;③ 当 $\begin{cases} x\geqslant 2 \\ x+1-(x-2)<1 \end{cases}$ 时无解. 综上所述 $x\in(-\infty,1)$.

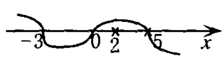
7. 形如 $(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)>0$ 或 $\dfrac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x-y_1)(x-y_2)\cdots(x-y_m)}>0$ 型(数轴标根法):令每个因式为 0,将所得根按从小到大的顺序放置在数轴上,用一条曲线从左上角第一个根处按如图的规律穿行,将数轴分成上、下部两类,所求答案是上部区域,或者是下部区域(可试取检验值如 $x=0$ 或 1 进行检验,但 0,1 不是根) 

.

友情提示

① 若含因式 $(x-a)^{2n}$,可删去因式 $(x-a)^{2n}$,但应增添条件 $x\neq a$,此时 a 不是原不等式的标根;② 若含因式 $(x-a)^{2n+1}$,先改为 $(x-a)^{2n}(x-a)$,可删去因式 $(x-a)^{2n}$,但应增添条件 $x\neq a$,此时 a 是原不等式的标根.

实战举例: 解不等式 $x(\frac{1}{3}x+1)(x-2)^2(5-x)^5>0$.

事实上,原不等式等价于 $x(\frac{1}{3}x+1)(x-2)^2(x-5)^4(x-5)<0$,即 $x(\frac{1}{3}x+1)(x-5)<0$ 且 $x\neq 2,5$,如图所示,不等式的解集为 $(-\infty,-3)\cup(0,2)\cup(2,5)$ 

.

8. 涉及一元二次方程根的讨论问题:应关注三条控制工具:Δ,x_1+x_2,$x_1\cdot x_2$,要注意开口方向,并依对称轴的位置进行讨论.

9. 不等式极端性原理:若 $a\geqslant f(x)$ 恒成立,则 $a\geqslant f(x)_{max}$;若 $a\leqslant f(x)$