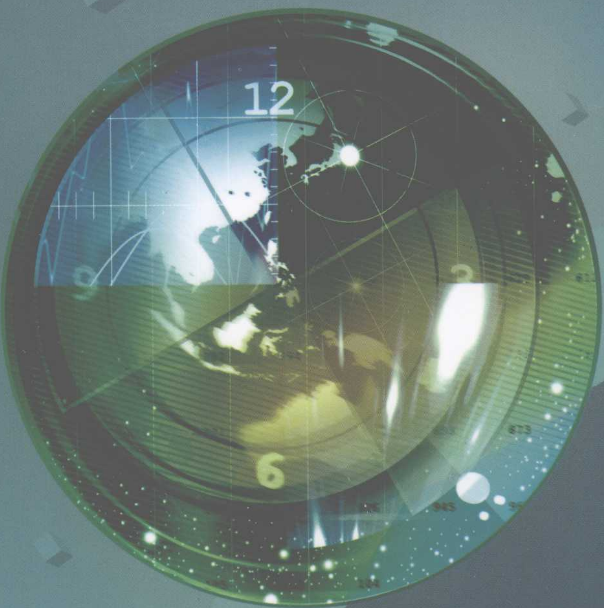
高等学校规划教材

高等数学

（上册）



主　编　张兴永

副主编　赵迁贵　孟　健

杨宏晨　吴宗翔

煤炭工业出版社

高等学校规划教材

高等数学

（上册）

主　编　张兴永

副主编　赵迁贵　孟　健

杨宏晨　吴宗翔

煤炭工业出版社

·北　京·

内　容　提　要

本书是根据全国高校工科数学课程教学指导委员会的《高等数学课程教学基本要求》和考研大纲，由高等院校多位具有丰富教学经验的专家学者和一线教师在分析、研究、对比、总结了国内现行教材的基础上鼎立合作编写而成的。全书分上、下两册。上册内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用，向量代数与空间解析几何等。内容重点突出，例题丰富有层次，便于课堂教学和学生学习。为了便于分层次教学，每章节后的习题分A组基本题和B组提高题。书末还附有习题参考答案以及MATLAB软件在高等数学中的应用介绍。

本书可作为高等工科院校和经济类、管理类等各专业的教材，也可供成人高校、自学考试人员以及工程技术人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上册)/张兴永主编．—北京：煤炭工业出版社，2007.8

高等学校规划教材

ISBN 978－7－5020－3130－5

Ⅰ．高…　Ⅱ．张…　Ⅲ．高等数学　Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第091592号

煤炭工业出版社　出版

(北京市朝阳区芍药居35号　100029)

网址：www.cciph.com.cn

环球印刷(北京)有限公司　印刷

新华书店北京发行所　发行

*

开本 787mm×1092mm 1/16　　印张 17½

字数 421千字　　印数 1—5,000

2007年8月第1版　　2007年8月第1次印刷

社内编号 5931　　定价 28.00元

前　言

《高等数学》课程是工科大学生的重要基础理论课程，它的理论和方法几乎渗透了一切科学技术领域并起着极其重要的作用。为了提高《高等数学》课程的教学质量，适应《高等数学》课程建设和国家精品课程建设的需要，我们组织了长期担任《高等数学》课程教学、具有高级职称和丰富教学经验的多位专家学者和一线骨干教师，根据全国高校工科数学课程教学指导委员会的《高等数学课程教学基本要求》及考研大纲，在分析、研究、对比、总结了国内现行教材的基础上，综合多年的教学经验、备课笔记和教学课件等内容集体编写了此书。

本书分上、下两册出版。上册包括一元函数的微积分、向量代数与空间解析几何等内容，下册包括多元函数的微积分、无穷级数、常微分方程等内容。每章节后分别配有习题，书末附有习题参考答案和 MATLAB 软件的基本操作及其在高等数学中的应用介绍。本教材的特点是：

(1) 教学内容重点突出，例题丰富有层次，各章节知识引入自然，讲述通俗易懂，便于课堂教学和学生学习；

(2) 书后习题分 A 组基本题和 B 组提高题，便于分层次教学和学习；

(3) 增加了 MATLAB 软件在高等数学中的应用这一实践环节，进一步开阔了学生的视野。

本书第一章、第十章和附录中的 MATLAB 软件与数学实验由张兴永编写，第二章和第九章由吴宗翔编写，第三章、第七章的第 1～2 节和第八章由赵迁贵编写，第四章、第六章和第十二章由杨宏晨编写，第五章、第七章的第 3～6 节和第十一章由孟健编写，全书由张兴永统稿。

在本书的编写过程中，我们得到了《高等数学》课程教学老师的积极支持，他们提出了许多改进建议，使得书稿质量趋于完善，在此我们表示衷心的感谢！

限于编者水平，难免存在不妥之处，请读者批评指正。

编　者
2007 年 8 月

目　录

第一章　函数、极限与连续

数学是研究现实世界中空间形式与数量关系的学科. 初等数学主要研究的是数与数之间的关系,可以说初等数学研究的对象基本上是常量. 但在现实生活中,大量的实际问题仅仅用初等数学是无法解决的. 而高等数学则是以变量为研究对象的一门学科,用它可以研究大量的实际问题. 极限方法是研究变量的一种基本方法,高等数学中的许多概念及运算法则都是在研究极限的基础上建立起来的,极限思想贯穿整个高等数学始终.

本章首先简要回顾函数的基本概念,重点介绍极限与连续等基本概念以及它们的一些性质.

§1.1　函　　数

一、集合及其运算

集合是指具有某种特定性质的事物的总体,组成这个集合的事物称为该集合的元素. 通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$表示集合,用小写字母 $a,b,c,\cdots$表示集合的元素. 如果 a 是集合A 中的元素,就说 a 属于A,记作 $a\in A$;如果 a 不是集合A 中的元素,就说 a 不属于A,记作 $a\notin A$. 集合分为有限集合与无限集合,不含任何元素的集合称为空集,记作$\varnothing$.

例如:

$A=\{0,1,2,\cdots,9\}$是有限集合;

$B=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$是无限集合;

$\{x\mid x$ 为实数且$x^2+2=0\}$是空集.

(一) 常用的数的集合

1. 自然数集合　$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$;$\mathbf{N}^+=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$;

2. 整数集合　$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,+1,+2,\cdots,+n,\cdots\}$;

3. 有理数集合　$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\mid p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^+,\text{且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\}$;

4. 实数集合　记作 $\mathbf{R}$;用 $\mathbf{R}^*$表示排除 0 的实数集合,用 $\mathbf{R}^+$表示全体正实数集合.

(二) 数集之间的关系

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}\subset\mathbf{Q},\ \mathbf{Q}\subset\mathbf{R}.$$

设 A,B 是两个集合,则集合的基本运算有以下几种:

1. 并集　$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或} x\in B\}$;

2. 交集　$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且} x\in B\}$;

3. 差集　$A\setminus B=\{x\mid x\in A \text{ 且} x\notin B\}$;

4. 余集(补集)　$B_A^C=A-B$(其中 $B\subset A$).

二、区间与邻域

区间是用的较多的一类数集. 设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$,常用的区间有

1. 开区间 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$；

2. 闭区间 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$；

3. 半开区间 $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$；$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$.

以上区间都称为有限区间,其区间的长度为 $b-a$,这些区间在数轴上的表示如图 1－1(a)～(d)所示.

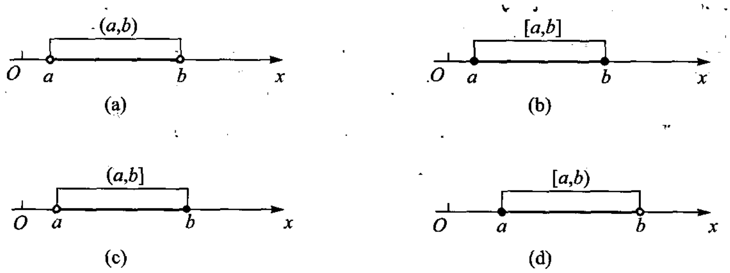


图 1－1

4. 无穷区间

例如

$$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\},$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\},$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\},$$

这些区间长度为无穷,前两个区间在数轴上表示如图 1－2(a)、(b)所示,$(-\infty,+\infty)$表示整个数轴.

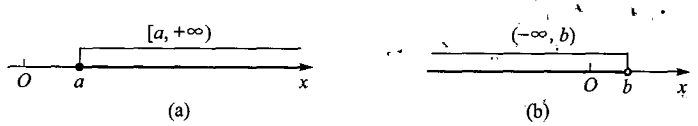


图 1－2

邻域是一个与区间有关并且经常用到的概念.

定义 **设 a 与 δ 是两个实数且 $\delta>0$,称以 a 为中心且长度等于 2δ 的开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a,\delta)$. 即**

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\},$$

这里,点 a 叫做这**邻域的中心**,δ 叫做这**邻域的半径**.

点 a 的 δ 邻域也可表示为

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

几何上,点 a 的 δ 邻域是以 a 为中心,δ 为半径的开区间,如图 1－3 所示.

若点 a 的 δ 邻域去掉中心,称为点 a 去心的 δ 邻域,记作 $\overset{o}{U}(a,\delta)$,即

$$\overset{o}{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

为方便,开区间 $(a-\delta,a)$ 称为点 a 的左 δ 邻域,开区间 $(a,a+\delta)$ 称为点 a 的右 δ 邻

域. 有时，点a的某一邻域可记为$U(a)$，点a的某一去心邻域可记为$\overset{o}{U}(a)$.

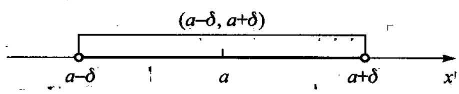


图 1-3

例如，邻域 $U(1,0.2)$就是区间$(0.8,1.2)$，它是以 1 为中心，0.2 为半径的开区间，区间的长度为 0.4.

三、函数的概念

函数是数学中的重要概念，如圆面积与半径的关系：$A=\pi r^2, r\in(0,+\infty)$，称面积 A 为半径 r 的函数，r 为自变量，$(0,+\infty)$为函数的定义域.

定义　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则，总有确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

x 称为自变量，y 称为因变量，x 的取值范围 D 称为定义域，y 的相应取值范围称为函数的值域.

例如，式子 $y=\sin\sqrt{x}$表示 y 是 x 的函数，该函数的定义域为$[0,+\infty)$，值域为$[-1,1]$.

这里要注意：

(1) 函数的定义域、对应法则是构成函数的两要素，如果两个函数具有相同的定义域和对应法则，那么这两个函数是相同的. 例如，函数 $f_1(x)=\dfrac{x^2}{x}$和 $f_2(x)=x$ 是不同的，而函数 $g_1(x)=|\sin x|$和 $g_2(x)=\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{2}}$是相同的.

(2) 在研究函数关系时，必须注意它的定义域. 只有当自变量在定义域内取值时，因变量才有确定的对应值，即函数才有意义. 函数的定义域通常按以下两种情形来确定：一种是对有实际背景的函数，根据实际背景中变量的实际意义确定. 例如，在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s，开始下落的时刻 $t=0$，落地的时刻 $t=T$，则 s 与 t 之间的函数关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2, t\in[0,T],$$

这个函数的定义域就是区间$[0,T]$；另一种是对抽象地用算式表达的函数，通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为函数的自然定义域. 例如，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域是开区间$(-1,1)$.

(3) 在函数的定义中，如果对每个 $x\in D$，对应的函数值 y 总是唯一的，这样定义的函数称为单值函数；如果对每个 $x\in D$，对应的函数值 y 不总是唯一的，我们称这种法则确定了一个多值函数. 例如式子 $y=x^4$ 确定了 y 是 x 的单值函数；而式子 $x^2+y^2=1$ 确定了 y 是 x 的多值函数. 对于多值函数，往往只要附加一些条件，就可将它化为单值函数，这样得到的单值函数称为多值函数的单值分支. 例如，在式子 $x^2+y^2=1$ 给出的对应法则中，附加“$y\geqslant 0$”条件，即可得到一个单值分支 $y=y_1(x)=\sqrt{1-x^2}$.

例 1　求下列函数的定义域

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$;

(2) $y=\arccos(x-1)+\lg(1-2x)$.

解　(1) 要使函数有意义，函数的两部分必须同时都有意义；由 $1-x^2\neq 0$ 得 $x\neq\pm 1$，由 $x+2\geqslant 0$ 得 $x\geqslant -2$，所以函数的定义域为 $D=[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(2) 由 $|x-1|\leqslant 1$ 得 $0\leqslant x\leqslant 2$，由 $1-2x>0$ 得 $x<\frac{1}{2}$，所以函数的定义域为 $D=\left[0,\frac{1}{2}\right)$.

四、几类特殊的函数

1. 常函数　$y=C$（C 为常数），其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{C\}$ 中就一个值 C，函数图形是一条水平直线，如图 1－4 所示.

2. 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{-1,0,1\}$，图形如图 1－5 所示.

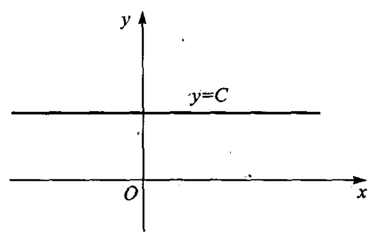


图 1－4

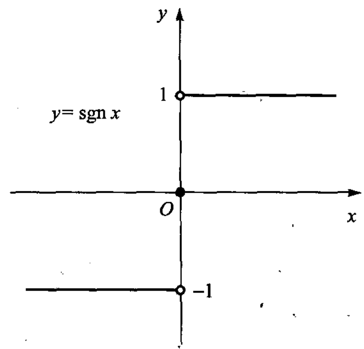


图 1－5

由符号函数可知 $|x|=x\operatorname{sgn} x$.

3. 取整函数　$y=[x]$，其定义为 y 的取值是不超过 x 的最大整数. 例如

$$\left[\frac{3}{5}\right]=0,\ [\sqrt{3}]=1,\ [-8]=-8,\ [-3.8]=-4.$$

取整函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\mathbf{Z}$，函数图形如图 1－6 所示.

4. 分段函数　分段函数是一类经常遇到的函数，它是用几个式子表示的一个函数关系. 例如

$$f(x)=\begin{cases}2x-1, & x>0,\\ x^2-1, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

其图形如图 1－7 所示.

函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$f(-2)=(x^2-1)|_{x=-2}=3$，$f(3)=(2x-1)|_{x=3}=5$.

显然，符号函数和取整函数都是分段函数.

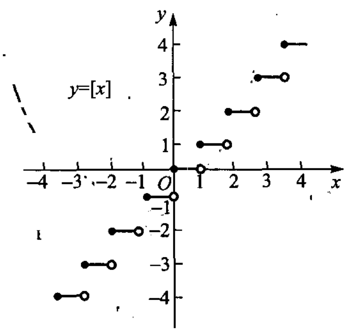


图 1－6

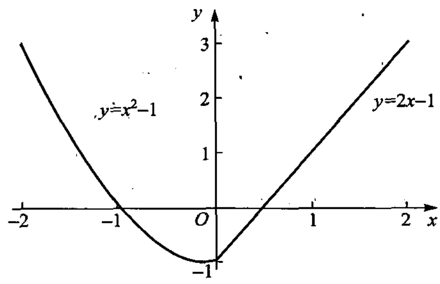


图 1－7

5. 取最值函数 设两个函数 $f(x)$和 $g(x)$定义域为 D,取最大值函数为

$$y=\max\{f(x),g(x)\},$$

其图形如图 1－8 所示.

取最小值函数为

$$y=\min\{f(x),g(x)\},$$

其图形如图 1－9 所示.

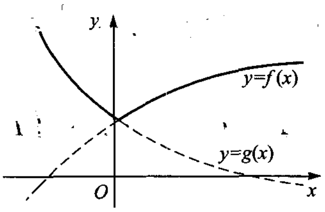


图 1－8

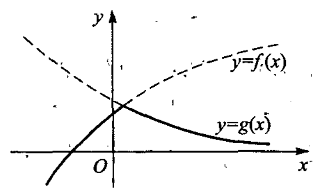


图 1－9

例 2 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -2, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 求函数 $f(x+3)$的定义域.

解 因为

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -2, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$$

$$f(x+3)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x+3\leqslant 1,\\ -2, & 1<x+3\leqslant 2,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & -3\leqslant x\leqslant -2,\\ -2, & -2<x\leqslant -1,\end{cases}$$

所以函数 $f(x+3)$的定义域为 $D:[-3,-1]$.

例 3 试将函数 $f(x)=\max\{x,x^2\}$用分段函数表示,并作图.

解 当 $x\leqslant 0$ 时,$x^2\geqslant x$;当 $0<x<1$ 时,$x^2<x$;当 $x\geqslant 1$ 时,$x^2\geqslant x$. 所以

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x, & 0<x<1,\\ x^2, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

函数图形如图 1－10 所示.

五、函数的几种特性

1. 函数的有界性 设函数 $y=f(x), x\in D$，数集 $X\subset D$，如果存在一个数 K_1，使得

$$K_1\leqslant f(x)$$

对任一 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界，而 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界. 如果存在一个数 K_2，使得

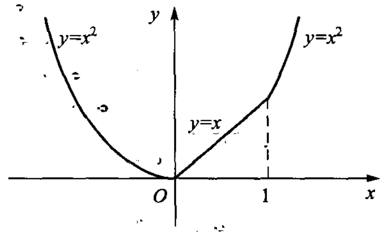


图 1－10

$$f(x)\leqslant K_2$$

对任一 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界，而 K_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界. 如果存在一个正数 M，使得

$$|f(x)|\leqslant M$$

对任一 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果这样的 M 不存在，称函数 $f(x)$ 在 X 上无界；这也就是说，如果对任意 $M\in\mathbf{R}^+$，都存在 $x_0\in X$，使得 $|f(x_0)|\geqslant M$ 成立，那么函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

显然，如果函数 $f(x)$ 在 X 上既有下界 K_1 又有上界 K_2，则函数 $f(x)$ 在 X 上有界，因为取 $M=\max\{|K_1|,|K_2|\}$，就有 $|f(x)|\leqslant M$. 反之也成立.

例如，函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界；函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 在区间 $(1,2)$ 内和 $[1,+\infty)$ 上都是有界的，但在区间 $(0,1]$ 上无界.

2. 函数的单调性 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于区间 I 上的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；如果对于区间 I 上的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的；单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数.

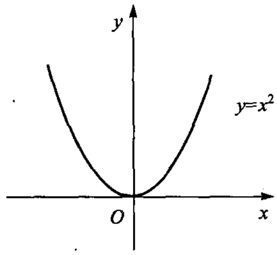


图 1－11

例如，函数 $y=x$ 和 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内都是单调增加函数，函数 $y=-x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调减少函数；而函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数，但在区间 $(0,+\infty)$ 内是单调增加函数，在区间 $(-\infty,0)$ 内是单调减少函数，函数图形如图 1－11 所示.

3. 函数的奇偶性 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任一 $x\in D$，有

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立，则称函数 $f(x)$ 为偶函数. 如果对于任一 $x\in D$，有

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立,则称函数 $f(x)$为奇函数.

例如,函数 $f(x)=\cos x$,$g(x)=x^4+2x^2(x\in(-\infty,+\infty))$都为偶函数;函数 $f_1(x)=x^3(x\in(-\infty,+\infty))$,$f_2(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}(x\in(-1,1))$,$f_3(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)(x\in(-\infty,+\infty))$都为奇函数;函数 $f(x)=x+\cos x$ 为非奇非偶函数.

奇函数的图形关于坐标原点对称,而偶函数的图形关于 y 轴对称.

4. 函数的周期性　设函数 $f(x)$的定义域为 D,如果存在一个正数 l,使得对于任一 $x\in D$,有 $x\pm l\in D$,且

$$f(x\pm l)=f(x)$$

恒成立,则称函数 $f(x)$为周期函数,l 称为函数$f(x)$的周期.

通常我们说周期函数的周期是指最小正周期;对于周期函数,只要知道一个周期的图形,就可以知道全部图形. 如函数 $y=\cos x$ 的周期是 2π. 函数 $y=|\sin x|$的周期为 π,其图形如图 1－12 所示 .

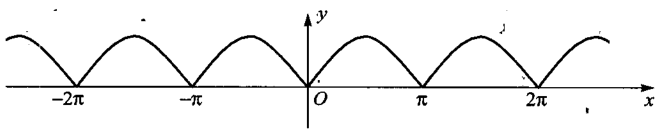


图 1－12

六、反函数

已知 y 是x 的函数$y=f(x)$,若将 y 当作自变量而将x 当作因变量,由此而确定的函数 $x=\varphi(y)$称为原函数 $y=f(x)$的反函数,相应地把原来的函数 $y=f(x)$称为直接函数. 函数 $y=f(x)$的反函数也可记作 $y=\varphi(x)$.

例如,函数 $y=2x+1$ 的反函数为 $x=\dfrac{y-1}{2}$,也可写为 $y=\dfrac{x-1}{2}$.

函数 $y=f(x)$与其反函数 $y=\varphi(x)$的图形关于 $y=x$ 对称,如图 1－13 所示.

可以证明:单调函数必有(单值)反函数,且单调增加(单调减少)函数的反函数也单调增加(单调减少),但单值函数的反函数不一定是单值函数. 如函数 $y=x^2$ 的反函数有两支 $y=\pm\sqrt{x}$.

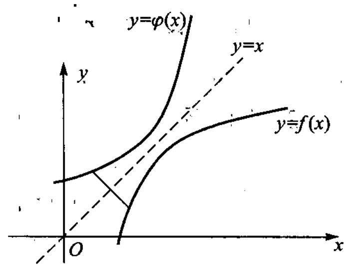


图 1－13

例 4　求函数 $y=\begin{cases}x^2, & -1\leqslant x<0\\ \ln x, & 0<x\leqslant 1\\ 2e^{x-1}, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ 的反函数.

解　当$-1\leqslant x<0$ 时,$y=x^2\in(0,1]$,反函数为

$x=-\sqrt{y}$,$y\in(0,1]$,即 $y=-\sqrt{x}$,$x\in(0,1]$.

当 $0<x\leqslant1$ 时,$y=\ln x\in(-\infty,0]$,反函数为

$$x=e^y,\ y\in(-\infty,0],\text{即 } y=e^x,\ x\in(-\infty,0].$$

当$1<x\leqslant2$ 时,$y=2e^{x-1}\in(2,2e]$,反函数为

$$x=1+\ln\frac{y}{2},\ y\in(2,2e],\text{即 } y=1+\ln\frac{x}{2},\ x\in(2,2e].$$

所以反函数为

$$y=\begin{cases}e^{x}, & x\in(-\infty,0],\\ -\sqrt{x}, & x\in(0,1],\\ 1+\ln\dfrac{x}{2}, & x\in(2,2e].\end{cases}$$

七、复合函数

复合函数是一个重要的概念,它是由较简单的函数合成的较复杂的函数. 如函数 $y=\cos x^3$ 可看作为函数 $y=\cos u$ 与函数 $u=x^3$ 的复合. 复合函数的概念可如下表述:

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1,函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D_2 及值域为 W_2,且 $W_2\subset D_1$,则对任一 $x\in D_2$ 有确定 y 与之对应,称函数 $y=f(g(x))$ 为函数 $y=f(u)$ 及 $u=g(x)$ 的复合函数,u 称为中间变量.

如函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=1-x^2$ 的复合函数为 $y=\sqrt{1-x^2}$.

这里要注意的是函数 $u=g(x)$ 的值域与函数 $y=f(u)$ 的定义域的交集非空,因此并非任两个函数都可复合. 如函数 $y=\arcsin u$ 和函数 $u=2+x^2$ 就不能复合.

例 5 将函数 $y=e^{\cos^2\frac{1}{x}}$ 拆开成几个简单函数的复合.

解 函数 $y=e^{\cos^2\frac{1}{x}}$ 可拆成

$$y=e^u,u=v^2,v=\cos w,w=\frac{1}{x}$$

这样几个简单函数的复合.

八、初等函数

高等数学研究的函数主要是初等函数,那么什么是初等函数? 首先我们回顾一下在初等数学中已经讲过的几类函数:

1. 幂函数 $y=x^\mu$(μ 为常数).

这里注意,幂函数的定义域与常数 μ 有关,如图 1-14 所示.

例如,函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$;函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 及 $y=x^{\frac{3}{4}}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$;而函数 $y=x^{-\frac{1}{2}}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

2. 指数函数 $y=a^x$ $(a>0,a\neq1)$

指数函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,其图形总在 x 轴上方,且过点 $(0,1)$. 当 $a>1$ 时,$y=a^x$ 是单调增加的;当 $0<a<1$ 时,$y=a^x$ 是单调减少的;当 $a=e$ 时,指数函数为 $y=e^x$,这是以后经常遇到的指数函数. 指数函数图形如图 1-15 所示.

3. 对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$

对数函数的定义域为 $(0,+\infty)$,由前面反函数的概念知:函数 $y=a^x$ 的图形和函数 $y=\log_a x$ 的图形是关于 $y=x$ 对称的,由此,不难得函数 $y=\log_a x$ 的图形总在 y 轴右方,且过点 $(1,0)$. 当 $a>1$ 时,函数 $y=\log_a x$ 单调递增,且在开区间 $(0,1)$ 内为负,在开区间 $(1,+\infty)$ 内为正;当 $0<a<1$ 时,函数 $y=\log_a x$ 单调递减,且在开区间 $(0,1)$ 内为正,在开区间 $(1,+\infty)$ 内为负. 特别当 $a=10$ 时,对数函数记为 $y=\lg x$;当 $a=e$ 时,对数函数记为 $y=\ln x$,函数 $y=\ln x$ 称为自然对数,这也是以后经常遇到的对数函数. 对数函数图形如图1-16所示.

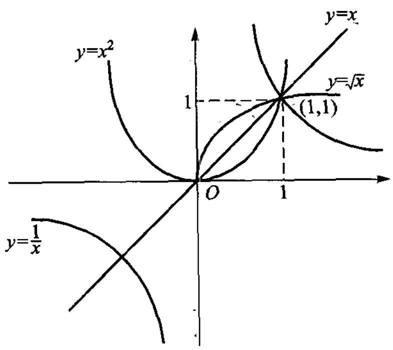


图 1-14

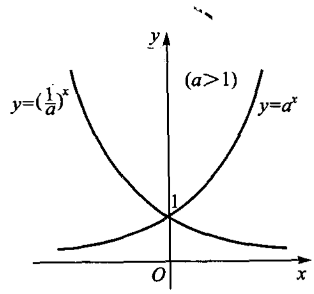


图 1-15

4. 三角函数

常用的三角函数有:

正弦函数: $y=\sin x$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

余弦函数: $y=\cos x$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

正切函数: $y=\tan x$, $x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$;

余切函数: $y=\cot x$, $x\neq n\pi$, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

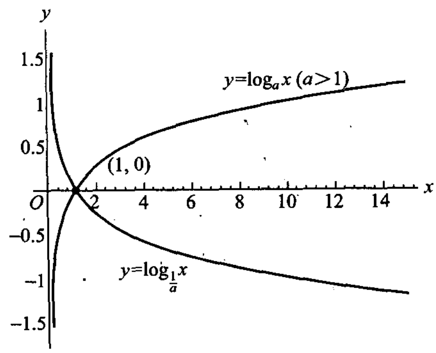


图 1-16

正弦函数和余弦函数都是以 2π 为周期的周期函数,正切函数和余切函数都是以 π 为周期的周期函数. 正弦函数、正切函数、余切函数都是奇函数,余弦函数为偶函数;另外还有两个三角函数:正割函数 $y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$ 和余割函数 $y=\csc x=\frac{1}{\sin x}$. 三角函数图形如图 1-17 所示.

5. 反三角函数 反三角函数是三角函数的反函数,它们分别为:

反正弦函数: $y=\mathrm{Arcsin}\ x$, $x\in[-1,1]$;

反余弦函数: $y=\mathrm{Arccos}\ x$, $x\in[-1,1]$;

反正切函数: $y=\mathrm{Arctan}\ x$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

反余切函数: $y=\mathrm{Arccot}\ x$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

显然反三角函数都是多值函数,但我们可选取其一个单值分支,叫做主值,选法如下:

将函数 $y=\mathrm{Arcsin}\ x$ 的值域限制在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上,得一单值函数,记为函数 $y=\arcsin x$,它就是所取的主值函数,闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 叫做主值区间,显然 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$.

同理,将函数 $y=\mathrm{Arccos}\ x$ 的值域限制在闭区间 $[0,\pi]$ 上,得函数 $y=\arccos x$;将函数

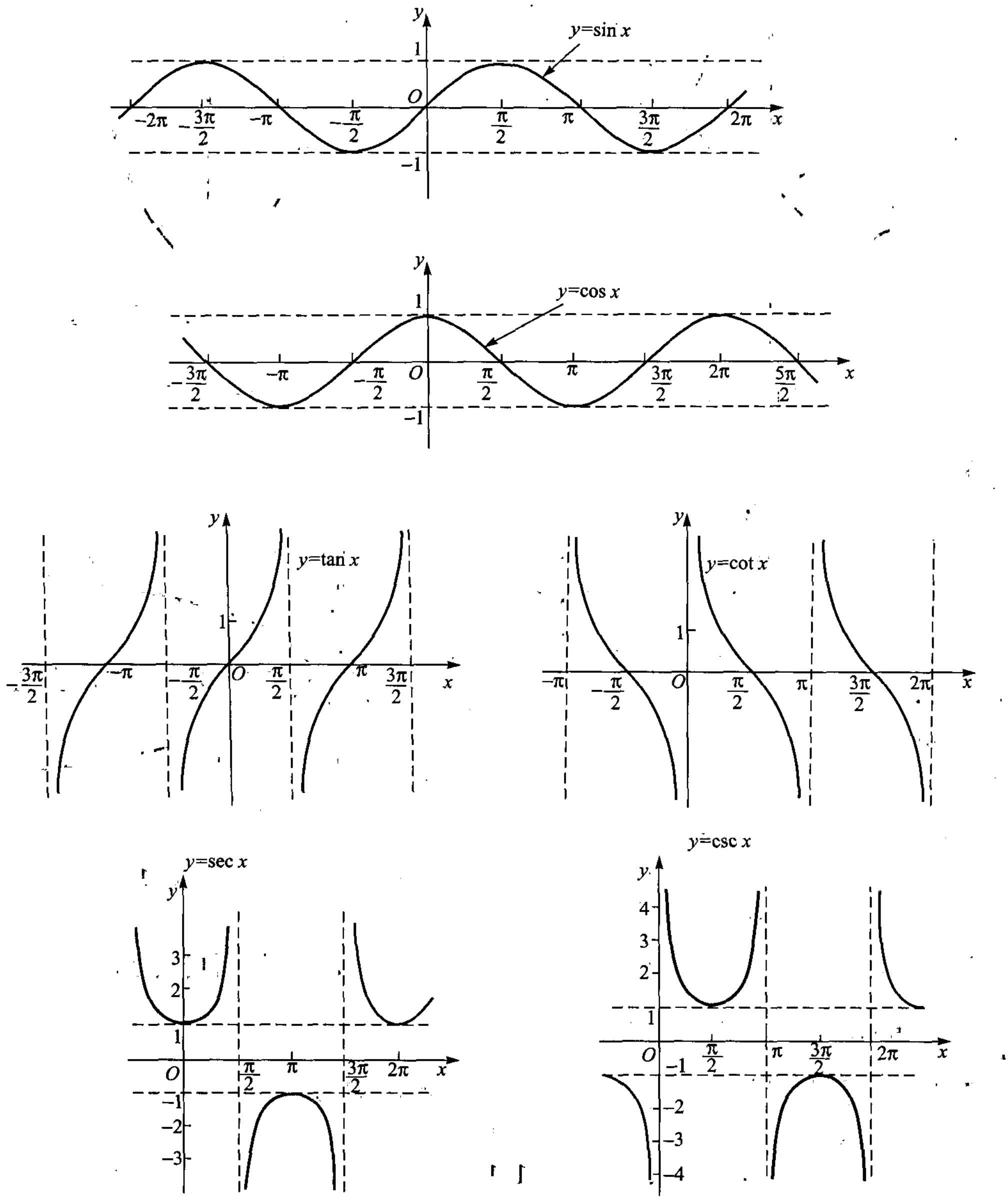


图 1－17

$y=\text{Arctan}\ x$ 的值域限制在开区间$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$内，得函数 $y=\arctan\ x$；将函数 $y=\text{Arccot}\ x$ 的值域限制在开区间$(0,\pi)$内，得函数 $y=\text{arccot}\ x$.

反三角函数图形如图 1－18 所示.

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**.

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

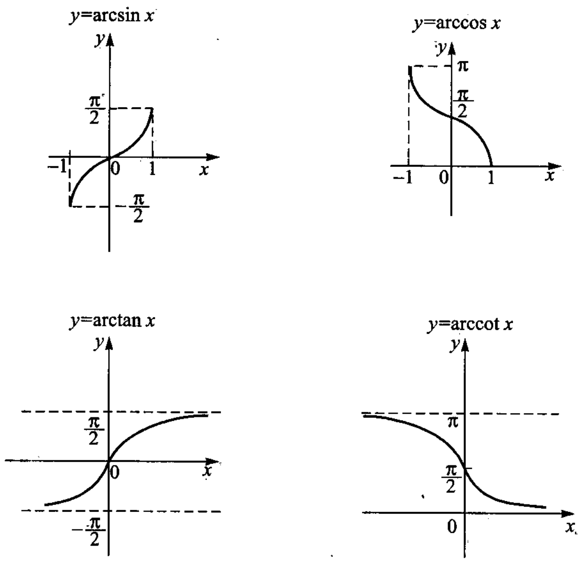


图 1－18

例如，函数 $y=\sqrt{4-x^2}$，$y=\dfrac{\sin^2 x+x^3}{(1+x^2)^2}$，$y=\sqrt[3]{\tan\left(2+\dfrac{x^2}{3}\right)}$ 等都是初等函数. 但要注意，并不是所有的函数都是初等函数，如分段函数一般不是初等函数，它是由初等函数分段给出的. 又如，$y=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots$ 是有无穷多项相加，也不是初等函数.

在工程技术等应用中，常会遇到由指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 和 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 所产生的双曲函数，其定义如下：

双曲正弦函数　$y=\operatorname{sh} x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$；

双曲余弦函数　$y=\operatorname{ch} x=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$；

双曲正切函数　$y=\operatorname{th} x=\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$.

根据双曲函数的定义，可以得到同三角函数类似的性质和公式. 例如

$$\operatorname{sh}(x\pm y)=\operatorname{sh} x\operatorname{ch} y\pm\operatorname{ch} x\operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1,$$
$$\operatorname{sh} 2x=2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x.$$

例 6　设函数 $f(x)$ 为定义在开区间 $(-l,l)$ 内的奇函数，若函数 $f(x)$ 在开区间 $(0,l)$ 内单调增加，证明函数 $f(x)$ 在开区间 $(-l,0)$ 内也单调增加.

证明　任取 $x_1,x_2\in(-l,0)$，且 $x_2>x_1$，则

$$-x_1,-x_2\in(0,l)，且 -x_2<-x_1.$$

由于函数 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 内是奇函数，且在 $(0,l)$ 内单调增加，因此

$$f(x_2)-f(x_1)=-f(-x_2)+f(-x_1)=f(-x_1)-f(-x_2)>0,$$