根据教育部最新考试大纲 编写
全国成人高考大纲修订组 审定

2006年最新版

专升本入学考试专用教材

高等数学（一）

全国成人高考命题小组成员 编写

南开大学出版社

高校学生司推荐

全国各类成人高等学校招生复习考试辅导教材

专科起点升本科

高等数学(一)

李仲来 主编

南开大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(一)/李仲来主编. 一天津:南开大学出版社,
2001.11
全国各类成人高校招生专升本教材
ISBN7-310-01663-7

Ⅰ.高... Ⅱ.李... Ⅲ.高等数学一成人教育:高等教育一教材
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 071034 号

策划编辑 邱 天　　责任编辑 孟欣玫　　封面设计 时代中视
版式设计 思 凡　　责任校对 王璘姬　　责任印制 吕国明

出版发行 南开大学出版社　　购书热线 010—82910313
天津市南开区卫津路 94 号
出 版 人 肖占鹏
承　　印 北京兴达印刷有限公司
经　　销 全国各地新华书店　　网　　址 http://www.xfmtbooks.com
开　　本 850×1168　1/16
印　　张 14.75　　版　　次 2006 年 3 月第 3 版第 3 次印刷
字　　数 355 千字　　定　　价 25.00 元

说　　明

根据教育部高校学生司和教育部考试中心重新修订颁布了《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》。新大纲规定了哲学、文学、经济学、教育学、管理学、法学、理学、工学、农学、医学等学科的考试科目和复习考试内容，共编为5册，由高等教育出版社出版。

为了满足广大考生复习备考的需求，我们及时组织了参与修订大纲的有关专家编写了此套专升本入学考试指导教材，共分10册。包括《政治》、《英语》、《大学语文》、《教育理论》、《高等数学（一）》、《高等数学（二）》、《民法》、《艺术概论》、《生态学基础》、《医学综合》，以作为考生复习、考试的依据。

新编的这套考试指导教材极具权威性，该书从始至终注意实用性、针对性和能力的训练，以帮助考生提高入学前的知识技能和应对考试的能力为准则，深入研究考试大纲，精心打磨所列内容与练习，有利于培养考生的创新精神和实践能力。此外，每册书中还编制了模拟试题以使考生在整个学习进程中能及时检验复习效果，增强应考适应力和信心。

为了不断改进和完善本系列教材，使之更能适应广大考生的要求，为考生提高复习备考能力和水平发挥更大作用，我们诚恳希望各学科专家及广大读者提出宝贵意见，待再版时进一步完善。

编　者

2006年3月

专家编写　　紧扣考纲

学习辅导　　同步练习　　模拟测试

目　　录

第一章 极限、连续

§1.1 函 数

一、知识范围

1. 函数的概念

函数的定义　　函数的表示法　　分段函数

2. 函数的简单性质

单调性　　奇偶性　　有界性　　周期性

3. 反函数

反函数的定义　　反函数的图像

4. 基本初等函数

幂函数　　指数函数　　对数函数　　三角函数　　反三角函数

5. 函数的四则运算与复合运算

6. 初等函数

二、要求

1. 理解函数的概念. 会求函数的定义域、表达式及函数值. 会求分段函数的定义域、函数值,并会作出简单的分段函数的图像.

2. 理解和掌握函数的单调性、奇偶性、有界性和周期性,会判断所给函数的类别.

3. 了解函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 之间的关系(定义域、值域、图像),会求单调函数的反函数.

4. 理解和掌握函数的四则运算与复合运算,熟练掌握复合函数的复合过程.

5. 掌握基本初等函数的简单性质及其图像.

6. 了解初等函数的概念.

7. 会建立简单实际问题的函数关系式.

8. 理解变上限的定积分是变上限的函数,掌握对变上限定积分求导数的方法(见 §3.2).

三、基本知识

1. 函数的概念

(1) 函数的定义　设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的数集,如果对于每一数 $x\in D$,变量 y 总有惟一的数值与它对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$,其中 x 叫做自变量,y 叫做因变量;自变量 x 的变化范围,即数集 D 称为函数的定义域,函数值的集合称为函数的值域,记作 R.

在函数定义中,定义域和对应法则是两个重要因素. 两个函数仅当它们的定义域和对应法则都相同时,才是相同的函数,与自变量和因变量用什么符号无关. 如 $y=f(x),x\in D$ 与 $s=f(t),t\in D$ 表示同一函数.

(2) 函数的表示法

函数常用的表示方法有三种.

① 解析法(分析法、公式法)

对自变量和常数施行四则运算、乘幂、指数运算、取对数、取三角函数等数学运算所得到的式子称为解析表达式. 用解析表达式表示一个函数就称为函数的解析法,也叫分析法或公式法. 高等数学中所讨论的函数,多数用解析法表示,这是由于对解析式可以直接进行各种运算,以便研究函数的性质.

② 表格法

在实际应用中,常把自变量所取的值与对应的函数值列成表,这种表示函数的方法称为表格法. 如我们所用的各种数学用表,都是用表格法表示的函数关系.

③ 图示法

设 $y = f(x)$ 是一个给定的函数,定义域是 D. 因为自变量和函数都取实数值,因而可以在平面上取定一个直角坐标系 $O\text{-}xy$,用 x 轴上的点表示自变量的值,用 y 轴上的点表示函数值. 于是,对任意 $x \in D$ 及相应的函数值 $f(x)$ 就确定了该平面直角坐标系中的一点 $P(x,y)$. 当 x 在 D 内变动时,点 P 在坐标平面上移动,可得到平面上的一条曲线,这种方法称为图示法.

(3) 分段函数

在定义域内的不同点集内由不同的数学表达式表示的函数称为分段函数.

对于分段函数,无论它分成多少段,它总是表示一个函数,而不是几个函数. 求分段函数的值时,必须用自变量所在的点集中相应的数学表达式进行计算.

(4) 显函数和隐函数

定义见 §2.1.

(5) 积分上限函数

定义见 §3.2.

(6) 多元函数

定义见 §5.1.

2. 函数的简单性质

(1) 函数的单调性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域是 D,区间 $I \subset D$,如果对于任意两点 $x_1, x_2 \in I$,当 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 I 上单调增加;如果当 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上严格单调增加.

如果对于任意两点 $x_1, x_2 \in I$,当 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 I 上单调减少;如果当 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) > f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上严格单调减少.

单调增加与单调减少统称为单调. 为了方便,单调增加与严格单调增加统称为单调增加;单调减少与严格单调减少统称为单调减少.

(2) 函数的奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于坐标原点对称. 若对任意 $x \in D$,有 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 是奇函数;若对任意 $x \in D$,有 $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$ 是偶函数.

奇函数的图像关于坐标原点对称,偶函数的图像关于 y 轴对称.

(3) 函数的有界性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域是 D;若存在一个正数 M,使得对于一切 $x \in I \subset D$,有 $|f(x)| \leqslant M$,则称函数 $y = f(x)$ 在 I 上有界;如果不存在这样的正数 M,则称函数 $y = f(x)$ 在 I 上无界.

在定义域内有界的函数称为有界函数.

(4) 函数的周期性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域是 D,如果存在常数 $T \neq 0$,使得对于一切 $x \in D$,有 $(x \pm T) \in D$,且 $f(x \pm T) = f(x)$,则称 $f(x)$ 是周期函数.

如果 $f(x)$ 存在周期,一般指的是最小正周期.

周期函数在每一个周期内的图形是相同的.

3. 反函数

(1) 反函数的定义

设给定 y 是 x 的函数 $y = f(x)$. 若将 y 当作自变量, x 当作函数, 则由关系 $y = f(x)$ 所确定的函数 $x = \varphi(y)$ 叫做函数 $f(x)$ 的反函数, $f(x)$ 叫做直接函数.

习惯上往往用字母 x 表示自变量, y 为因变量, $y = f(x)$ 的反函数 $x = \varphi(y)$ 可写为 $y = \varphi(x) = f^{-1}(x)$.

若直接函数 $y = f(x)$ 的定义域是 D, 值域是 R, 则反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的定义域是 R, 值域是 D.

(2) 反函数的图像

反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像与直接函数 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

函数 $y = f(x)$ 的图像与其反函数 $x = \varphi(y)$ 的图像重合(二者是不同的函数, 但是它们的图像重合).

4. 基本初等函数

(1) 幂函数　函数 $y = x^{\mu}$(μ 是实数) 称为幂函数. 其定义域需根据 μ 的值确定. 但无论 μ 取什么实数值, 当 $x > 0$ 时, 它总是有定义.

当 $\mu > 0$ 时, 函数的图像通过原点 $(0,0)$ 和 $(1,1)$, 在 $(0, +\infty)$ 内严格单调增加且无界. 取 $\mu = 3, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, 图像见图 1-1.

当 $\mu < 0$ 时, 函数的图像通过 $(1,1)$, 在 $(0, +\infty)$ 内严格单调减少且无界, 以 x 轴和 y 轴为渐近线. 取 $\mu = -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1, -2, -3$, 图像见图 1-2.

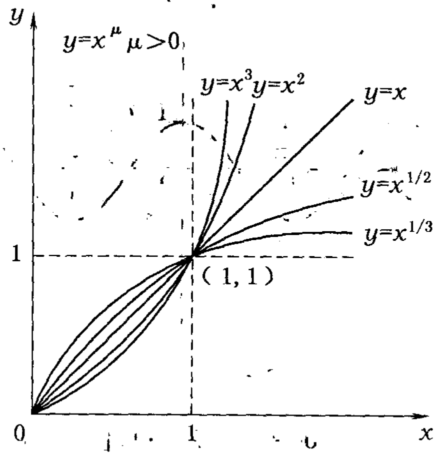

图 1-1

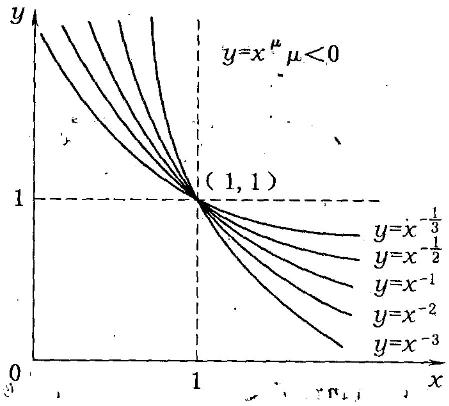

图 1-2

(2) 指数函数　函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 称为指数函数, 其定义域是 $(-\infty, +\infty)$. 图像在 x 轴的上方且通过点 $(0,1)$.

当 $0 < a < 1$ 时, 函数严格单调减少且无界, 曲线以 x 轴的正半轴为渐近线;

当 $a > 1$ 时, 函数严格单调增加且无界, 曲线以 x 轴的负半轴为渐近线. 取 $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{10}, 10, 2$, 图像见图 1-3.

取 $a = e = 2.71828\cdots$ 为底的指数函数 $y = e^x$ 是高等数学中的常用函数之一.

(3) 对数函数　函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 称为对数函数, 其定义域是 $(0, +\infty)$. 图像过点 $(1,0)$.

当 $0 < a < 1$ 时, 函数严格单调减少且无界, 曲线以 y 轴的正半轴为渐近线;

当 $a > 1$ 时, 函数严格单调增加且无界, 曲线以 y 轴的负半轴为渐近线. 取 $a = 2, 10, \frac{1}{10}, \frac{1}{2}$, 图像见图 1-4.

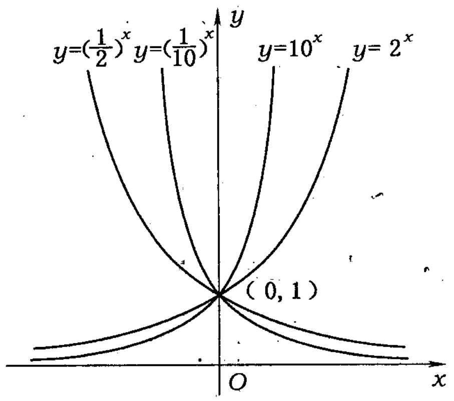

图 1-3

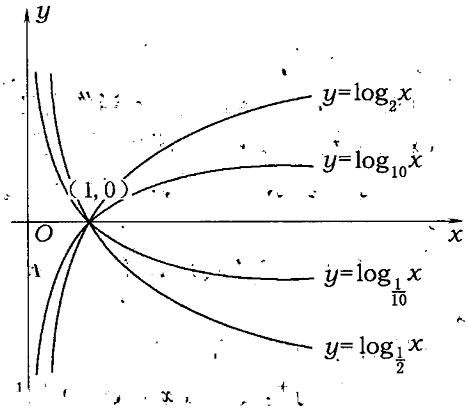

图 1-4

对数函数 $y = \log_a x$ 与指数函数 $y = a^x$ 互为反函数.

取 $a = e, y = \log_e x = \ln x$ 称为自然对数函数(与 e^x 互为反函数).

(4) 三角函数　共有六个三角函数,其自变量 x 以弧度为单位.

① 正弦函数 $y = \sin x$,定义域是 $(-\infty, +\infty)$,值域是 $[-1,1]$,是有界函数,奇函数,周期函数,周期是 2π. 图像界于直线 $y = -1$ 与 $y = 1$ 之间,见图 1-5.

② 余弦函数 $y = \cos x$,定义域是 $(-\infty, +\infty)$,值域是 $[-1,1]$,是有界函数,偶函数,周期函数,周期是 2π. 图像界于直线 $y = -1$ 与 $y = 1$ 之间,见图 1-6.

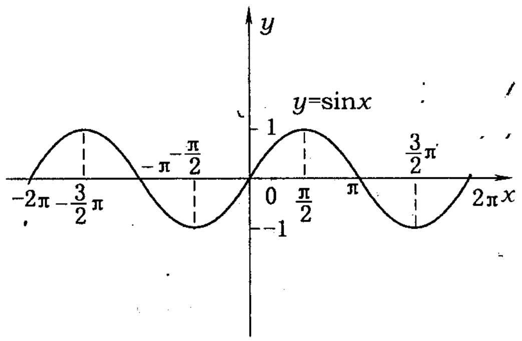

图 1-5

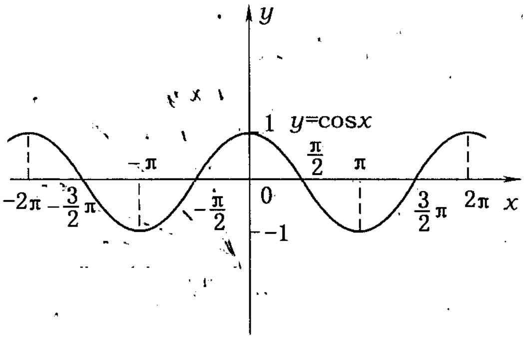

图 1-6

③ 正切函数 $y = \tan x$,定义域是 $\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi, \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$,值域是 $(-\infty, +\infty)$,是奇函数,周期函数,周期是 π. 图像见图 1-7.

④ 余切函数 $y = \cot x$,定义域是 $((k-1)\pi, k\pi)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$,值域是 $(-\infty, +\infty)$,是奇函数,周期函数,周期是 π. 图像见图 1-8.

⑤ 正割函数 $y = \sec x$,定义域是 $\left((k-1)\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$,是偶函数,周期函数,周期是 2π,正割函数是余弦函数的倒数,即 $\sec x = \frac{1}{\cos x}$.

⑥ 余割函数 $y = \csc x$,定义域是 $((k-1)\pi, k\pi)$,$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$,是奇函数,周期函数,周期是 2π,余割函数是正弦函数的倒数,即 $\csc x = \frac{1}{\sin x}$.

(5) 反三角函数　三角函数的反函数称为反三角函数. 由于三角函数在它们的定义域内不是单调函数,其反函数都是多值函数. 为了避免多值性,通常限制其值域,使之成为单调函数. 这样的单值分支仍称为反三角函数.

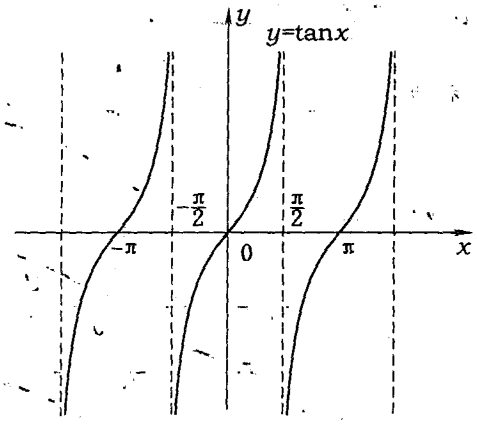

图 1-7

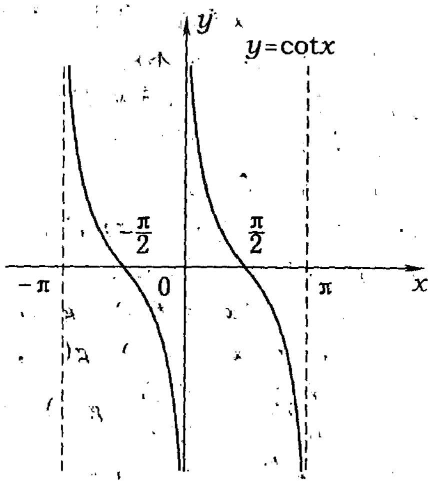

图 1-8

正弦函数 $y = \sin x$ 和余弦函数 $y = \cos x$ 的反函数分别是

$$\text{反正弦函数 } y = \arcsin x,$$
$$\text{反余弦函数 } y = \arccos x,$$

其定义域均是$[-1,1]$. 反正弦函数的值域是$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,反余弦函数的值域是$[0,\pi]$.

反正弦函数是单调增函数和奇函数(图 1-9);反余弦函数是单调减函数(图 1-10).

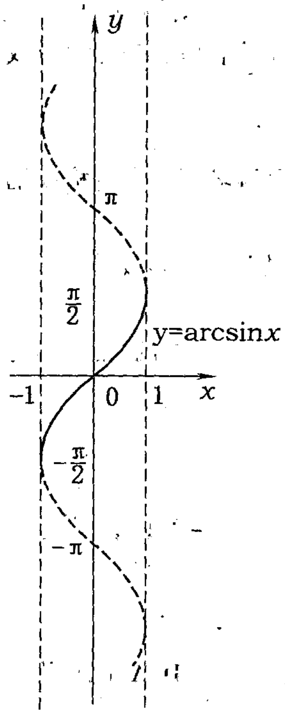

图 1-9

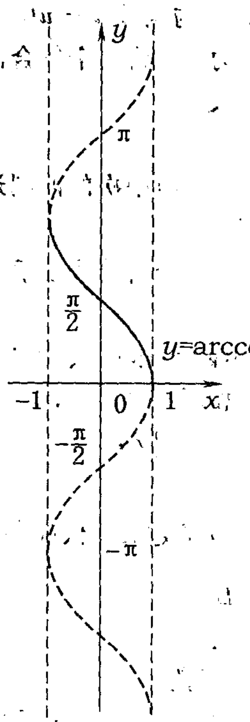

图 1-10

正切函数 $y = \tan x$ 和余切函数 $y = \cot x$ 的反函数分别是

$$\text{反正切函数 } y = \arctan x,$$
$$\text{反余切函数 } y = \operatorname{arccot} x,$$

其定义域均是$(-\infty, +\infty)$. 反正切函数的值域是$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,反余切函数的值域是$(0,\pi)$.

反正切函数是单调增函数和奇函数(图 1-11);反余切函数是单调减函数(图略).

反正割函数和反余割函数一般不用.

上述五种函数统称为基本初等函数,是最常用和最基本的函数,务必牢记它们的定义域、性质和图像.

5. 函数的四则运算和复合运算

(1) 函数的四则运算　设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在同一定义域上有定义,定义 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的四则运算如下.

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x),$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},(g(x) \neq 0).$$

上述运算可以推广到任意有限个函数.

(2) 复合函数　设 y 是 u 的函数 $y = f(u)$,且 u 又是 x 的函数 $u = u(x)$,函数 $f(u)$ 的定义域与函数 $u = u(x)$ 的值域交集非空,则对于 $u = u(x)$ 的定义域的某些 x,通过变量 u,变量 y 有确定的值与之对应,则 y 成为 x 的函数,称此函数是由函数 $y = f(u)$ 与函数 $u = u(x)$ 复合而成的复合函数,记作 $y = f[u(x)]$,u 叫做中间变量.

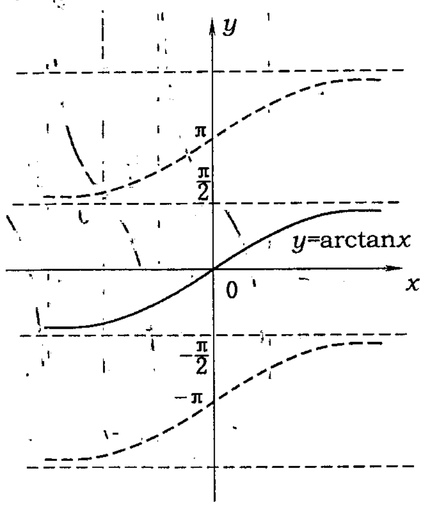

图 1-11

复合函数实际上是将中间变量代入后所构成的函数. 复合函数不仅可以由两个函数,而且可以由多个函数经过复合构成.

若函数 $y = f(u)$ 的定义域与函数 $u = u(x)$ 的值域交集是空集,这样的两个函数不能构成复合函数.

学习复合函数的重要目的是会将一个复合函数分解为若干个基本初等函数或常数与基本初等函数经过四则运算后得出的新函数.

6. 初等函数

由常数与基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所构成的且能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

高等数学中所遇到的能用一个解析式表示的函数,大多数是初等函数.

四、例题分析

1. 选择题　题目中给出四个选项,其中只有一项是符合题意要求的,请选出符合题意的选项.

例 1　下列各对函数中相同的是(　).

A. x 与 $\frac{x^2}{x}$　　B. $|x|$ 与 $\sqrt{x^2}$　　C. x 与 $e^{\ln x}$　　D. x 与 $\sin(\arcsin x)$

解　$\frac{x^2}{x}$, $e^{\ln x}$, $\sin(\arcsin x)$ 的定义域依次为 $x \neq 0, x > 0, x \in [-1,1]$, x 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$,故 A,C,D 的定义域不同,应选 B.

例 2　$y = 0$ 是(　).

A. 奇函数　　B. 偶函数　　C. 周期函数　　D. A,B,C 均正确

解　$y = 0$ 既是奇函数,也是偶函数,且为周期函数,应选 D.

例 3　函数 $y = f(x)$ 与反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的图像(　).

A. 关于 x 轴对称　　B. 关于 y 轴对称

C. 是同一条曲线　　D. 关于直线 $y = x$ 对称

解　$y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 的图像重合;$y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称,应选 C.

例 4　在 $O - xy$ 平面上,关于直线 $y = x$ 对称的是(　).

A. $y = e^x$ 的图像与 $y = e^{-x}$ 的图像

B. $y = x^2$ 的图像与 $y = \sqrt{x}$ 的图像 $(x \geq 0)$.

C. $y = \log_a x$ 的图像与 $y = \log_{1/a} x$ 的图像 $(a \neq 1, a > 0)$

D. $y = e^x$ 的图像与 $\ln y = x$ 的图像

解 $y = e^x$ 与 $y = \ln x$, $y = \log_a x$ 与 $y = a^x$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称,故 A,C 均不对;$y = x^2$ 的图像与 $y = \sqrt{x}$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称,应选 B;$y = e^x$ 与 $\ln y = x$ 的图像重合,D 不正确.

例 5 函数 $y = e^x + 1$ 的反函数是( ).

A. $y = \ln(x + 1)$　　　　B. $y = \ln(x - 1)$

C. $y = \ln x + 1$　　　　D. $y = \ln x - 1$

解 由 $y = e^x + 1$,得 $e^x = y - 1$,故 $x = \ln(y - 1)$,交换 x 与 y 的位置得反函数 $y = \ln(x - 1)$,应选 B.

2. 填空题

例 6 $y = \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$ 的定义域 $D =$ ______.

解 要使函数式有意义,根式应大于或等于零,即

$$\begin{cases} 1 + x \geq 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < 1, \begin{cases} 1 + x \leq 0 \\ 1 - x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x > 1 \end{cases} \text{无解.}$$

故定义域 $D = \{-1 \leq x < 1\}$.

例 7 设 $f(1 + x) = x^2 + 3x + 5$,则 $f(x) =$ ______.

解 1 设 $1 + x = t$,则 $x = t - 1$.

$f(t) = f(1 + x) = (t - 1)^2 + 3(t - 1) + 5 = t^2 + t + 3$,故 $f(x) = x^2 + x + 3$.

解 2 $f(1 + x) = (1 + x)^2 + (1 + x) + 3$,故 $f(x) = x^2 + x + 3$.

解 1 是一种常用的方法.

例 8 设 $y = \dfrac{1 + x}{1 - x}$,则 y 的反函数是______.

解 由 $y = \dfrac{1 + x}{1 - x}$,得 $y(1 - x) = 1 + x$,即 $x = \dfrac{y - 1}{y + 1}$. 交换 x 与 y 的位置得 $y = \dfrac{1 + x}{1 - x}$ 的反函数是 $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$.

例 9 设 $f(x) = \dfrac{1 + x}{1 - x}$,则 $f[f(x)] =$ ______, $(x \neq 0)$.

解 $f[f(x)] = \dfrac{1 + \dfrac{1 + x}{1 - x}}{1 - \dfrac{1 + x}{1 - x}} = \dfrac{1 - x + 1 + x}{1 - x - 1 - x} = -\dfrac{1}{x}, (x \neq 0)$.

例 10 函数 $y = \sin 3x$ 的周期是______.

解 利用周期函数的定义,设 T 是函数的周期,要使 $\sin 3(x + T) = \sin(3x + 3T) = \sin 3x$,需 $3T = 2\pi$,故 $T = \dfrac{2\pi}{3}$.

3. 解答题

例 11 求下列函数的定义域.

(1) $y = \dfrac{1}{\ln(1 - x)} + \sqrt{x + 1}$　　　　(2) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

(3) $y = \lg(\sin \dfrac{x}{\pi})$　　　　(4) $y = \arcsin(1 - x) + \sqrt{x^2 - 1}$

解 (1) y 的定义域应是两个函数的定义域的交集. 对于 $\dfrac{1}{\ln(1 - x)}$,由 $1 - x > 0$,得 $x < 1$;又 $\ln(1 -$

$x) \neq 0$,即 $1-x \neq 1$,得 $x \neq 0$,其定义域是 $(-\infty,0) \cup (0,1)$;对于 $\sqrt{x+1}$,由 $x+1 \geqslant 0$,得 $x \geqslant -1$,其定义域是 $[-1,+\infty)$. 故函数 $y=\dfrac{1}{\ln(1-x)}+\sqrt{x-1}$ 的定义域是

$$[(-\infty,0) \cup (0,1)] \cap [-1,+\infty) = [-1,0) \cup (0,1).$$

(2) 因 $\sqrt{x^2+1} > -x$,故 $x+\sqrt{x^2+1} > 0$,$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

(3) 因 $\sin\dfrac{x}{\pi} > 0 \Leftrightarrow 2k\pi < \dfrac{x}{\pi} < (2k+1)\pi$,故定义域是

$$2k\pi^2 < x < (2k+1)\pi^2 \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2\cdots).$$

(4) 由 $\arcsin(1-x)$ 的定义域是 $-1 \leqslant 1-x \leqslant 1$,即 $0 \leqslant x \leqslant 2$;又 $\sqrt{x^2-1}$ 的定义域是 $x^2 \geqslant 1$,即 $x \leqslant -1$ 或 $x \geqslant 1$. 故 $y=\arcsin(1-x)+\sqrt{x^2-1}$ 的定义域是

$$[0,2] \cap [(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)] = [1,2].$$

例 12 设 $f(u)=\sqrt{1-u^2}$,$u(x)=x+1$,求 $f[u(x)]$ 的定义域.

解 $f[u(x)]=\sqrt{1-(x+1)^2}$,由 $1-(x+1)^2 \geqslant 0$,得 $-2 \leqslant x \leqslant 0$,故 $f[u(x)]$ 的定义域是 $[-2,0]$.

或由 $f(u)$ 的定义域是 $|u| \leqslant 1$,即 $-1 \leqslant u < 1$,又 $u=x+1$,有 $-1 \leqslant x+1 \leqslant 1$,即 $-2 \leqslant x \leqslant 0$ 为 $f[u(x)]$ 的定义域.

例 13 设 $f(x)=e^x=\exp\{x\}$,$g(x)=\pi^x$,求 $f[f(x)]$,$f[g(x)]$,$g[f(x)]$.

解

$$f[f(x)] = f(e^x) = \exp\{e^x\},$$
$$f[g(x)] = f(\pi^x) = \exp\{\pi^x\},$$
$$g[f(x)] = g(e^x) = \pi^{\exp\{x\}}.$$

例 14 设 $f(1+x)=\dfrac{2+x}{2x-1}$,求 $f(x)$,$(x \neq \dfrac{3}{2})$.

解 1 设 $1+x=t$,则 $x=t-1$,$f(t)=\dfrac{2+(t-1)}{2(t-1)-1}=\dfrac{t+1}{2t-3}$,故 $f(x)=\dfrac{x+1}{2x-3}$,$(x \neq \dfrac{3}{2})$.

解 2 凑成法 $f(1+x)=\dfrac{1+(1+x)}{2(1+x)-3}$,故 $f(x)=\dfrac{1+x}{2x-3}$,$(x \neq \dfrac{3}{2})$.

例 15 设 $f(x+\dfrac{1}{x})=x^2+\dfrac{1}{x^2}$,求 $f(x)$.

解 $f(x+\dfrac{1}{x})=(x+\dfrac{1}{x})^2-2$,故 $f(x)=x^2-2$.

本题如设 $x+\dfrac{1}{x}=t$,反解出 x 较繁.

例 16 设

$$f(x)=\begin{cases} 0.1+3.8x & 0 \leqslant x \leqslant 30 \\ -19.2+37.8\ln x & 30 < x \leqslant 60 \\ 150.2-56.3e^{-0.1x} & 60 < x \leqslant 100 \end{cases},$$

求 $f(20)$,$f(40)$,$f(80)$.

解 这是分段函数,求函数值时应从自变量所在的区间的分析式中代入所求值后计算.

$f(20)=0.1+3.8\times 20=76.1$,

$f(40)=-19.2+37.8\ln 40=120.2$,

$f(80)=150.2-56.3e^{-0.1\times 80}=150.2$.

例 17 讨论下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$　　(2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

(3) $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}(a>0,a\neq 1)$　　(4) $f(x)=x\sin x$

解　(1) 因 $f(-x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}=-\ln\dfrac{1+x}{1-x}=-f(x)$，故 $f(x)$ 是奇函数.

(2) 因 $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$，故 $f(x)$ 是奇函数.

(3) 因 $f(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^{-(-x)}}{2}=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x)$，故 $f(x)$ 是偶函数.

(4) 因 $f(-x)=-x\sin(-x)=x\sin x$，故 $f(x)$ 是偶函数.

例 18　判断下列函数的有界性.

(1) $y=1+\sin\dfrac{1}{x}$　　(2) $y=1+\arctan x$

(3) $y=1+x^2$　　(4) $y=3\sin 2x+4\cos 3x$

解　(1) 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $|y|=|1+\sin\dfrac{1}{x}|\leqslant 1+|\sin\dfrac{1}{x}|\leqslant 2$，故函数 $y=1+\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有界.

(2) 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $|y|=|1+\arctan x|\leqslant 1+|\arctan x|\leqslant 1+\dfrac{\pi}{2}$，故函数 $y=1+\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有界.

(3) 对任意大的正数 M，只要 $|x|>\sqrt{M-1}$，就有 $1+x^2\geqslant M$，故 $y=1+x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 无界.

(4) 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $|y|=|3\sin 2x+4\cos 3x|\leqslant 3|\sin 2x|+4|\cos 3x|\leqslant 3+4=7$，故函数 $y=3\sin 2x+4\cos 3x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有界.

例 19　求下列函数的周期.

(1) $y=\cos^2 x$　　(2) $y=a\sin(\omega t+\varphi)$，$a,\omega\neq 0$（$\varphi$ 是常数）

解　(1) $y=\cos^2 x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x$，根据周期函数的定义，设 T 是函数的周期，要使

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2(x+T)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$$

由 $\cos(2x+2T)=\cos 2x$，需 $2T=2\pi$，得 $T=\pi$ 是 $y=\cos^2 x$ 的周期.

(2) 由定义，要使 $a\sin[\omega(t+T)+\varphi]=a\sin(\omega t+\omega T+\varphi)=a\sin(\omega t+\varphi)$，需 $\omega T=2\pi$，故 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 是 $y=a\sin(\omega t+\varphi)$ 的周期.

例 20　将函数 $y=2^{\sin^2\frac{1}{x}}$ 分解成几个基本初等函数的复合.

解　可由外到内进行分解：令 $y=2^u$，$u=v^2$，$v=\sin\omega$，$\omega=\dfrac{1}{x}$.

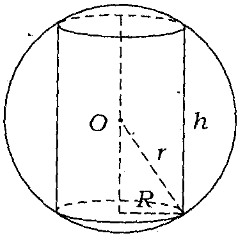

图 1-12

例 21　在半径为 r 的球内嵌入一内接圆柱（图 1-12），试将圆柱的体积表为其高的函数.

解　设圆柱高为 h，圆柱的半径 $R=\sqrt{r^2-(\dfrac{h}{2})^2}$，故圆柱体积为

$$V=\pi hR^2=\pi h(r^2-\frac{h^2}{4}).$$

由于圆柱在球内，故

$$0<h<2r.$$

同步练习及参考解答

同步练习

一、选择题

1. 函数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \arccos\left(\dfrac{x}{2} - 1\right)$ 的定义域是(　).

A. $\{x \mid -1 < x < 1\}$　　B. $\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 4\}$

C. $\{x \mid 0 \leqslant x < 1\}$　　D. $\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$

2. 下列各对函数中相同的是(　).

A. x 与 $\sqrt{x^2}$　　B. $\ln x^2$ 与 $2\ln x$

C. x 与 $\tan(\arctan x)$　　D. $e^{-\frac{1}{2}\ln x}$ 与 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

3. 下列(　)函数不是周期函数.

A. $y = 3\sin(x + \pi)$　　B. $y = \sin^2 x$

C. $y = 1 + \sin 5x$　　D. $y = x\sin x$

4. $y = \dfrac{ax-b}{cx-d}$ 的反函数是(　).

A. $y = \dfrac{ax-b}{cx-d}$　　B. $y = \dfrac{ax-d}{cx-b}$

C. $y = \dfrac{cx-d}{ax-b}$　　D. $y = \dfrac{dx-b}{cx-a}$

5. 为使函数 $y = \arcsin(u+2)$ 与 $u = |x| - 2$ 构成复合函数，则 x 只能属于(　).

A. $[3,5]$　　B. $[-1,1]$

C. $[4,6]$　　D. $[2,4]$

二、填空题

6. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,\pi]$，则 $f(\ln x)$ 的定义域是______.

7. 设 $f(x^2+1) = x^4 + 4x^2 + 3$，则 $f(x) =$ ______.

8. $f(x) = |\sin x|$ 是以______为周期的函数.

9. 为使 $y = \dfrac{1}{\ln f(x)}$ 的定义，则 $f(x)$ ______.

10. 函数 $y = 1 + \ln(2x+3)$ 的反函数是______.

三、解答题

11. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \ln\cos x$　　(2) $y = \dfrac{\sqrt{\ln(1+x)}}{x-1}$

(3) $y = \sqrt{3-x^2} + \arccos\dfrac{x-2}{3}$　　(4) $y = \sqrt{\sin x} + \lg\dfrac{1+x}{1-x}$

12. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，求函数 $y = f(x^2)$ 和 $y = f(\cos x)$ 的定义域.

13. 设 $f(x) = x^2 - x + 1$，求 $f[f(x)+1]$.

14. 设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2$，求 $f(x)$.

15. 设

$$f(x)=\begin{cases} e^x & x\leqslant 0 \\ x^\pi & 0<x\leqslant\pi, \\ \ln x & x>\pi \end{cases}$$

求 $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(e)$, $f(2\pi)$.

16. 设 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 其定义域均为 D. 证明 $f(x)g(x)$ 是奇函数.

17. 判断下列函数的周期性, 若是周期函数, 求出其周期 T.

(1) $y=\tan\dfrac{x}{2}$　　(2) $y=\sin x+\sin 2x$

(3) $y=\sin^2 x$　　(4) $y=\sin x^2$

(5) $y=a+b\sin cx$, a,b,c 是常数, $c>0$.

18. 求

$$f(x)=\begin{cases} x & -\infty<x<1 \\ x^2 & 1\leqslant x\leqslant 4 \\ 2^x & 4<x<+\infty \end{cases}$$

的反函数 $y=f^{-1}(x)$.

19. 将下列函数分解成几个常数和基本初等函数的复合.

(1) $y=2\arcsin(1-x)^3$　　(2) $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{\lg\sqrt{x^2+2x}}$

20. 已知圆锥的体积是 V, 试将圆锥的底半径表示为其高的函数, 并求此函数的定义域.

21. 把一圆形铁片自圆心处剪去中心角为 θ 的一扇形后围成一个无底圆锥, 试将圆锥的体积表示为 θ 的函数.

同步练习参考解答

1. C　2. D　3. D　4. D　5. B

6. $[1,e^\pi]$

7. $x(x+2)$

8. π

9. $f(x)>0$ 且 $f(x)\neq 1$

10. $y=\dfrac{1}{2}(e^{x-1}-3)$

11. (1) $\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$　(2) $[0,1)\cup(1,+\infty)$

(3) $[-1,\sqrt{3}]$　(4) $[0,1)$

12. $y=f(x^2)$ 的定义域是 $[-1,1]$, $y=f(\cos x)$ 的定义域是 $\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

13. $(x^2-x+2)(x^2-x+1)+1$

14. $\dfrac{1}{x(1+x)^2}$

15. $f(-1)=\dfrac{1}{e}$, $f(0)=1$, $f(2)=2^\pi$, $f(e)=e^\pi$, $f(2\pi)=\ln(2\pi)$.

16. 略

17.（1）周期函数，$T = 2\pi$.　　（2）周期函数，$T = 2\pi$.

（3）周期函数，$T = \pi$.　　（4）非周期函数.

（5）若 $b = 0, y = a$ 是周期函数，任意 $T \neq 0$ 均是其周期；若 $b \neq 0, y = a + b\sin cx$ 是周期函数，$T = \frac{2\pi}{c}$.

18. $f^{-1}(x) = \begin{cases} x & -\infty < x < 1 \\ \sqrt{x} & 1 \leqslant x \leqslant 16 \\ \frac{\ln x}{\ln 2} & 16 < x < +\infty \end{cases}$

19.（1）$y = 2\arcsin u, u = v^3, v = 1 - x$　（2）$y = \frac{1}{2}\sqrt{u}, u = \lg v, v = \sqrt{w}, w = x^2 + 2x$

20. $R = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$，$h$ 是圆锥的高，定义域是 $(0, +\infty)$.

21. $V = \frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi - \theta)^2\sqrt{(4\pi - \theta)\theta}$，$(0 < \theta < 2\pi)$，$R$ 是圆形铁片的半径.

§1.2　极　　限

一、知识范围

1. 数列极限的概念

数列　　数列极限的定义

2. 数列极限的性质

惟一性　　有界性　　四则运算法则　　夹逼定理　　单调有界数列极限存在定理

3. 函数极限的概念

函数在一点处极限的定义　　左、右极限及其与极限的关系　　x 趋于无穷（$x \to \infty, x \to +\infty, x \to -\infty$）时函数的极限　　函数极限的几何意义

4. 函数极限的定理

惟一性定理　　夹逼定理　　四则运算法则

5. 无穷小量和无穷大量

无穷小量与无穷大量的定义　　无穷小量与无穷大量的关系　　无穷小量的性质　　两个无穷小量阶的比较

6. 两个重要极限

$$\lim_{x \to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

7. 洛必达法则

二、要求

1. 理解极限的概念（对极限定义中“$\varepsilon - N$、$\varepsilon - \delta$ 和 $\varepsilon - M$”等形式的描述不作要求），能根据极限概念分析函数的变化趋势. 会求函数在一点处的左极限与右极限，了解函数在一点处极限存在的充分必要条件.