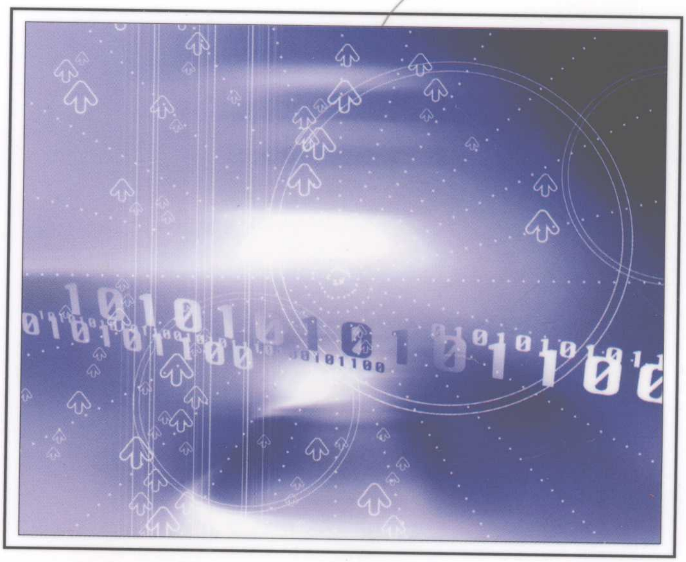
普通高等院校“十一五”电子信息与电气学科研究生规划教材

最优化理论与方法

Optimization Theory and Method

傅英定　成孝予　唐应辉　主编



国防工业出版社
National Defense Industry Press

电子科技大学研究生系列教材建设项目

电子科技大学数学系列教材

最优化理论与方法

傅英定　成孝予　唐应辉　主编

国防工业出版社

·北京·

内容简介

本书是在原教材《最优化理论与方法》的基础上修改而成的。这次修改听取了使用本书的师生的意见，删去了一些较繁杂的数学推导，增加了一些较成熟的算法，纠正了一些编排错误，使内容与系统更加完整，便于自学与教学。

本书内容包括最优化基础、线性规划、对偶线性规划、无约束最优化方法、约束优化方法、直接搜索的方向加速法、多目标优化、动态规划等内容。

本书具有取材得当、难易适度、注意思想、算法简明、便于自学与教学的特点，适合工科研究生、工科高年级本科生和应用数学专业学生使用。

图书在版编目(CIP)数据

最优化理论与方法 / 傅英定，成孝予，唐应辉主编.
北京：国防工业出版社，2008.6
（研究生系列规划教材）
ISBN 978-7-118-05411-8

Ⅰ.最… Ⅱ.①傅…②成…③唐… Ⅲ.最佳化-研究生-教材 Ⅳ.O224

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第164488号

※

国防工业出版社出版发行
（北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100044）
腾飞印务有限公司印刷
新华书店经售
*
开本 710×960 1/16 印张 23¼ 字数 416 千字
2008年6月第1版第1次印刷 印数 1—5000 册 定价 40.00 元

国防书店：(010) 68428422　　发行邮购：(010) 68414474
发行传真：(010) 68411535　　发行业务：(010) 68472764

序　言

从20世纪80年代历时至今的二十多年来，信息电子科学技术的发展令人瞩目。以无线通信和互联网技术为代表的现代信息电子科技极大地促进了经济、社会的发展，并深刻地改变了人类生活。如今，信息电子技术不仅自身已蓬勃发展为强大的新兴产业，它对各传统产业在技术进步上的促进也是有目共睹的。而在国防建设和军事技术的发展中，信息电子技术的重要性更为突出，因为现代化战争最关键的环节就是信息的获取、控制与对抗等电子技术的较量。

正因为迅猛发展的信息电子技术对当今社会发展具有如此重要的意义，因此，国内各高校都极其重视信息电子类相关学科的发展、相关专业的成长和相关专业教学水平的提高。而在这一巨大的努力和付出中，研究生教育质量的提升和研究生教材建设则是至关重要的一环。

电子科技大学正是基于上述认识，近年来加大了电子信息类教材建设的力度。我校的学科专业涵盖了从电子材料、电子器件、电路、信号、控制直到各种电子系统的较为完整的电子信息领域，学校极为重视国内外研究生课程的设置和教材内容的比较研究，并建立了专项基金，用于资助具有一定学术水平的研究生教材的编写与出版。

当然，教材建设也是一项学术性很强的工作。研究生教材既要体现理论上的基础性和系统性，又要尽可能地反映本领域研究的最新成果和进展，要求较高。另一方面，高校的骨干师资力量大多既要承担繁重的科研工作，又要承担大量的教学任务，加之各位教授的专业背景不同，教材的最终质量和使用效果仍需通过实践去检验。因此，我们诚恳希望使用这些教材的各个院校的广大师生直言批评，不吝指正，使我校的教材建设能够越做越好。

电子科技大学

二〇〇五年十月十九日

前　　言

在科学研究、工程技术及经济管理工作中，经常需要从多种方案中确定一种最佳方案，确定最佳方案的方法就是最优化方法，其理论基础就是最优化理论。

最优化理论与方法是随着电子计算机的广泛应用而迅速发展起来的一门新的数学分支。它与许多传统数学分支最明显的区别是与计算机关系紧密，同时具有很强的实用性。由于现代科学技术、工程设计与管理问题的日益复杂化，仅靠传统的方法与手段已难以解决问题。而最优化理论与方法则在许多实际问题与计算机之间架设了一座桥梁，掌握了这种理论与方法，就可以将大量的实际问题按其内在的规律抽象为某种形式的数学模型，然后利用计算机帮助寻找和判断最佳方案或最优参数。实践表明，最优化理论与方法已经在科学研究、工程设计、经济管理中发挥着越来越大的作用，并且产生了直接、巨大的经济效益。它已成为当代科技工作者、工程师和管理决策人员必备的知识。

本书着重介绍当前最优化方法中理论上成熟并且应用性较强的内容。对于个别证明比较繁难，而又必须引用的理论性结果，我们采用直接引用、指明出处的方法，不在书中详细证明。对于具体的计算方法，我们一般先介绍算法的基本思想，再给出计算步骤或框图，希望能对读者掌握与理解算法的要旨有所帮助。除第 1 章内容为以后各章的基础外，其余各章内容基本独立，读者可根据需要学习全部或部分章节。阅读本书的预备知识是微积分与线性代数。

本书是在原教材《最优化理论与方法》的基础上，通过对研究生及高年级本科生多年的教学实践并吸取国内外最优化理论发展的新近成果修定而成的。与国内外同类教材相比，该教材特色较突出：突出了最优化建立模型及算法的主要思想，使理工科学生容易学习和使用；突出了电子科技大学电子信息类专业所需的最优化的基本理论与方法；较好地反映了最优化理论与方法学科前沿的新近成果。该教材吸取了多年来教学实践中学生提出的若干意见，使得教材更具实用性。

本书由电子科技大学谢云荪教授审稿。谢云荪教授认为：该教材理论体系较完备，算法产生的思想和算法原理论述清楚，详略得当，逻辑性强，语言生动，可读性强，难度适中，是一本适合工科研究生、工科高年级本科生和应用数学专

业学生使用的好教材。

该教材在编写、修改、补充与出版过程中,得到了电子科技大学研究生院的积极资助;得到了电子科技大学应用数学学院院长黄廷祝教授以及应用数学学院广大教师的关心与大力支持。在此,对他们表示衷心的感谢!

本书由傅英定、成孝予、唐应辉教授主编,各章的编者为:成孝予(第1章~第3章)、傅英定(第4章~第6章)、唐应辉(第7章、第8章)。

由于编者水平有限,尽管做了极大地努力,书中亦难免有错误或不妥之处,恳请读者批评指正。

编　者

2008年3月

目　录

第1章　最优化问题与凸分析基础

在日常生活中，无论做什么事情，总是有多种方案可供选择，并且可能出现多种不同的结果。我们在做这些事情的时候，总是自觉或不自觉地选择一种最优方案，以期达到最优的结果。在现代工程技术与经济管理中，我们有意识地追求最优方案以达到最优结果。这种追求最优方案以达到最优结果的学科就是最优化。寻求最优方案的方法就是最优化方法，这种方法的理论基础就是最优化理论，而凸分析又是最优化理论的基础之一。

1.1　最优化问题

所谓最优化问题，用数学语言来说，就是求一个一元函数或多元函数的极值。在微积分中，我们曾经接触过一些比较简单的极值问题。下面通过具体例子来看看什么是最优化问题。

1.1.1　最优化问题的例子

例1　已知热敏电阻的阻值 R 与温度 t 的函数关系为 $R = x_1 \exp\left(\frac{x_2}{t + x_3}\right)$，$x_1$，$x_2$，$x_3$ 为待定参数。通过实验，测得在温度为 t_i 时，阻值为 R_i，得到一组数据 (t_1, R_1)，(t_2, R_2)，$\cdots$，(t_m, R_m)，问应怎样根据这一组测量数据来确定参数 x_1, x_2, x_3？

当我们将 x_1, x_2, x_3 确定后，就确定了 R 对于 t 的一个函数关系，这个函数在几何上对应于一条平面曲线。但是，这条曲线未必刚好通过那 m 个测量点，一般都要产生偏差，而这种偏差当然越小越好。我们用所有测量点沿铅直方向到曲线距离的平方和来描述这种偏差，则此问题的数学模型为

$$\min \sum_{i=1}^{m} \left[R_i - x_1 \exp\left(\frac{x_2}{t_i + x_3}\right) \right]^2$$

其示意图如图 1 - 1 所示。

例2　（运输问题）已知某煤炭集团公司有 m 个产地 $A_1, A_2, \cdots, A_m$，其产量分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_m$（吨）。有 n 个销地 $B_1, B_2, \cdots, B_n$，其销量分别为 $b_1, b_2, \cdots,$

b_n(吨)。假定产销平衡,即

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

由 A_i 到 B_j 的运费为 c_{ij}(元/吨),($i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n$)。问在保障供给的条件下,由每个产地到每个销地的运输量为多少吨时,总运费最少。

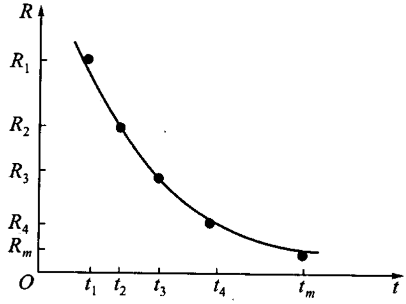


图 1-1

解 设由 A_i 到 B_j 的运输量为 x_{ij}(吨),则总运费为

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

其中,x_{ij}应满足

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1,2,\cdots,m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

用数学式子来描述,可得以上问题的数学模型为

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1,2,\cdots,m) \\ \quad\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1,2,\cdots,n) \\ \quad\ x_{ij} \geqslant 0 \end{cases}$$

这里“s. t. 是英文“subject to”的缩写，意为“满足于”。s. t. 后面的式子称为约束条件。

例 3 信号发生仪中正弦波形逼近的优化设计。

这是一个实际的电路设计问题，要求用折线近似地代替正弦曲线，并要求在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内确定 6 个点 $x_1,x_2,\cdots,x_6$，使得将 $(0,0)$，$(x_1,\sin x_1)$，$\cdots$，$(x_6,\sin x_6)$，$\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 等点连接所得折线代替 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的正弦曲线时失真度最小。在数学上，就是使该折线与正弦曲线之间所围成的平面图形面积最小。其示意图如图 1－2 所示。

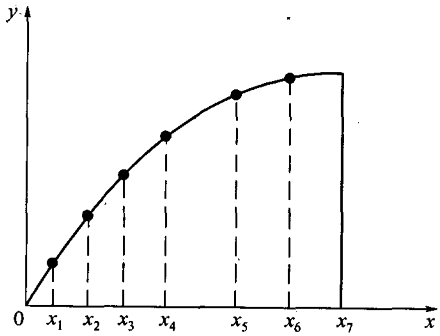


图 1－2

正弦曲线与 $x=\frac{\pi}{2}$ 及 x 轴所围图形的面积为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x = 1$$

折线与 $x=\frac{\pi}{2}$ 及 x 轴所围图形的面积为

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{7}(x_i - x_{i-1})(\sin x_i + \sin x_{i-1})$$

其中，$x_0=0, x_7=\frac{\pi}{2}$。

于是，正弦曲线与折线所围图形的面积为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_6) = 1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{7}(x_i - x_{i-1})(\sin x_i + \sin x_{i-1})$$

该问题的数学模型为

$$\begin{cases}\min f(x_1, x_2, \cdots, x_6) \\ \text{s.t.}\ 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_7 = \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

或者

$$\begin{cases}\min f(\boldsymbol{X}) \\ \text{s.t.}\ \ g_i(\boldsymbol{X}) = x_i - x_{i-1} > 0 \\ \qquad\quad x_i \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, 6)\end{cases}$$

其中，$\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_6)^{\mathrm{T}}$。

1.1.2 最优化问题的数学模型

以上三个不同类型的最优化问题的共同特点是，求变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的值，使某函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的值达到最小，通常将 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为目标函数。

1. 最优化问题的一般形式

$$\begin{cases}\min f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \text{s.t.}\ \ g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \\ \qquad\quad h_j(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, k)\end{cases} \qquad (1-1-1)$$

如果具体问题是求 $\max f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则可令 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = -f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，于是最大值问题就转化为最小值问题 $\min \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

如果约束条件中有 $s_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqslant 0$，则可令 $g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = -s_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，于是，原来的“$\leqslant$”就转化为“$\geqslant$”。

所以，一般的最优化问题都可以表示为式(1-1-1)的形式。其中，$g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geqslant 0$ 称为不等式约束，$h_j(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ 称为等式约束。

2. 最优化问题的向量表达式

为了叙述与讨论的方便，我们也可将式(1-1-1)记为下面的向量形式

$$\begin{cases}\min f(\boldsymbol{X}) \\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}) \geqslant \boldsymbol{0} \\ \qquad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{0}\end{cases} \qquad (1-1-2)$$

其中，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$

$$G(X)=[g_1(X),g_2(X),\cdots,g_m(X)]^{\mathrm{T}}$$
$$H(X)=[h_1(X),h_2(X),\cdots,h_k(X)]^{\mathrm{T}}$$

1.1.3 最优化问题的分类

1. 与时间的关系

如果所论及的问题与时间无关，则称为静态问题，否则称为动态问题。

2. 是否有约束条件

有约束的最优化问题称为有约束问题，如例2、例3；否则称为无约束问题，如例1。

3. 函数类型

若目标函数$f(X)$与约束条件中的函数$g_i(X)$，$h_j(X)$都是线性函数，则称此最优化问题为线性规划，如例2；否则称为非线性规划问题，如例1、例3。

1.2 梯度与 Hesse 矩阵

1.2.1 等值线

二维最优化问题具有明显的几何意义，并且可以将这种几何意义推广到n维空间中去，这对于理解最优化理论和掌握最优化方法都是有益的，为此，我们在这里提出等值线的概念及其简单性质。

一般说来，二元函数$z=f(x,y)$在R^3中表示一个曲面，该曲面被平面$y=c$（c是常数）所截得的曲线L的方程为

$$\begin{cases} z=f(x,y) \\ z=c \end{cases}$$

曲线L在xOy平面上的投影是一条平面曲线L^*，（如图1-3所示）。L^*在xOy平面上的方程是

$$f(x,y)=c$$

对于L^*上的所有点(x,y)，$f(x,y)$的值都等于c，L^*称为函数$z=f(x,y)$的等值线。

在高维（$n\geqslant3$）空间中，使目标函数值取同一常数的点集$\{X\mid f(X)=c,c$为一常数$\}$称为$f(X)$的等值线（或等值面）。