研究生数学

Graduate Mathematics
Course Material

2 应用偏微分方程讲义

■ 姜礼尚 孔德兴 陈志浩 编著

5

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

研究生数学
Graduate Mathematics
Course Material

2 应用偏微分方程讲义

■ 姜礼尚 孔德兴 陈志浩 编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

为了帮助应用数学, 计算数学, 运筹控制等专业的教师、研究生和高年级大学生以及其他非数学专业的教学与研究人员和他们的研究生熟练地运用偏微分方程方法去解决科学技术和实际问题, 本书把注意力集中在把一些常用方法 (Green 函数法、分离变量法、变分方法、特征线法以及量纲分析方法等) 讲得尽可能透彻一些, 把一些常见的物理和力学模型 (非线性波、流体、气体和固体的运动模型等) 推导得尽可能简明一些, 把一些近代数学概念 (Hilbert空间, Sobolev 空间, 广义函数, 间断解等) 阐述得尽可能浅近一些. 要求读者只要具有数学分析, 线性代数, 常微分方程和初等数学物理方程等基础知识, 就可顺利阅读此书, 并有所裨益.

本书可以作为上述各数学专业和相关的物理、力学专业的研究生教学用书, 以及大学数学物理方程课程的教学参考书. 并希望能成为在实际工作中使用偏微分方程方法的学者和专家的参考书.

图书在版编目 (CIP) 数据

应用偏微分方程讲义 / 姜礼尚, 孔德兴, 陈志浩编著.
北京: 高等教育出版社, 2008.1
ISBN 978-7-04-022174-9

I. 应... II. ①姜...②孔...③陈... III. 偏微分方程-高等学校-教材 IV. 0175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 179439 号

策划编辑 赵天夫 **责任编辑** 赵天夫
封面设计 王凌波 **责任印制** 宋克学

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京大容彩色印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2008 年 1 月第 1 版
印　　张	18.25	**印　　次**	2008 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	350 000	**定　　价**	33.00 元

物 料 号　22174-00

序　言

偏微分方程已成为研究自然科学、工程技术以及经济管理等领域的各种实际课题的重要工具. 为了帮助应用数学、计算数学、运筹与控制等专业的教师、研究生和高年级大学生以及应用部门的教学与研究人员和他们的研究生更熟练地掌握偏微分方程模型和方法, 去解决实际问题, 长期以来, 我们有一个愿望: 要编著一本比大学数学物理方程教材更深入一些, 在应用方面表现得更突出一些, 能融入一些近代数学的概念, 但表现得更平易近人, 能为更广大专业人士所接受的应用偏微分方程教材. 力求做到理论联系实际, 严密性与直观性相统一, 科学性与可读性相统一. 这应该是编写本书的动力和宗旨.

为了做到上述的设想, 我们在本书把注意力集中在把一些常用方法 (Green 函数方法, 分离变量法, 变分方法, 特征线方法以及量纲分析方法等) 讲得尽可能透彻些, 把一些常见的物理与力学模型 (非线性波, 流体、气体和固体的运动模型等) 推导得尽可能完整些, 此外把一些相关的近代数学概念 (Hilbert 空间, Sobolev 空间, 广义函数以及间断解等) 讲得尽可能简明些, 把本书的起点尽可能放低一点, 对所涉及的近代数学和力学知识尽可能做到自封. 只要读者具有数学分析、线性代数、常微分方程和初等数学物理方程课程等基础知识, 就可以顺利阅读此书.

我们希望本书能成为一本适用于应用数学、计算数学、运筹与控制等专业研究生的教学用书, 同样能成为一本大学数学物理方程课程的教学参考书. 当然我们亦希望本书能对在实际工作中使用偏微分方程方法的学者和专家有所帮助, 成为他们工作中的参考书.

本书部分内容曾在部分工科院校组织的数学物理方程研讨班上讲授过，深得大家欢迎，后经研讨班组委会推动，在高等教育出版社的支持下，于 1997 年出版《偏微分方程选讲》，本书就是在该书基础上经进一步修订改写而成的. 本书第 1~3 和 6 章是由姜礼尚负责编写的，其中第 1~3 章是与陈志浩合作完成的. 第 4，5 和 7 章是由孔德兴负责编写的. 本书的出版得到高等教育出版社赵天夫先生的支持和帮助，在此表示感谢. 感谢黄守军博士以负责的态度和娴熟的技巧打印了部分书稿.

限于作者的水平，书中不妥之处在所难免，恳请专家及读者惠予指正.

姜礼尚

2007 年 10 月于同济大学

目 录

序 言

第一章 Green 函数 1

§1. 一维问题 1

1.1 问题的提出 1

1.2 Green 函数的特性和物理意义 2

1.3 广义函数与 δ 函数 4

1.4 共轭微分算子和广义解 12

1.5 Green 函数的定义与 Green 公式 13

§2. 位势方程 15

2.1 共轭微分算子和广义解 15

2.2 Green 函数的定义和物理意义 16

2.3 Green 公式 17

2.4 Green 函数的结构与基本解 18

2.5 第二边值问题的 Green 函数 20

§3. Green 函数的求法 21

3.1 镜像法 21

3.2 共形变换法 29

§4. 热传导方程 32

4.1 热传导方程初值问题的基本解 32

4.2 热传导方程混合问题的 Green 函数 35

4.3 Green 公式与混合问题的解 36

4.4 Green 函数的求法 38

第二章 变分方法 43

§1. Hilbert 空间与 Sobolev 空间 43

1.1 内积空间 43

1.2 Hilbert 空间 47

1.3 正交分解与投影定理 48

1.4 有界线性泛函与 Riesz 表示定理 51

1.5 Sobolev 空间 54

§2. 变分原理 61

2.1 膜平衡问题 61

2.2 Dirichlet 原理与广义解 63

2.3 其他边值问题的变分原理 65

2.4 Lax-Milgram 定理 69

2.5 广义解的可微性 74

§3. 变分问题的几种近似解法 75

3.1 Ritz 方法 75

3.2 Galerkin 方法 77

3.3 有限元方法 80

§4. 发展方程的变分方法 87

4.1 弱形式 87

4.2 半离散化方法 88

4.3 Fourier 方法 90

4.4 有限元解 (Galerkin 解) 的误差估计 93

4.5 全离散化方法 95

4.6 稳定性分析 96

第三章 分离变量法 98

§1. 方法概述 98

§2. Sturm-Liouville 问题 100

2.1 Sturm-Liouville 边值问题 100

2.2 Sturm-Liouville 问题的几个重要性质 101

2.3 Sturm-Liouville 问题的变分形式 104

2.4 基本定理 119

§3. Sturm-Liouville 问题的推广 120

3.1 多维 Sturm-Liouville 问题 120

3.2 算子方程的特征值问题 122

3.3 奇异 Sturm-Liouville 问题 124

§4. 应用实例 125

第四章 特征线方法 135

§1. 概述 135
§2. 单个方程 136
§3. 双曲型方程组 141
§4. 初边值问题 144

第五章 非线性波 149

§1. 拟线性双曲守恒律方程组 149
1.1 基本概念与定义 149
1.2 例子 152
1.3 特征线方法及局部经典解 159
§2. 间断解 163
2.1 解的定义 163
2.2 Rankine-Hugoniot 条件 164
2.3 熵条件 164
2.4 Riemann 问题 167
§3. 非线性波 (经典解情形) 168
3.1 整体经典解 168
3.2 导数的突变和破裂时间 169
3.3 疏散波与压缩波 173
3.4 应用实例 —— 追赶问题 174
§4. 非线性波 (间断解情形) 179
4.1 单个守恒律 179
4.2 激波的形成与传播 181
4.3 Riemann 问题 185

第六章 连续介质力学的数学模型 190

§1. 预备知识 190
§2. 应变矩阵 192
§3. 应力矩阵 198
§4. 守恒律 201
4.1 质量守恒律 202
4.2 动量守恒律 202
4.3 能量守恒律 203

§5. 相容性定律和数学模型 (流体情形) 205
5.1 不可压理想流体运动方程组 205
5.2 不可压粘性流体运动方程组 206
5.3 渗流问题 211
5.4 热传导问题 214
5.5 相变 217
§6. 相容性定律和数学模型 (固体情形) 219
6.1 弹性体的平衡与振动 219
6.2 平面应力和平面应变问题 223
6.3 板的弯曲问题 225
§7. 相似解 (量纲分析) 230

第七章 气体动力学方程组 236
§1. 气体动力学方程组 236
1.1 基本物理概念 236
1.2 基本物理规律 239
1.3 基本方程 240
§2. 特殊流动的方程组 243
2.1 一维流动 243
2.2 柱对称流 246
2.3 球对称流 246
2.4 守恒律的统一形式 247
§3. 接触间断与激波 248
3.1 预备知识 248
3.2 Rankine-Hugoniot 条件 249
3.3 基本波 I: 接触间断 251
3.4 基本波 II: 激波 252
§4. Riemann 问题 258
4.1 Riemann 问题的自模解 259
4.2 激波曲线及中心疏散波曲线 265
4.3 Riemann 问题 271

名词索引 277

第一章　Green 函数

Green 函数在求解常微分方程边值问题和偏微分方程边值问题以及初边值问题中有着特殊重要的地位. Green 函数法的优越性在于把具有任意非齐次项和任意边值的定解问题归结为求解一个特定的边值问题, 它仅依赖于微分算子、边界条件的形式和区域的形状. 一旦求得了相应的 Green 函数, 就可以通过叠加原理给出原定解问题的解.

在本章中, 我们就一维问题和多维问题分别给出 Green 函数的定义和物理意义, 并介绍几种求 Green 函数的方法.

§1. 一维问题

1.1 问题的提出

我们先考虑简单的物理模型: 设有一根拉紧的均匀且柔软的轻弦, 长度 $l = 1$, 两端固定, 在垂直外力作用下当弦达到平衡时, 讨论弦的形状.

如图 1.1 建立坐标系, 把不受外力作用时弦的平衡位置取为 Ox 轴, 并以 $f(x)$, $y(x)$ 分别表示弦上横坐标为 x 的点处所受的外力密度 (单位: N/m) 和位移 (单位: m). 由于此时惯性力为零, 在微小位移的情况下, 弦的平衡方程为

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[T(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] = f(x),$$

其中 $T(x)$ 为弦上横坐标为 x 的点所受张力的大小, 为讨论简单起见, 不妨设 $T(x) = 1$. 于是问题简化为求解常微分方程边值问题

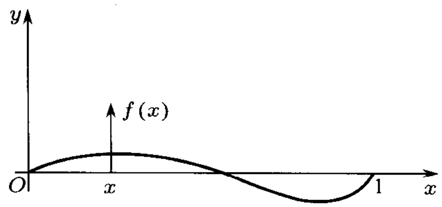

图 1.1

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = f(x) \quad (0 < x < 1), & (1.1) \\ y(0) = y(1) = 0. & (1.2) \end{cases}$$

它的解可表示为

$$y(x) = x\int_0^1 \mathrm{d}\xi \int_0^{\xi} f(s)\mathrm{d}s - \int_0^x \mathrm{d}\xi \int_0^{\xi} f(s)\mathrm{d}s. \tag{1.3}$$

为使此解具有较对称的形式, 通过交换积分次序, 得

$$y(x) = \int_0^x s(1-x)f(s)\mathrm{d}s + \int_x^1 x(1-s)f(s)\mathrm{d}s.$$

定义函数

$$G(x,s) = \begin{cases} s(1-x), & 0 \leqslant s < x; \\ x(1-s), & x < s \leqslant 1. \end{cases} \tag{1.4}$$

则有

$$y(x) = \int_0^1 G(x,s)f(s)\mathrm{d}s, \tag{1.5}$$

其中核函数 $G(x,s)$ 只依赖于微分算子 $L = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$、边界条件 (1.2) 和区间长度 $[0,1]$, 而与方程 (1.1) 右端的非齐次项 $f(x)$ 无关. 我们把 (1.4) 式定义的 $G(x,s)$ 称为 Green 函数. 我们将证明它是某一个特定边值问题的解. 因此, 所谓 Green 函数法, 就是通过把任意的非齐次项 $f(x)$ 的常微分方程边值问题 (1.1), (1.2), 归结为一个特殊边值问题的求解, 即只要求出了 Green 函数 (1.4), 就可以利用叠加原理给出解的一般表达式 (1.5).

1.2 Green 函数的特性和物理意义

为了给 Green 函数下一个确切的定义, 我们先就边值问题 (1.1), (1.2) 的 Green 函数 (1.4) 的特性及物理意义作一些探讨.

设 $x_0 \in (0,1)$ 是一固定点, 则由 (1.4) 式定义的 Green 函数 $G(x_0,x)$ 具有下述性质:

1° $G(x_0,0)=G(x_0,1)=0$, 即当 $0<x_0<1$ 时 $G(x_0,x)$ 满足齐次边界条件 (1.2);

2° $-\dfrac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}x^2}=0 \quad (x\neq x_0)$, 即当 $x\neq x_0$ 时 $G(x_0,x)$ 是相应于 (1.1) 的齐次方程的解;

3° $G(x_0,x_0-0)=G(x_0,x_0+0)$, 即当 $0<x_0<1$ 时 $G(x_0,x)$ 在 $x=x_0$ 处连续;

4° $[-G'_x(x_0,x_0+0)]-[-G'_x(x_0,x_0-0)]=1$, 即当 $0<x_0<1$ 时 $G(x_0,x)$ 对 x 的一阶导数在点 $x=x_0$ 处有跳跃, 间断量是 1;

5° $G(x_0,x)=G(x,x_0)$, 即 Green 函数关于自变量 x 及参变量 x_0 具有对称性.

为了说明具有上述特性的 Green 函数的物理意义, 我们考察长度为 1, 两端固定的弦, 在 $x=x_0$ 处受垂直的单位集中力作用下处于平衡状态时弦的形状 $y(x)$. 如图 1.2 所示, 弦在 $x=x_0$ 处受到三个力的作用. 张力 $\boldsymbol{T}_-$ 在 y 轴的投影为

$$-T\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-T\sin\alpha\approx -T\tan\alpha=-T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x_0-0},$$

其中 $T=|\boldsymbol{T}|$ 为张力 $\boldsymbol{T}$ 的大小. 同样地, 张力 $\boldsymbol{T}_+$ 在 y 轴的投影为

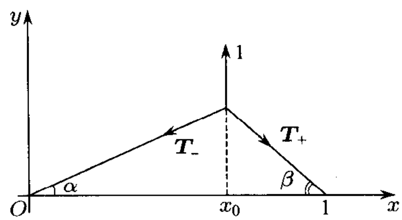

图 1.2

$$-T\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=-T\sin\beta\approx -T\tan\beta=T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x_0+0}.$$

当三个力处于平衡时, 有关系式

$$T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x_0+0}+\left(-T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x_0-0}+1=0.$$

故在集中力作用下, 弦的平衡问题归结为位移 $y(x)$ 应适合下述定解问题:

$$\begin{cases}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(T\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=0 \quad (x\neq x_0), & (1.6)\\ y(0)=y(1)=0, & (1.7)\\ y(x_0-0)=y(x_0+0), & (1.8)\\ \left(-T\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x_0+0}-\left(-T\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x_0-0}=1. & (1.9)\end{cases}$$

比较 $y(x)$ 与 $G(x_0,x)$, 可见 Green 函数 $G(x_0,x)$ 的物理意义是: 长度为 1, 两端固定的弦, 在点 $x=x_0$ 处由于受单位集中力的作用在点 x 处所产生的位移 (其中张力 $T=1$). 那么, 对于连续分布的外力密度 $f(s)$, 可把弦分成若干小段, 在每一小段 $[s_i,s_i+\Delta s]$ 上作用的外力近似为 $f(s_i)\Delta s$, 这里假设了它作为一集中力作用在 $s=s_i$ 点处. 于是, 在点 x 处所产生的位移近似为 $G(x,s_i)f(s_i)\Delta s$. 因为问题是线性的, 根据叠加原理, 由于外力密度 $f(s)$ 分布在整个区间 $[0,1]$ 上, 它所产生的位移应为 $\sum\limits_i G(x,s_i)f(s_i)\Delta s$. 令 $\Delta s\to 0$, 即得

$$y(x)=\int_0^1 G(x,s)f(s)\mathrm{d}s,$$

此即 (1.5) 式.

1.3 广义函数与 δ 函数

为了能给 Green 函数下一个确切的定义, 我们先引进广义函数与 δ 函数的概念.

一、集中力的密度的描述

如何确切地来描述集中力的力密度是我们首先要解决的问题. 为简单起见, 假定在包含原点的区间 (a,b) 上, 在原点 $x=0$ 处受到一个单位集中力的作用. 实际上, 集中量的分布可以通过一个极限过程来理解. 我们可以认为在原点的小领域 $|x|\leqslant\varepsilon$ 上均匀地作用着一个分布力, 力的密度为 $f_\varepsilon(x)$. 取

$$f_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}, & |x|\leqslant\varepsilon;\\ 0, & |x|>\varepsilon,\ \text{且}\ x\in[a,b],\end{cases}\tag{1.10}$$

如图 1.3 所示. 这样, 区间 $[-\varepsilon,\varepsilon]$ 所受的力为

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\varepsilon(x)\mathrm{d}x=1.$$

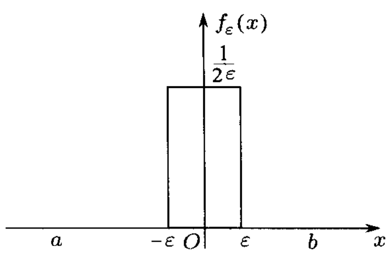

图 1.3

令 $\varepsilon \to 0$, 从形式上得到 $f_\varepsilon(x) \to f(x)$. 其中

$$f(x) = \begin{cases} \infty, \, x = 0; \\ 0, \quad x \in [a, b], \text{ 但 } x \neq 0. \end{cases}$$

且

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b f_\varepsilon(x) \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} \mathrm{d}x = 1.$$

但是, 以这种极限形式得到的 $f(x)$ 作为描述单位集中力的力密度 "函数", 与经典的数学分析中函数概念已是不相同的了. 简单地认为 $f(x)$ 是一个几乎处处等于零的函数是不正确的, 因为按通常的积分意义应有 $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = 0$. 但是从物理直观上来说, 这个积分值又显然应该等于整个区间 $[a, b]$ 上所受的力, 其大小为 1. 由此可见, 当 $\varepsilon \to 0$ 时, $f_\varepsilon(x)$ 的极限函数已不能是经典意义下的极限. 为此, 我们需要扩充极限的概念和函数的概念.

二、广义函数

为了把通常的函数概念扩充到广义函数, 并理解和掌握广义函数的严格数学理论, 必须具备一定的泛函分析知识基础, 这越出了本课程的讨论范围. 为了使以下的叙述更加直观和初等, 我们准备仿照从有理数扩充到实数的步骤, 通过引进弱收敛的概念把连续函数扩充到广义函数. 限于篇幅, 我们这里的叙述不可能非常严格.

定义 1 若 $\{u_n(x)\}$ 是给定在 (a, b) 上 $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ 的可积函数序列, 如果对**任意**函数 $\varphi(x) \in C_0^\infty(a, b)$, 极限

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b u_n(x) \varphi(x) \mathrm{d}x$$

存在, 则称 $\{u_n(x)\}$ 为弱收敛意义下的基本列. 这里

$$C_0^\infty(a, b) = \{\varphi(x) | \varphi \in C^\infty(a, b), \text{ 且在 } a, b \text{ 附近 } \varphi \equiv 0\}.$$

有时也把 $C_0^\infty(a, b)$ 记成 $\mathscr{D}(a, b)$, 称为试探函数 (test function) 类.

当 a, b 分别为 $-\infty$ 和 $+\infty$ 时,

$$C_0^\infty(-\infty, +\infty) = \{\varphi(x) | \varphi \in C^\infty(-\infty, +\infty), \text{ 且 } \operatorname{supp} \varphi \text{ 有界}\},$$

其中 $\operatorname{supp} \varphi$ 称为函数 $\varphi(x)$ 的支集, 它是使 $\varphi(x) \neq 0$ 的点集的闭包.

例 若 $u_n(x) \in C[a, b]$, 且 $\{u_n(x)\}$ 是在 $[a, b]$ 上一致收敛意义下的基本列, 则它也必是弱收敛意义下的基本列, 且存在 $u(x) \in C[a, b]$, 使得

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b u_n(x) \varphi(x) \mathrm{d}x = \int_a^b u(x) \varphi(x) \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi(x) \in C_0^\infty(a, b).$$

这说明弱收敛是一致收敛概念的推广，而且在一致收敛意义下，其极限值仍然表成一个积分形式. □

定义 2　若函数列 $\{u_n(x)\},\{v_n(x)\}$ 都是弱收敛意义下的基本列，且对于任意 $\varphi(x)\in C_0^\infty(a,b)$ 都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b v_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

则称 $\{u_n(x)\},\{v_n(x)\}$ 两个基本列等价.

按此等价关系我们可以把基本列划分为等价类. 等价的基本列都有同一极限值，不妨把它记作 $U(\varphi)$，即是一个只与 $\varphi(x)$ 有关的常数. 也就是说，这个极限值事实上是定义了一个由 $C_0^\infty(a,b)\to\mathbb{R}$ (实数) 的映射，通常把这称之为*泛函*. 也可把 $U(\varphi)$ 记作 $\langle u,\varphi\rangle$，这里 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示一种对偶关系. 根据前面所述，对于一致收敛的基本列 $\{u_n(x)\}$，这个对偶关系可以用积分 $\displaystyle\int_a^b u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ 来表示. 所以我们在形式上亦有

$$\langle u,\varphi\rangle \xlongequal{\text{记作}} \int_a^b u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

这里的积分纯粹是一种记号，只是作为对偶关系来理解.

正像将有理数扩充为实数一样，我们把凡是弱收敛的基本列 $\{u_n(x)\}$ 都赋予一个极限元，记为 $u(x)$，并记

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\langle u,\varphi\rangle\overset{\mathrm{d}}{=}\int_a^b u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

我们称这样的极限元为*广义函数*.

综合以上讨论，现在我们可对广义函数定义如下:

定义 3　若在区间 (a,b) 上 $(-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty)$ 的可积函数列 $\{u_n(x)\}$，对任意函数 $\varphi(x)\in C_0^\infty(a,b)$，极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

存在，则极限值定义了一个泛函 $u:C_0^\infty(a,b)\to\mathbb{R}$，把它记作

$$\langle u,\varphi\rangle\quad\text{或}\quad\int_a^b u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\langle u,\varphi\rangle\overset{\mathrm{d}}{=}\int_a^b u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,\tag{1.11}$$

并称 $u(x)$ 是函数列 $\{u_n(x)\}$ 的弱极限元素, 记作

$$w-\lim_{n\to\infty} u_n(x)=u(x) \tag{1.12}$$

或

$$u_n(x)\rightharpoonup u(x)\quad (n\to\infty). \tag{1.13}$$

这样定义的 "函数" (即泛函) $u(x)$ 称为广义函数.

请注意: 我们把泛函 u 写成 $u(x)$, 这纯粹是一种记号, 它绝不能理解为 u 是 x 的函数! 作为泛函 u, 谈它在某一点 $x=x_0$ 的值 $u(x_0)$ 是没有意义的, 它的值是通过与试探函数类 $C_0^\infty(a,b)$ 中函数的 "作用" 才得到显示.

例 所有的可积函数 $u(x)$ 都是广义函数. □

事实上, 我们只需取 $\{u_n(x)\}$ 就是 $\{u(x)\}$ 本身, 则可积函数 $u(x)$ 就符合广义函数的定义. 亦即广义函数包含了所有的可积函数. 但在下面我们又可看到上述广义函数的定义又确实是扩充了可积函数以外的新的函数.

注 定义 3 中的函数列也可以是 $\{u_\varepsilon(x)\}$, 并取 $\varepsilon\to 0$ 时的极限. 即 (1.11) 式也可换成

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b u_\varepsilon(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\langle u,\varphi\rangle,\quad \forall\varphi(x)\in C_0^\infty(a,b). \tag{1.14}$$

三、δ 函数的定义

定义 4 若在区间 (a,b) 上 $(-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty)$ 的可积函数列 $\{f_\varepsilon(x)\}$, 对任意函数 $\varphi(x)\in C_0^\infty(a,b)$, 极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b f_\varepsilon(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

存在, 且极限值等于 $\varphi(0)$, 即

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b f_\varepsilon(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(0),\quad \forall\varphi(x)\in C_0^\infty(a,b), \tag{1.15}$$

则把函数列 $\{f_\varepsilon(x)\}$ 当 $\varepsilon\to 0$ 时确定的弱极限元记作 $\delta(x)$, 称为 Dirac δ 函数, 简称 δ 函数.

由上述定义可知, δ 函数是一个特殊的广义函数. 根据定义 3 中式 (1.11) 的记法, δ 函数也可表示成

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b f_\varepsilon(x)\varphi(x)\mathrm{d}x&=\langle\delta(x),\varphi(x)\rangle\\&=\int_a^b\delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(0),\quad \forall\varphi\in C_0^\infty(a,b),\end{aligned} \tag{1.16}$$

这里等式右端的积分式也纯粹是一个形式上的数学符号, 与通常的积分含义是有区别的.

现在我们回到对集中力的力密度的描述. 对于由式 (1.10) 确定的函数列 $\{f_\varepsilon(x)\}$, 对于任意函数 $\varphi(x) \in C_0^\infty(a,b)$ 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b f_\varepsilon(x)\varphi(x)\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{1}{2\varepsilon}\varphi(x)\mathrm{d}x\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\varphi(\theta\varepsilon)\cdot 2\varepsilon \quad (-1<\theta<1)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(\theta\varepsilon)\\ &= \varphi(0).\end{aligned}$$

由此可见, 式 (1.10) 表示的函数列所确定的弱极限元正是 δ 函数. 即

$$f_\varepsilon(x) \rightharpoonup \delta(x) \quad (\varepsilon\to 0).$$

所以, 我们可以用广义函数 $\delta(x)$ 来描述一个集中量的密度分布. 而 $\delta(x)$ 已不是通常意义下的可积函数.

事实上, 按定义 3 定义的广义函数, 我们以前在解数学物理方程定解问题时已经遇到过, 不过当时未曾定义广义函数而已. 例如, 我们都知道无限长细杆热传导方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty<x<+\infty, t>0), & (1.17)\\ u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (-\infty<x<+\infty) & (1.18)\end{cases}$$

的解可用 Poisson 公式表示为

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{1.19}$$

其中核函数

$$K(x,t;\xi,0) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}. \tag{1.20}$$

容易验证函数 $K(x,t;\xi,0)$ 具有如下性质

$$\lim_{t\to 0}K(x,t;\xi,0) = \begin{cases}\infty, & \text{当 } x=\xi;\\ 0, & \text{当 } x\neq\xi.\end{cases} \tag{1.21}$$

且若 $\varphi(x) \in C_0^\infty(-\infty,\infty)$, 则有

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} K(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = \varphi(x). \tag{1.22}$$