高等财经院校教材

微积分学习指导

刘康泽　主编

ZUFE

立信会计出版社

高等财经院校教材

微积分学习指导

WEIJIFEN XUEXI ZHIDAO

刘康泽　主编

彭勇行 罗捍东 副主编

立信会计出版社

责任编辑：田　林
封面设计：周崇文

微积分学习指导

刘康泽　主编
立信会计出版社出版发行
（上海中山西路 2230 号）
邮政编码　200233
新华书店经销
立信会计常熟市印刷联营厂印刷
开本 850×1168 毫米　1/32　印张 12.375　插页 2　字数 305 000
1999 年 2 月第 1 版　1999 年 2 月第 1 次印刷
印数 1—3 500
ISBN7-5429-0640-2/F・0586
定价：16.70 元

前　言

“经济数学基础”是高等学校财经类各专业的核心系列课程。该课程包括微积分、线性代数、概率论与数理统计三个部分。由于这些数学课程的理论较为抽象，概念不易理解，解题技巧性强，证明方法灵活，学生在学习过程中常感到困难，难以灵活、准确地运用数学的概念、思想及方法解决所遇到的问题。为了帮助学生克服这些困难，使其学习好、掌握好、灵活运用好这些课程提供的理论及各种方法，我们特编写这套“经济数学基础学习指导”丛书。

这套学习指导丛书根据国家教育部审定的教学大纲，参考硕士研究生入学考试纲要进行选材。为达到导学方法、导学能力、导学智慧的目的，指导丛书力求具有以下特点：

1. 针对性强。针对“经济数学基础”中的基本理论与基本方法作了提纲挈领的阐述，对所选的例题进行了提炼与精编，并特别注重解题的演绎与方法的归纳，使其具有示范性与启发性，以加强基础知识与基本技能的训练；针对易模糊的概念及疑难问题，注重概念的内涵与外延及解题思想的表述，对疑难点作了较全面的解析；针对硕士研究生考试的要求，强调了问题的综合性、应用性与技巧性。

2. 题型丰富。一方面，对“经济数学基础”各课程的理论与方法中常见题型进行了较全面的精选，并注重了典型性与新颖性；另一方面，对各类考试中常见的考试题型（包括：选择题、填空题、分析判断题、简答题、计算题、证明题、应用题）进行了选编，以使学生能适应各类考试。

3. 覆盖面广。内容覆盖“经济数学基础”三个部分由国家教育部规定的《教学大纲》与《考试纲要》的全部内容。既有理论知识，又有题解实例，具有较好的启发性与可读性。不仅适合于各财经、管理类的本、专科学生学习与备考时使用，也适合于报考硕士研究生的学生复习时使用，同时可作为广大教师的参考书。

《微积分学习指导》由罗捍东（第一、二、三、四章），刘康泽（第五、六、七、八章）及彭勇行（第九章）编写。刘康泽负责对全书统纂。

这套学习指导书在编写、出版过程中得到中南财经大学校领导及教务处、信息系等有关部门的大力支持和帮助，特别是校教材发行科、数学教研室为本套指导书的编写、出版作了大量具体工作。在此，我们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中缺点、错误难免，敬请读者批评指正。

编　者

1999. 1. 20

目　录

第一章 函 数

§1.1 实 数 集

一、内容提要

1. 集合

集合是具有某种属性的事物的全体，或是一些确定对象的汇总。构成集合的事物或对象，称为集合的元素。

集合之间有包含关系、相等关系。

集合之间可以进行交、并、差和补集运算。集合运算满足交换律、结合律、分配律以及摩根律。

2. 实数集

集合的元素为实数的集合称为实数集。

全体实数构成的集合记为 R 或$(-\infty,+\infty)$，实数和数轴上的点具有一一对应关系。

3. 绝对值

一个实数 x 的绝对值记为$|x|$，定义为：

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

绝对值及其运算有下列性质：

(1) $|x|=\sqrt{x^2}$　　(2) $|x|\geqslant 0$

(3) $|-x|=|x|$　　(4) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$

(5) 如果 $a>0$，则下面两个集合相等：$\{x\,|\,|x|<a\}=\{x\,|\,-a<x<a\}$

(6) 如果 $b>0$，则下面两个集合相等：$\{x\,|\,|x|>b\}=\{x|x<-b\}\cup\{x|x>b\}$

(7) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$　　(8) $|x-y|\geqslant|x|-|y|$

(9) $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$　　(10) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|},y\neq0$

4. 区间

设 a,b 为实数，且 $a<b$。

(1) 开区间 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$

(2) 闭区间 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$

(3) 半开区间 $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$，$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$

(4) $(a,+\infty)=\{x|a<x\}$，$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\}$

(5) $(-\infty,b)=\{x|x<b\}$，$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$

(6) $(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$

(1)、(2)、(3)类区间称为有限区间，(4)、(5)、(6)类区间称为无限区间。

5. 邻域

在数轴上实数集合 $\{x\,|\,|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$ 是一个以点 x_0 为中心、长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$，称为点 x_0 的 δ 邻域。x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径。

实数集合 $\{x|0<|x-x_0|<\delta,\ \delta>0\}$ 是在点 x_0 的 δ 邻域内去掉点 x_0 后由其余的点所组成的集合，即集合 $(x_0-\delta,\ x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，称为以 x_0 为中心，δ 为半径的空心邻域。

二、基本方法与典型题型

1. 集合与区间的运算

例1　(1) 集合 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{c,d,e\}$，则 $A\cup B=$ ________，$A\cap B=$ ________，$A-B=$ ________，$B-A=$ ________。

(2) 集合 $A=\{x|x^2-5x+6=0\}$，$B=\{x|x^2-x+a=0\}$，若

$A\cap B$是非空集合，则 $a=$______。

(3) 集合 $A=\{x|0<x<5\}$，$B=\{x||x-1|\leqslant 3\}$，则 $A\cup B=$ ______，$A\cap B=$ ______，$A-B=$ ______，$B-A=$ ______。

(4) 集合 $A=\{x|0<|x-3|<1\}$，用区间表示为______，$B=\{x|1<|x-2|<3\}$用区间表示为______。

解(1) $A\cup B=\underline{\{a,b,c,d,e\}}$ $A\cap B=\underline{\{c,d\}}$ $A-B=\underline{\{a,b\}}$ $B-A=\underline{\{e\}}$

(2) $\underline{-2\text{或}-6}$

因为 $A=\{x|x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，若 $A\cap B$ 非空，则 $2\in B$ 或 $3\in B$，即 $a=-2$ 或 $a=-6$

(3) 因为 $A=\{x|0<x<5\}=(0,5)$，$B=\{x||x-1|\leqslant 3\}=[-2,4]$，所以 $A\cup B=\underline{[-2,5)}$，$A\cap B=\underline{(0,4]}$，$A-B=\underline{(4,5)}$，$B-A=\underline{[-2,0)}$

(4) $A=\underline{(2,3)\cup(3,4)}$，$B=\underline{(-1,1)\cup(3,5)}$

例 2 (1) 下列关于集合的关系，正确的是(　　)。

(A) $\{0\}=\varnothing$　　(B) $\varnothing\subset\{0\}$

(C) $\varnothing\in\{0\}$　　(D) $\{\varnothing\}=\varnothing$

(2) 下列集合中(　　)是空集。

(A) $\{0,1,2\}\cap\{0,3,4\}$　　(B) $\{x|x^2+1=0,x\in R\}$

(C) $\{(x,y)|y=x \text{ 且 } y=2x\}$　　(D) $\{x||x|<1 \text{ 且 } x>0\}$

(3) 设集合 $M=\{x|x<0\}$，$N=\{x||x|\leqslant 1\}$，则下列式子正确的是(　　)。

(A) $M\cup N=\{x|x<1\}$　　(B) $M\cap N=\{x|0<x<1\}$

(C) $M\cup N=\{x|x\geqslant -1\}$　　(D) $M\cap N=\{x|-1\leqslant x<0\}$

解：(1) (B)

因为空集$\varnothing$包含于任意集合，所以(B)正确。由于$\{0\}$是包含 0 元素的集合，故而它不是空集，因此，(A)不对；由于空集$\varnothing$不是集合

$\{0\}$的元素，因此(C)也不正确；而$\{\varnothing\}$是一个元素为空集的集合，故而它不是空集，因此，(D)也不对。

(2) (B)

因为方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内无解，所以(B)中集合是空集。而(A)中集合等于$\{0\}$不是空集，(C)中集合等于$\{(0,0)\}$也不是空集，(D)中集合等于$(0,1)$也非空集。

(3) (D)

因为 $M\cap N=\{x\,|\,x<0,|x|\leqslant 1\}=\{x\,|\,-1\leqslant x<0\}$，而

$$M\cup N=\{x\,|\,x<0\text{ 或 }|x|\leqslant 1\}=\{x\,|\,x\leqslant 1\}$$

2. 解不等式和含有绝对值的不等式时，应注意利用不等式和绝对值的性质求解。

例 3 将绝对值不等式 $|x-2|<3$ 化成不带绝对值的不等式为________，将不等式 $-5\leqslant x\leqslant 3$ 化成带有绝对值的不等式为________。

解：$\underline{-1<x<5}$，$\underline{|x+1|\leqslant 4}$

因为 $|x-2|<3$，所以 $-1<x<5$。又因为 $-5\leqslant x\leqslant 3$，即 $-4\leqslant x+1\leqslant 4$ 因此，$|x+1|\leqslant 4$。

例 4 求解下列不等式：

(1) $x^2+2x-3\geqslant 0$　　(2) $\dfrac{1-x}{1+x}>0$

(3) $\dfrac{x^2-x-2}{x-1}\leqslant 0$

解：(1) 由 $x^2+2x-3\geqslant 0$，即：$(x-1)(x+3)\geqslant 0$，这个不等式相当于下列两个不等式组：$\begin{cases}x-1\geqslant 0\\x+3\geqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-1\leqslant 0\\x+3\leqslant 0\end{cases}$，它们分别求解出 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -3$，所以，原不等式解为 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -3$。

(2) 不等式 $\dfrac{1-x}{1+x}>0$ 相当于：$\begin{cases}1-x>0\\1+x>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1-x<0\\1+x<0\end{cases}$，前面一个不等式组的解为 $-1<x<1$，后面一个不等式组无解，所以，原不等式的解为 $-1<x<1$。

(3) 令 $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x-1}=\frac{(x+1)(x-2)}{x-1}$，使分子、分母为 0 的点分别为 $-1,1,2$，分区间列表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f(x)$	$-$	0	$+$	无定义	$-$	0	$+$

从表中可以看出，当 $x<-1$ 或 $1<x\leqslant 2$ 时，$f(x)\leqslant 0$，所以原不等式的解为 $x\leqslant -1$ 或 $1<x\leqslant 2$。

注意：求解不等式 $f(x)>0$(或 <0)的一般方法是：将不等式的左边 $f(x)$ 分解因式，找出各因子的零值点，用这些点将整个实数域分成若干个开区间，然后判断 $f(x)$ 在各个开区间和临界点上的符号，便可求出原不等的解。例 4 中第(3)小题的求解方法就是这类问题的典型解法。当然，例 4 中第(1)、(2)小题也可以用这种方法求解，只是由于这两题相对而言比较简单，直接判断比列表判断更方便。对例 4 中第(2)小题，下面的求解方法是错误的：因为 $\frac{1-x}{1+x}>0$，两边乘以 $(1+x)$ 后得 $1-x>0$，即 $x<1$，所以不等式的解为 $x<1$。错误的原因在于因子 $(1+x)$ 可能是正的，也可能是负的。当 $(1+x)$ 为负时，不等式两边乘以 $(1+x)$ 后，不等式要变号。因此，在求解不等式一定要注意，不能随便用因子去乘或除不等式的两边。

例 5 求解下列绝对值不等式：

(1) $|x^2-3x+2|>x^2-3x+2$

(2) $\left|\frac{2x}{x+1}\right|\leqslant 1$ (3) $|x+2|+|x-2|\leqslant 12$

解：(1) 若 $x^2-3x+2\geqslant 0$，则 $|x^2-3x+2|=x^2-3x+2$，与不等式 $|x^2-3x+2|>x^2-3x+2$ 矛盾。所以 $x^2-3x+2<0$，因此 $\begin{cases}x-1<0\\x-2>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-1>0\\x-2<0\end{cases}$，第一种情形无解，第二种情形解为

$1<x<2$,所以,原不等式的解为 $1<x<2$。

(2) 由 $\left|\dfrac{2x}{x+1}\right|\leqslant 1$ 可知 $-1\leqslant\dfrac{2x}{x+1}\leqslant 1$。

由 $\dfrac{2x}{x+1}\leqslant 1$,即 $\dfrac{2x}{x+1}-1\leqslant 0$,即 $\dfrac{x-1}{x+1}\leqslant 0$,由此 $-1<x\leqslant 1$,

由 $-1\leqslant\dfrac{2x}{x+1}$,即 $\dfrac{2x}{x+1}+1\geqslant 0$,即 $\dfrac{3x+1}{x+1}\geqslant 0$,由此 $x\geqslant -1/3$ 或 $x<-1$。

综合上述结果可知,不等式的解为:$-1/3\leqslant x\leqslant 1$。

(3) 为了去掉绝对值,将整个实数域分为三个区间:$(-\infty,2]$、$(-2,2)$ 和 $[2,+\infty)$。

当 $-\infty<x\leqslant -2$ 时,原不等式为 $-(x+2)-(x-2)\leqslant 12$,即 $x\geqslant -6$,所以在 $(-\infty,-2]$ 上的解为 $-6\leqslant x\leqslant -2$。

当 $-2<x<2$ 时,原不等式为 $(x+2)-(x-2)\leqslant 12$,即 $4\leqslant 12$,此时恒成立,所以,解为 $-2<x<2$。

当 $2\leqslant x<+\infty$ 时,原不等式为 $(x+2)+(x-2)\leqslant 12$,即 $x\leqslant 6$,所以在 $[2,+\infty)$ 上的解为 $2\leqslant x\leqslant 6$。

综合上述结果可知,不等式解为 $-6\leqslant x\leqslant 6$。

注意:求解含有绝对值的不等式时,首先应考虑怎样去掉绝对值号。通常的办法是对绝对值里面大于 0 的情况下或小于 0 的情况下分别求不等式的解,如例 5 中第(1)、(3)小题中采用的办法;也可以直接利用绝对值的性质去掉绝对值号,然后求解不等式,如例 5 中第(2)小题中使用的办法。

三、习题

1. 填空题:

(1) 集合 $A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 7\}$,$B$ 是以 1 为中心 3 为半径的邻域,则 $A\cup B=$ ________,$A\cap B=$ ________,$A-B=$ ________,$B-A=$ ________,$A'=$ ________,$B'=$ ________。

(2) 集合 $A=\{2,|a|\}$,$B=\{2,3,a^2+3a-5\}$,且 $A\cap B=$

$\{2,5\}$，则 $a=$ ________。

(3) 已知集合 $A=\{x,xy,\lg(xy)\}$，$B=\{0,|x|,y\}$，且 $A=B$，则 $x,y=$ ________。

(4) 带有绝对值的不等 $|x+2|<3$，变成不带绝对值的不等式为________。

(5) 将不等式 $-5<x<10$ 化为带有绝对值的不等式为________。

2. 选择题：

(1) 已知集合 M 满足关系 $\{1,2\}\subset M\subset\{1,2,3,4,5\}$，那么，这样的集合 M 共有(　　)。

(A) 3 个　　　(B) 6 个

(C) 8 个　　　(D) 10 个

(2) 设 $M=\{x|x\leqslant 0\}$，则下列关系式中正确的有(　　)。

(A) $\varnothing\in M$　　　(B) $0\subset M$

(C) $\{0\}\subset M$　　　(D) $\{0\}\in M$

(3) 设集合 $M=\{x|x^2\leqslant 1\}$，$N=\{x|0<x<3\}$，则 $M\cap N=$ (　　)。

(A) $(0,1)$　　　(B) $[0,1]$

(C) $[0,1)$　　　(D) $(0,1]$

(4) 集合 $Z=\{x|1<|x-2|<3\}$ 用区间表示为(　　)。

(A) $(-1,5)$　　　(B) $(1,3)$

(C) $(-1,1)\cup(3,5)$　　　(D) $(-1,1)\cap(3,5)$

3. 求解下列不等式：

(1) $x^2-2x\geqslant 8$　　　(2) $2x^2-5x+2<0$

(3) $\dfrac{|2x-1|}{|x-1|}<1$　　　(4) $|x|\geqslant|x-2|$

(5) $\dfrac{x+2}{2x^2+x-1}>0$　　　(6) $\dfrac{x^2-x-6}{x+3}\leqslant 0$

(7) $|x+1|+2|x-1|>1$　　　(8) $\sqrt{x^2-1}>2-|x|$

§1.2 函　数

一、内容提要

1. 函数的定义

若 D 是一个非空实数集合，设有一个对应规则 f，使每一个 $x\in D$，都有一个确定的实数 y 与之对应，则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数。记作 $y=f(x),x\in D$。x 称为自变量，y 称为因变量。集合 D 称为函数的定义域，也可以记作 $D(f)$。

对于 $x_0\in D(f)$ 所对应的 y 值，记作 y_0 或 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，称为当 $x=x_0$ 时，函数 $y=f(x)$ 的函数值。全体函数值的集合 $\{y|y=f(x),x\in D(f)\}$，称为函数 $y=f(x)$ 的值域，记作 Z 或 $Z(f)$。

2. 函数的表示法

常用的函数表示法有公式法、表格法和图形法。

3. 分段函数

有些函数，对于其定义域内自变量 x 不同的值，不能用一个统一的数学表达式表示，而要用两个或两个以上的式子表示。这类函数称为分段函数。

分段函数是一类非常有用的函数，对于讨论微积分的一些基本概念很有意义。

4. 隐函数

有些函数，它的因变量与自变量的对应规则是用一个方程 $F(x,y)=0$ 表示的，这类函数称为隐函数。

5. 反函数

设 $y=f(x)$ 是定义在 $D(f)$ 上的一个函数，值域为 $Z(f)$。如果对每一个 $y\in Z(f)$ 有唯一确定的且满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D(f)$ 与之对应，其对应规则记作 f^{-1}。这个定义在 $Z(f)$ 上的函数 $x=$

$f^{-1}(y)$，称为 $y=f(x)$ 的反函数，或称它们互为反函数。在反函数 $x=f^{-1}(y)$ 中，y 为自变量，定义域为 $Z(f)$ 值域为 $D(f)$。反函数亦可记为 $y=f^{-1}(x)$。

函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称。

6. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D(f)$，若函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 $Z(\varphi)$，且 $Z(\varphi)\cap D(f)$ 非空，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为复合函数。x 为自变量，y 为因变量，u 称为中间变量。

7. 初等函数

下列六类函数称为基本初等函数：

(1) 常量：$y=C$ （C 为常数）

(2) 幂函数：$y=x^\alpha$ （α 为任何实数）

(3) 指数函数：$y=a^x$ （$a>0, a\neq 1$）

(4) 对数函数：$y=\log_a x$ （$a>0, a\neq 1$）

(5) 三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\operatorname{tg} x$，$y=\operatorname{ctg} x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$。

(6) 反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\operatorname{arctg} x$，$y=\operatorname{arcctg} x$。

由基本初等函数经过有限次的四则运算和复合所构成的一切函数，统称为初等函数。

二、典型题型与基本方法

1. 确定函数关系的两个要素是定义域和对应规则，只有定义域、对应规则完全相同的两个函数才是同一个函数，否则便是两个不同的函数。

例 1 下列两个变量之间的关系是函数关系的有（　　）。

(A) $y=\ln(-1-x^2)$ (B) $y\geqslant x^2$

(C) $y=\dfrac{1}{1-\sin^2x-\cos^2x}$　　(D) $y=\sqrt{1-x^2}$

解：(D)

因为对任何 x，都有 $-1-x^2<0$，则没有 $y=\ln(-1-x^2)$ 与 x 对应，所以(A)不是函数；对任何 x，都有无穷多个 y 使得 $y\geqslant x^2$，所以(B)也不是函数；对任何 x，都有 $1-\sin^2x-\cos^2x=0$，则没有 $y=\dfrac{1}{1-\sin^2x-\cos^2x}$ 与 x 对应，所以(C)也不是函数；只有当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，存在唯一的 $y=\sqrt{1-x^2}$ 与 x 对应，所以(D)是函数关系。

例 2　下列函数对中表示同一个函数的有(　　)。

(A) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，$g(x)=1$

(B) $f(x)=x+1$，$g(x)=\sqrt{(x+1)^2}$

(C) $f(x)=1+\mathrm{tg}^2x$，$g(x)=\sec^2x$

(D) $f(x)=\sin(\arcsin x)$，$g(x)=x$

解：(C)

因为对于任何 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$（$k$ 为整数），都有 $\sec^2x=1+\mathrm{tg}^2x$，而对于 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$（k 为整数），$\sec^2x$ 和 $1+\mathrm{tg}^2x$ 都没有意义，所以(C)中两个函数表示同一个函数。而(A)中 $f(x)$ 的定义域为 $x\neq 0$，$g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；(B)中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域虽然都是 $(-\infty,+\infty)$，但当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f(x)=x+1$，而 $g(x)=-(x+1)$，即 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的对应规则不同；(D)中 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$，$g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$。所以(A)、(B)、(C)中三对函数都不表示同一个函数。

2. 求函数的定义域时，首先要注意以下三点：(1) 有限个函数经过四则运算后，其定义域是这一有限个函数定义域的交集；(2) 复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域是函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域的子集，且在定义域上的函数值 $u=\varphi(x)$ 都属于 $y=f(u)$ 的定义域；