全国高等农林院校"十一五"规划教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

雷兴刚　伍　勇　主编

中国农业出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

高等数学

雷兴刚　伍　勇　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/雷兴刚，伍勇主编．—北京：中国农业出版社，2007.8

全国高等农林院校“十一五”规划教材

ISBN 978-7-109-11837-9

Ⅰ.高…　Ⅱ.①雷…②伍…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 113005 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）
（邮政编码 100026）
责任编辑　薛　波　王世安

北京通州皇家印刷厂印刷　　新华书店北京发行所发行
2007 年 8 月第 1 版　　2007 年 8 月北京第 1 次印刷

开本：720 mm×960 mm　1/16　　印张：12.25
字数：212 千字
定价：18.00 元

内容简介

本书为高等院校农、林、经管及医学类相关专业本（专）科学生高等数学课程的教材. 也适用于将高等数学课程作为选修课（且学时数较少）的学生. 以本书作为教材，讲授完全部内容，预计需要90 学时，如果课时较少，可根据各校要求对内容酌情取舍.

全书内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理及导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微积分、无穷级数、微分方程等共8章.

编 者 名 单

主　编　雷兴刚　伍　勇

副主编　李任波　王彭德　黄　斌

参　编　刘　雯　杨建红　周绍艳　张　健

审稿人　石　磊　化存才

前言

近几年来，随着高等教育理念的转变，各高校加快了教学改革的步伐，教材建设无疑是教学改革的重要环节之一．伴着高校教学改革的春风，本教材作为全国高等农林院校“十一五”规划教材便孕育而生，它是由云南农业大学、西南林学院及大理学院的数学同仁以多年的教学实践经验，集集体之智慧编写而成．可作为高等院校农、林、经管及医学类相关专业本（专）科学生高等数学课程的教材和参考书．以本书作为教材，讲授完全部内容，预计需要90学时，如果课时较少，可根据各校要求对内容酌情取舍．

本教材更注重培养学生的数学基本能力，演绎内容由浅入深，条理清晰，通俗易懂．另外，本教材配有《高等数学学习指导》及基于校园网的“网络自主学习平台”．《高等数学学习指导》从内容上延伸了教材的深度和广度，同时给出了教材习题的详细参考解答．“网络自主学习平台”集成了多种教学资源，是课堂教学的拓展，为学生提供了全天候的远程自主学习服务，学生可在平台上练习、考试及自主选择更多的学习内容，教师可通过平台监控学生的学习过程，并与学生形成互动．

参加本教材编写工作的有：云南农业大学雷兴刚（第一、二章）、伍勇（第三、四、五章）、杨建红（第一、二章习题）、刘雯（第三、四、五章习题）；西南林学院李任波（第六章）、黄斌（第七章）、张健（第六、七章习题）；大理学院王彭德（第八章）、周绍艳（第八章习题）．全书由雷兴刚统稿．

云南财经大学石磊教授（博士生导师）及云南师范大学化存才教授（硕士生导师）作为主审，仔细审阅了全书稿，并提出了许多宝贵的意见，在此表示衷心的感谢．本书在编写过程中，得到云南农业大学、西

南林学院、大理学院等三校教务处、三校相关学院和中国农业出版社的大力支持，在此一并表示感谢．

由于编者水平有限，书中一定还存在不妥之处，恳请使用本教材的广大师生批评指正，以便再版时改正．

编 者

2007 年 5 月

目录

第一章　函数与极限

众所周知，数学是研究现实世界的空间形式、数量关系以及它们逻辑可能的学科．微积分学作为数学领域的重要分支学科产生于 17 世纪，是由牛顿（I. Newton，英国数学家，1643—1727）和莱布尼茨（G. W. Leibniz，德国数学家，1646—1716）共同创立．它所解决的实际问题从数学的角度归纳起来有如下两类：

1. 如何求物体运动的瞬时速度、函数曲线的切线及函数的最大值、最小值等问题．

2. 如何计算曲线所围成图形的面积、曲线的长度及曲面所围成物体的体积等问题．

微分、积分以及微分与积分的关系是微积分的重要内容，函数是它的研究对象，极限思想和方法是微积分学坚实的基石．本章是在初等数学的基础上，讨论函数、函数极限及函数连续性等基本概念．

第一节　函　　数

一、函数概念

函数定义

定义 1　**设有两个变量 x 和 y，D 是一个非空的实数集，如果在 D 内所取的每一个值 x，按照某一种确定的对应法则，都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为：**

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

其中 x 叫做自变量，y 叫做因变量，D 叫做该函数的定义域；设 $x_0\in D$，称 $y_0=f(x_0)$ 为 x_0 的函数值，所有函数值所成集合叫做该函数的值域，一般用 W 表示，即，$W=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}$.

在函数定义中有两个要素，即定义域和对应规律．若两函数的定义域与对应规律相同则称两函数相等．表示函数通常用表格、图像及解析式三种方法，在微积分学中一般是用解析式表示函数，这时约定使解析式有意义的 x 取值集合作为函数的定义域．

例 1　函数：

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

的定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$，值域为 $W=[0, +\infty)$，函数图形如图 1-1.

例 2 函数：

$$y=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

的定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$，值域为 $W=\{-1, 0, 1\}$，函数图形如图 1-2.

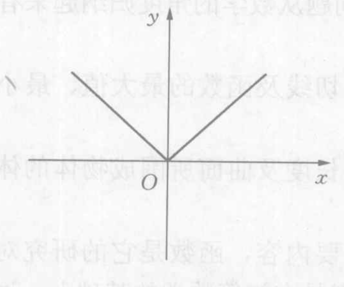


图 1-1

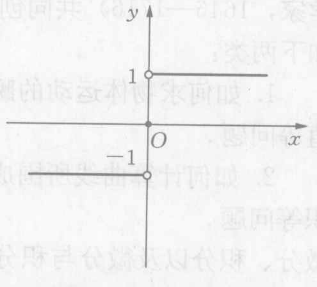


图 1-2

例 1 和例 2 有一个共同点：自变量在不同范围变化时函数依照对应法则用不同的解析表达式与之对应．这种根据自变量的不同取值范围，用不同的数学解析式表示的函数称为**分段函数**.

例 3 x 为任一实数，y 表示不超过 x 的最大整数，用记号 $y=[x]$表示，例如，$[-3.5]=-4$，$[-2.9]=-3$，$[0]=0$，$[\pi]=3$，$[2.5]=2$，$[5]=5$ 等等．函数 $y=[x]$称为**取整函数**.

二、函数的四种特性

1. 函数的奇偶性

定义 2 **设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，且对任意 $x\in D$，必有 $-x\in D$，若对任意 $x\in D$，恒有**

$$f(-x)=f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 为偶函数；若恒有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

如函数 $y=\cos x$，$y=\dfrac{1}{2}x^2$ 都是偶函数，函数 $y=\sin x$，$y=x^3$ 都是奇函数，凡不满足定义 2 的函数叫做非奇非偶函数.

如函数 $y=\ln x$，$y=\sin x+\cos x$，$y=e^x$ 等是非奇非偶函数．

2. 函数的单调性

定义 3　设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，对于 X 内任意两点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，若恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 X 上单调增加；若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 X 上单调减少．

如函数 $y=\arcsin x$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上单调增加，函数 $y=\arccos x$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上单调减少．

例 4　证明：(1) 函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调减少．

(2) 函数 $f(x)=2x+\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加．

证明：(1) 任取 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，因为，$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{x_2-x_1}{x_1x_2}$，又，$x_2-x_1>0$，$x_1x_2>0$，所以，$f(x_1)>f(x_2)$，即函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调减少．

(2) 任取 x_1，$x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，因为，

$$f(x_1)-f(x_2)=2(x_1-x_2)+2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2},$$

又，$\left|\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}\right|\leqslant 1$，$\left|\sin\dfrac{x_1-x_2}{2}\right|<\left|\dfrac{x_1-x_2}{2}\right|$，所以，$\left|2\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}\sin\dfrac{x_1-x_2}{2}\right|<|x_1-x_2|$，即，$f(x_1)<f(x_2)$．因此，函数 $f(x)=2x+\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加．

3. 函数的周期性

定义 4　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在常数 $l\neq 0$，使得对任意 $x\in D$，有 $(x+l)\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，l 为函数的周期．

从定义易知，若 l 是函数 $f(x)$ 的周期，则 nl 也是函数 $f(x)$ 的周期（其中 n 为非零的整数）．通常所说的周期是指函数的最小正周期，如 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数．

例 5　考察函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 的周期性．

解　由周期函数的定义，若 l 为 $f(x)$ 的周期，则 $f(x+l)-f(x)=0$，即，$f(x+l)-f(x)=\sin\dfrac{1}{x+l}-\sin\dfrac{1}{x}=-2\sin\dfrac{l}{2x(x+l)}\cos\dfrac{2x+l}{2x(x+l)}=0$，而从 $\sin\dfrac{l}{2x(x+l)}=0$ 或 $\cos\dfrac{2x+l}{2x(x+l)}=0$ 解出的 l 均与 x 有关，所以，函数

$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$不是周期函数．

4. 函数的有界性

定义 5　设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，如果存在常数 M，对任意 $x\in X$ 有 $f(x)\leqslant M$(或 $f(x)\geqslant M$)，则称 $f(x)$ 在数集 X 上有上界（或有下界）．如果 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界，则称 $f(x)$ 在 X 上有界，否则称为无界．

显然，函数 $f(x)$ 在 X 上有界等价于存在常数 $M>0$，对任意 $x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$. 如，函数 $y=\sin x$ 在（$-\infty$，$+\infty$）内有界，函数 $y=x^2$ 在（$-\infty$，$+\infty$）内有下界而无上界，函数 $y=\ln x$ 在（0，$+\infty$）内无界．

三、反函数与复合函数

1. 反函数

定义 6　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W，如果对于 W 中的每一个值 y，在 D 中都有唯一的值 x 与之对应（对应规律仍是 $y=f(x)$)，则得到一个以 y 为自变量，以 x 为因变量的新函数，称为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$.

从反函数的定义中可看出，若 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数，则

$$f^{-1}(f(x))=x,\ x\in D;\ f(f^{-1}(y))=y,\ y\in W,$$

习惯上，我们总是用字母 x 表示自变量，用字母 y 表示因变量（函数），因此，一般将反函数 $x=f^{-1}(y)$ 表示为 $y=f^{-1}(x)$.

可以证明，函数 $y=f(x)$ 及其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称，单调函数存在反函数，且反函数仍为单调函数．

2. 复合函数

简单函数的四则运算可得到一个复杂的函数，然而大量的复杂函数是由复合的方法所构成．

定义 7　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 X，值域为 $W=\{u\mid u=\varphi(x),\ x\in X\}$，且 $D\cap W\neq\phi$，则称函数 $y=f(\varphi(x))$ 为 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$ 所构成的复合函数，u 称为中间变量．

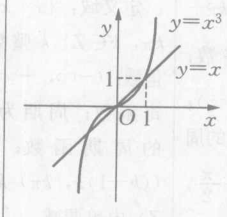
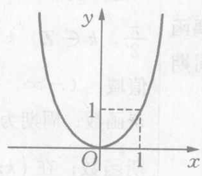
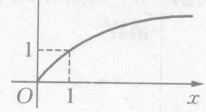
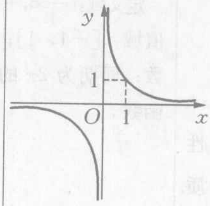
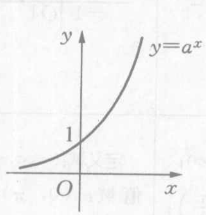
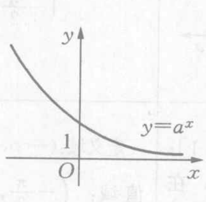
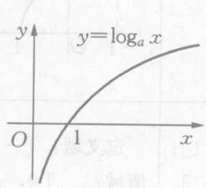
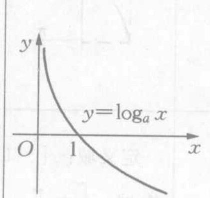
如函数 $y=\sin^2 x$ 可视为 $y=u^2$ 与 $u=\sin x$ 复合而成；函数 $y=\ln u$ 及 $u=-x^2$ 就不能构成一个复合函数，因为函数 $u=-x^2$ 的值域与函数 $y=\ln u$ 的定义域的交集是空集.

四、初等函数

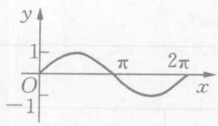
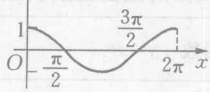
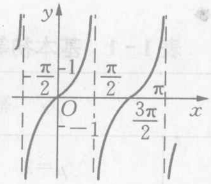
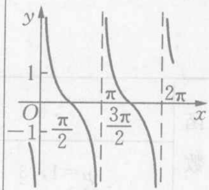
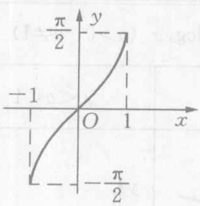
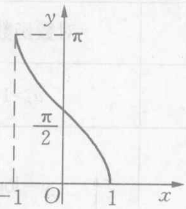
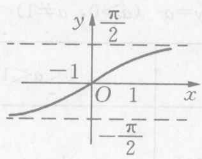
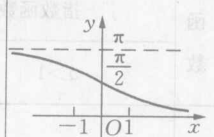
在中学数学中我们曾学过常数函数，幂函数，指数函数，对数函数，三角

函数及反三角函数，这六类函数是常用的基础函数，将它们统称为**基本初等函数**．为便于复习和应用，将它们的主要性质及图形列表如下（表 1－1）．由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合运算而得到的函数称为初等函数.

表 1－1　基本初等函数的主要性质及图形

函数	幂函数　$y=x^{\mu}$			
	$\mu=1,\ 3$	$\mu=2$	$\mu=\frac{1}{2}$	$\mu=-1$
图像				
性质	定义域：$(-\infty,+\infty)$；值域：$(-\infty,+\infty)$；奇函数；在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增.	定义域：$(-\infty,+\infty)$；值域：$[0,+\infty)$；偶函数；在 $[0,+\infty)$ 内单调增；在 $(-\infty,0]$ 内单调减.	定义域：$[0,+\infty)$；值域：$[0,+\infty)$；非奇非偶；在 $[0,+\infty)$ 上单调增.	定义域、值域均是：$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；奇函数；单调减．在 $(-\infty,0)$ 或 $(0,+\infty)$ 内单调减.
函数	指数函数 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$		对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$	
	$a>1$	$0<a<1$	$a>1$	$0<a<1$
图像				
性质	定义域：$(-\infty,+\infty)$；值域：$(0,+\infty)$；在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增.	定义域：$(-\infty,+\infty)$；值域：$(0,+\infty)$；在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调减.	定义域：$(0,+\infty)$；值域：$(-\infty,+\infty)$；在 $(0,+\infty)$ 内单调增.	定义域：$(0,+\infty)$；值域：$(-\infty,+\infty)$；在 $(0,+\infty)$ 内单调减.

（续）

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$	$y=\cot x$
图像				
性质	定义域：$(-\infty,+\infty)$；值域：$[-1,1]$；奇函数；周期为 2π 的周期函数．	定义域：$(-\infty,+\infty)$；值域：$[-1,1]$；偶函数；周期为 2π 的周期函数．	定义域：$\{x \mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in \mathbf{Z}\}$ k 整数；值域：$(-\infty,+\infty)$；奇函数；周期为 π 的周期函数；在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$，$k\in \mathbf{Z}$ 内单调增．	定义域：$\{x \mid x\neq k\pi,\ k\in \mathbf{Z}\}$ k 整数；值域：$(-\infty,+\infty)$；奇函数；周期为 π 的周期函数；在 $((k-1)\pi,\ k\pi)$ $k\in \mathbf{Z}$）内单调减．
函数	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\arctan x$	$y=\operatorname{arccot} x$
图像				
性质	定义域：$[-1,1]$；值域：$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$；在 $[-1,1]$ 上单调增；$\arcsin(-x)=-\arcsin x$	定义域：$[-1,1]$；值域：$[0,\pi]$；在 $[-1,1]$ 上单调减；$\arccos(-x)=\pi-\arcsin x$	定义域：$(-\infty,+\infty)$；值域：$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$；在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调减；$\arctan(-x)=-\arctan x$	定义域：$(-\infty,+\infty)$；值域：$(0,\pi)$；在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调减；$\operatorname{arccot}(-x)=\pi-\operatorname{arccot} x$