

73.463
Z/W

73.463
Z/W

雷达系统分析

北京航空学院

张有为 李少洪 编著

国防工业出版社

雷达系统分析

北京航空学院

张有为 李少洪 编著

国防工业出版社

内 容 简 介

本书论述了雷达系统理论分析中一些较有普遍意义的问题。全书共九章，可划分为四个部分。第一部分论述了检测与估计理论、目标参量估计、模糊函数与雷达分辨力；第二部分论述了杂波与MTI滤波、脉冲多卜勒雷达；第三部分论述了角度、距离与多卜勒频率跟踪系统的分析方法；第四部分说明了雷达与武器系统的关系。本书从理论上回答了雷达提取目标信息的性能限制及一些优化的途径，从而为实践提供了理论依据。

本书可作雷达专业高年级大学生和研究生教材，亦可供有关专业的科技工作者参考。

雷 达 系 统 分 析

北京航空学院

张有为 李少洪 编著

*

国防工业出版社 出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092¹/₁₆ 印张20³/₈ 471千字

1981年7月第一版 1981年7月第一次印刷 印数：0,001—2,800册

统一书号：15034·2190 定价：2.10元

前 言

《雷达系统分析》是高等学校工科电子类雷达专业统编教材之一。它是一本理论分析性教材，供高年级大学生使用，可兼做研究生教材，同时可供从事雷达专业的科技工作者进修与参考。

应用雷达的目的是为了获取有关目标的信息。目标的信息实际上已经被调制在目标的回波信号中了。而人们对目标的认识如何，也就是能提取有关目标信息的数量如何，取决于雷达对回波信号的过滤情况。由于回波信号的过滤是在噪声、杂波和干扰的环境中进行的，因此这种过滤是极其复杂的。早期的雷达从回波信号中所提取的信息是极有限的，随着雷达理论的发展和工业的现代化，今日雷达所能提取的目标信息早已超出了“雷达”这个术语的含义。从信息提取的观点来看，无疑，雷达就是一个“超级”滤波器了。

人们总是企图通过雷达的过滤获得更多更准确的信息。然而这种更多、更准确并不具有无限的含义，在理论和实践中都能证明它是有限的。一个雷达科技工作者应当懂得这种限制是什么？只有这样才能知道我们的设计是否达到了最佳，现实与最佳还有多大的差距，是否还有为缩小这种差距而奋斗的价值？

一连串的具体问题马上就会提出来了。雷达发现信号的能力限制是什么，达到最佳了吗？雷达测量的精度限制是什么，达到最佳了吗？雷达分辨多个目标的能力如何，怎样提高雷达分辨力？我们能从已知的目标参量预测目标的未来吗？雷达的滤波特性设计成什么样的形式，才能最佳地从地物杂波干扰中提取特定目标的信息呢？当目标回波、杂波与干扰都挤到雷达这个“超级”滤波器的“大门口”时，我们应当把“门”开多大才能最大限度的复现回波信号，同时又最大限度地抑制干扰呢？也就是说系统的带宽应如何选择。开环系统有这个问题，跟踪系统也有这个问题。雷达的目标信息被调制在回波信号上了，那么雷达回波波形的每个部分（例如，钟形脉冲波形的顶部和上升沿及下降沿部分）所含的信息量相同吗？为了提取更多、更准确的信息，我们的滤波特性又应当怎样加权呢？要回答上述问题中的任何一个都不能只凭感性的认识，必须从理论上进行分析，以期得到更准确更有把握的回答。

实践给理论提出的问题是太多了。虽然雷达对目标信息过滤的能力终将是有限的，但是摆在我们面前的雷达理论问题，还没有人能够望到它的尽头。本书也只能粗浅地论述几个比较有普遍意义的问题，作为入门，引导读者去进行更多的研究。

本书共分九章，可归纳为四个部分。第一部分由前三章组成，论述了检测与估计理论、目标参量估计、模糊函数与雷达分辨力；第二部分由第四、五章组成，进行了杂波与MTI滤波及脉冲多卜勒雷达分析；第三部分由第六、七、八章组成，进行了角度、距离和多卜勒频率跟踪系统分析；第四部分由第九章组成，说明了雷达与武器系统的关系。在内容上虽然各章有内在的联系，但为讲授与阅读方便起见，每个部分都有较强的独立性，可

单独讲授。编者认为，在所有章节中，由第一、二、三章组成的第一部分内容，是最基本的部分，应当优先讲授。学生在阅读本书时应先修《统计无线电技术》和《系统与控制》两门课程。本书的作用之一是将统计理论与系统理论的观点应用于雷达系统的分析之中，这种综合的训练，无疑对学生是很有益处的。

中国电子学会雷达学会副主任委员柯有安同志（北京工业学院）担任了主审本书的工作。从拟定编写大纲开始，直到对初稿和修改稿的审阅过程中都对编者有极大的帮助。他对一些基本问题的见解，对编者的思想有积极的影响。朱正中（清华大学）、黄振兴（成都电讯工程学院）、潘志恒（上海交通大学）、王启才（华东工程学院）等同志对本书初稿提出了宝贵的修改意见和建议。在此仅表谢意。

本书第一、二、三、六、九章由张有为编写，第四、五、七、八章由李少洪编写。书稿虽几经修改，仍不免有缺点与错误，欢迎读者批评指正。

编 者

一九七九年十二月

目 录

第一章 检测与估计理论	1
§ 1.1 经典检测理论	1
1.1.1 检测问题	1
1.1.2 简单的双择假设检验	3
1.1.3 似然比检验的性能	15
1.1.4 M 择假设检验	21
1.1.5 复合假设检验	24
1.1.6 序贯检测	26
1.1.7 小结	30
§ 1.2 经典估计理论	31
1.2.1 估计问题	31
1.2.2 估计的描述	33
1.2.3 随机参量估计	35
1.2.4 非随机参量估计	40
1.2.5 多参量估计	46
1.2.6 小结	50
第二章 目标参量估计	52
§ 2.1 概述	53
2.1.1 目标信息	53
2.1.2 目标参量估计	55
§ 2.2 目标距离和速度估计	59
2.2.1 信号、系统与过程的复数描述	59
2.2.2 目标模型	67
2.2.3 目标距离与速度估计	73
§ 2.3 目标角度估计	78
2.3.1 似然函数	78
2.3.2 最大似然估计与伪重心估计	81
§ 2.4 目标状态估计	86
2.4.1 卡尔曼滤波器	87
2.4.2 边搜索-边跟踪雷达观测数据的卡尔曼滤波	94
第三章 模糊函数与雷达分辨力	106
§ 3.1 模糊函数	106
3.1.1 模糊函数的定义及其与目标环境图的匹配	106
3.1.2 模糊函数的性质	109
3.1.3 典型信号模糊函数	116
3.1.4 模糊函数的物理意义及信号处理	122
§ 3.2 雷达分辨力	126
3.2.1 距离分辨力	126
3.2.2 速度分辨力	128
3.2.3 距离、速度联合分辨力	129

3.2.4	角度分辨力	131
3.2.5	联合分辨力	134
第四章 杂波和 MTI 滤波		139
§ 4.1	雷达目标、杂乱回波和噪声的频谱	139
4.1.1	理想相干脉冲雷达的发射谱	139
4.1.2	雷达回波的频谱	142
4.1.3	影响目标和杂波谱瓣形状的因素分析	143
4.1.4	MTI 滤波前的视频谱	148
§ 4.2	雷达滤波器的种类和性能分析	150
4.2.1	雷达滤波器的分类和功能	150
4.2.2	MTI 滤波器	151
4.2.3	接收系统非线性对 MTI 性能的影响	158
4.2.4	雷达反馈滤波器	160
§ 4.3	雷达滤波器的分析	164
4.3.1	分析雷达滤波器的工具——Z 变换	164
4.3.2	分析举例	166
4.3.3	基本延时线滤波器单元及滤波器的综合	170
§ 4.4	MTI 技术发展的几个方面	173
4.4.1	数字式动目标显示 (DMTI)	173
4.4.2	自适应 MTI	178
4.4.3	动目标检测器 (MTD)	180
第五章 脉冲多卜勒雷达分析		183
§ 5.1	脉冲多卜勒杂波分析 (以机载为例)	184
5.1.1	杂波干扰的来源	184
5.1.2	杂波的数学模型	185
5.1.3	杂波重叠现象	195
§ 5.2	脉冲多卜勒杂波的滤波	196
5.2.1	单边带滤波器	196
5.2.2	主瓣杂波抑制滤波器	197
5.2.3	高度线杂波的滤波	198
5.2.4	多卜勒滤波器组	198
§ 5.3	脉冲重复频率 (PRF) 的选择和模糊问题	200
5.3.1	高脉冲重复频率	200
5.3.2	中脉冲重复频率	205
§ 5.4	脉冲多卜勒雷达的距离性能分析	207
5.4.1	距离方程	207
5.4.2	脉冲多卜勒雷达的平均距离性能	209
第六章 角度跟踪系统分析		215
§ 6.1	干扰通过系统的描述	215
6.1.1	系统误差传递函数与误差系数	215
6.1.2	干扰信号通过系统	217
§ 6.2	系统对目标运动的响应	220
6.2.1	目标机动飞行引起的角误差	220
6.2.2	通过路线及其引起的角误差几何分量	222
§ 6.3	系统对目标噪声的响应	224
6.3.1	系统对目标噪声的响应	224

6.3.2	AGC 对幅度噪声的影响	226
§ 6.4	系统对接收机噪声的响应	229
6.4.1	圆锥扫描系统对接收机噪声的响应	229
6.4.2	单脉冲系统对接收机噪声的响应	231
§ 6.5	系统最佳带宽选择	232
6.5.1	伺服误差系数的近似求解法	232
6.5.2	系统带宽的选择	234
§ 6.6	方位通道与俯仰通道的交链影响	238
6.6.1	相移对方位与俯仰通道的交链影响	238
6.6.2	引起相移的实际因素	242
§ 6.7	运载雷达的天线稳定	243
6.7.1	空载雷达天线的稳定问题	243
6.7.2	搜索状态天线稳定	244
6.7.3	跟踪状态天线稳定	246
§ 6.8	高角速度跟踪中的再生反馈	251
6.8.1	再生反馈	251
6.8.2	进行坐标变换与交流变换的必要性	253

第七章 距离跟踪系统分析

§ 7.1	最佳时间鉴别器	257
7.1.1	时间鉴别器的数学模型	257
7.1.2	最佳门函数	258
7.1.3	几种信号的最佳波门	261
§ 7.2	距离跟踪系统误差分析	262
7.2.1	测距的理论误差	262
7.2.2	距离跟踪器对热噪声的响应	263
7.2.3	距离跟踪器对目标噪声的响应	265
7.2.4	距离跟踪器对目标运动的响应和最佳噪声通带	265
7.2.5	距离跟踪系统误差源及其分类	268

第八章 多卜勒频率跟踪系统分析

§ 8.1	多卜勒跟踪技术说明	269
8.1.1	连续波系统	270
8.1.2	非相干脉冲系统	270
8.1.3	相干脉冲系统	271
8.1.4	四维分辨系统	272
§ 8.2	频率跟踪环路的分类	274
8.2.1	锁频式频率跟踪器	274
8.2.2	锁相式频率跟踪器	275
8.2.3	两种系统的比较	276
§ 8.3	多卜勒频率测量系统的性能和噪声误差	277
8.3.1	频率估计器模型	277
8.3.2	频率估计器的性能指标	280
8.3.3	噪声误差的表示式	281
8.3.4	分析计算举例	282
§ 8.4	多卜勒频率跟踪系统误差分析	287
8.4.1	雷达引起的跟踪误差	288
8.4.2	转换误差	290

8.4.3 目标引起的误差	290
第九章 雷达与武器系统	294
§ 9.1 防御雷达与防御系统	294
9.1.1 防御系统概述	294
9.1.2 目标判别、识别与拦截	299
§ 9.2 空载火控雷达与武器系统	304
9.2.1 空载截击系统	304
9.2.2 航向导引阶段	305
9.2.3 跟踪阶段	308
名词索引	311
符号表	315

第一章 检测与估计理论

随机量是雷达中存在的一种基本现象, 不仅噪声和杂乱回波是随机的, 而且雷达回波信号本身通常也具有不规则的特点, 也是随机的。显然, 在噪声与干扰背景上发现信号与测定目标的参量, 都是统计学的问题。统计学的问题可以分为两个方面来研究, 即研究随机量的统计规则性与统计推断。

随机量的个别观察结果总是呈现为不规则的行为, 而对它的长时间观察的平均结果却表现出显著的规则性。作为呈现统计规则性现象而存在的数学模型, 就是概率论与随机过程理论。这是本书的读者应该熟悉的内容。

统计推断对研究雷达理论问题来说有两种实际意义。其一是在有限的观察时间内, 从接收机所取得的波形样本中, 推断波形中有无目标回波信号存在, 这就是本章将要介绍的统计检测理论; 其二是推断目标的未知参量, 这就是将要介绍的估计理论。

本章在讨论检测理论与估计理论时, 将偏重于基本理论问题的讨论, 虽然也举一些例子, 但都是为了使读者进一步掌握理论方法的, 具体的应用是本书后面几章的任务。虽然在本章中较少涉及用统计学的方法解决雷达问题的具体实例, 但是读者应当知道: 统计学的数学方法是进行雷达理论问题研究的重要支柱。

§ 1.1 经典检测理论

1.1.1 检测问题

概述 对于雷达信号检测理论的研究始于本世纪四十年代初期, 到目前为止, 几乎花费了一代人的心血。1941~1942年维纳 (N. Wiener) 和柯罗莫格洛夫 (A. H. Колмогоров) 建立了最佳线性滤波理论^{[1]、[2]}, 通称为维纳滤波理论。从最小误差均方准则出发[●], 得出了最佳线性滤波器的传递函数。由于消息上混杂了噪声, 于是设想用一个算子作用于被混杂了的消息上, 以恢复出原来的消息。这个算子的最佳设计取决于消息和噪声各自以及联合的统计特性。这样, 就把在滤波器设计中原来的经验性和偶然性的过程, 代之以科学判断的过程。使统计学成为有力的科学工具。在雷达技术发展的推动下, 1943年诺尔泽 (D. O. North) 在研究提高雷达检测能力时, 从最大信号噪声比准则 (输出信号瞬时功率与噪声平均功率之比为最大) 出发, 建立了匹配滤波器理论^[3], 得出了在白噪声情形下最佳匹配滤波器的频率特性应为信号频谱的复共轭的结论。这个概念至今仍为人们所应用。二次世界大战中, 维纳、柯罗莫格洛夫、诺尔泽的研究成果是人们在同噪声干扰进行斗争中总结出来的, 这些方法在实质上都是有意识地利用信号与噪声的统计特性, 尽可能地抑制噪声, 从而提取信号。

● 人们习惯于把“误差的均方”称为“均方误差”, 这是很不确切的。为了避免概念的含混不清, 我们采用“误差均方”一语。

战后, 1946~1948 年香农 (C. E. Shannon) 和卡切尼柯夫 (B. A. Котельников) 分别建立了基础信息论^[4]和潜在抗干扰性理论^[5], 为深入的研究工作打下了基础。卡切尼柯夫从最大后验概率准则 (错误判断的概率最小正确检测的概率最大) 出发, 提出了理想接收机的概念。这样便可将实际接收机与理想接收机相比较, 进而找出可挖掘的潜力。1950 年伍德沃尔德 (P. M. Woodward) 开始把信息量的概念用于雷达信号检测中来, 提出了一系列综合最佳雷达系统的新概念^[6]。他告诉我们, 理想接收机应该能从信号与噪声的混杂波形中, 提取最多的有用信息。为此, 仅仅确知后验概率的分布, 就能够由这个分布得知从接收到的波形中所能得到的关于有用信号的全部信息, 更多的东西不可能再得到了。所以理想的接收机应当是一个计算后验概率的装置, 而不附有判决装置, 否则将会损失信息, 因而也不适宜在实际系统中应用。而那种认为输出端信号噪声比最大便可保证提取最多有用信息的论断也是不全面的。因为, 为了评价系统抗干扰能力, 不应局限于像信号噪声比这样只要求谱密度就足够的准则, 而应当利用信号与噪声混杂波形中更精细的统计结构, 即多维概率分布。

五十年代初, 人们开始用数理统计的方法处理信号的检测问题, 逐步形成了信号的统计检测理论。从统计学的观点来看, 可以把从噪声背景中接收信号的过程, 看作一个统计推断的过程, 即用统计的方法, 做出信号存在与否的推断, 并对信号的参量进行估计。检测信号是否存在属于统计假设检验方面的问题; 测量信号的未知参量属于参量估计方面的问题。信号总是含有参量的, 如果信号的所有参量都已知, 则该信号称为已知信号, 但这在实际中是比较少见的; 通常的信号总有未知的非随机参量, 称为未知非随机参量信号, 这在常规雷达中是最常见的。另一类信号的参量在观察过程中是随机的, 称为随机参量信号, 这在射电天文、消极声纳中是常见的。从 1953 年起, 人们开始将统计假设检验、统计推断等统计学的数学方法用于信号检测与估计问题, 并建立了一整套的统计检测理论^{[7]、[8]}。本书就准备从这个起点开始研究检测的基本理论。关于统计学的数学方法可参看文献[9]。

假设检验 信号的检测相当于统计假设检验中的假设的检验^{[7]、[8]}。假设与检验是统计学的术语^[9], 就我们对于信号的研究而言, 检验就是检测系统所作的推断过程, 而假设则是所要检验的对象的可能的情况或状态。如果只有两种可能的假设, 则这种检测就称为简单的双择检测。这时只有零假设 H_0 和备选假设 H_1 。 H_0 可以表示雷达回波中无信号的情况, H_1 则可代表有信号的情况。这时信号检测就成为相对于零假设 H_0 来检测与之不相容的备选假设 H_1 。对于复合双择检测来说, 信号参量 A 不只有一个非零值, 而是可能有若干个非零值 $a_1, a_2, \dots, a_{M-1}$, 因而信号的检测问题变成了相对于零假设 $H_0 (a=0)$ 检验与之不相容的假设 H_1 , 即检测 M 个可能值中的任意一个 $a=a_i$ 。这时 H_1 称为复合假设。当需要进一步确定 $M-1$ 个非零值中出现哪一个时, 问题便成为检验 M 个假设: $H_0 (a=0), H_1 (a=a_1), \dots, H_{M-1} (a=a_{M-1})$ 。这时 H_0 与 $M-1$ 个与之不相容的非零假设 ($H_1, \dots, H_{M-1}$) 相对立。这种情形属于检测有无信号存在及识别 $M-1$ 个非零值中哪一个存在的情况, 称为 M 择检测。

检测模型 在检测问题的研究展开之前, 我们先介绍一下检测的术语和检测的模型。简单双择检测的理论模型由图 1.1 构成。给定的检测问题中的每个假设都起因于源, 这个源

产生一个输出, 在最简单的情况下, 这个输出是两种选择之一。这种可能的选择称为假设, 记为 H_0 和 H_1 。对于更一般的情况, 源的输出为 M 个假设之一, 记为 $H_0, H_1, \dots, H_{M-1}$ 。应当指出, 我们是不能直接观测假设的, 否则就不会有判决问题了。概率转移机构的作用可能是将假设从观测中“分离”出来。

它可以依照某一概率的规律产生出在观测空间中的一个点或一些点。我们可以通过观测空间和依据判决规则作出接受哪一个假设的判决。

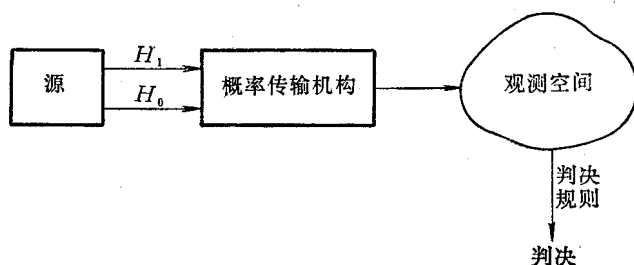


图 1.1 检测理论模型

这种判决是以各个假设的验前概率知识和概率转移机构所固有的条件概率知识为基础的。如果 H_0 发生的验前概率为 P_0 , H_1 发生的验前概率为 P_1 , 由于假设 H_0 与 H_1 中必有一个为真, 则 $P_0 + P_1 = 1$ 。

在简单的双择检测问题中, 可能出现两类错误: 当 H_0 不真时, 判决为 H_0 ; 当 H_1 不真时, 判决为 H_1 。在雷达问题中, H_0 对应为没有目标, H_1 对应为目标的出现。当 H_0 不真时判决为 H_0 称为“漏警”; 当 H_1 不真时判决为 H_1 称为“虚警”。与之对应的概率称为漏警概率 P_M 和虚警概率 P_F 。而发现概率为 $P_D = 1 - P_M$ 。

由检测模型中引出的概念可用图 1.2 进一步来说明。设存在有一个单次观测为 r 。在假设 H_0 的条件下, 概率密度函数为 $p_{r|H}(R|H_0)$; 在假设 H_1 的条件下, 概率密度函数为 $p_{r|H}(R|H_1)$ 。这时检测理论问题的目的便是从两个概率密度函数 $p_{r|H}(R|H_0)$ 和 $p_{r|H}(R|H_1)$

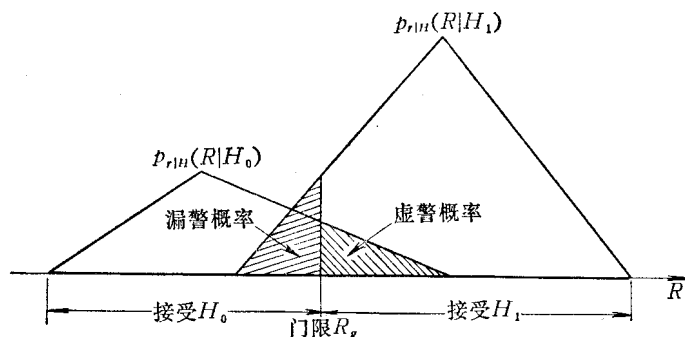


图 1.2 漏警与虚警概率密度

中判决一个, 作为最能代表给定母体的密度。假定门限为 $R = R_g$, 如果单次观测 $r = R_1$ 大于 R_g , 我们就判定为 H_1 ; 如果小于 R_g , 则判定为 H_0 。当然, 在多数实际场合, 是把 R 定义为充分统计量的, 而由多次观测来构成。但观测次数在我们的讨论中还是有限的, 即观测将由一组为 N 的数构成,

可以用 N 维空间中的一个点来描述。这也就限定了我们的讨论在有限维的观测空间中进行。

1.1.2 简单的双择假设检验

关于简单的双择检测问题, 我们准备分两步来讨论。首先介绍在单次观测情况下的简单双择检测, 而后将这种讨论推广至多次观测的情形。由于单次观测情况下的检测理论大家较熟悉, 这里就讨论的简单些, 仅以此做为对多次观测情况下检测理论研究的入门。在本节的讨论过程中, 我们将会提出不同的检测准则。虽然不同的检测准则引入有它不同的

出发点,但是它们所构造的最佳接收机的结构却没有不同,都是似然比检验装置,只是不同的准则对应不同的门限装置。因此,本节的注意力将集中于似然比检验上。

单次观测的检测 在 1.1.1 节中我们曾提出了漏警概率和虚警概率,我们就由此开始单次观测情况下检测理论的讨论。由图 1.2 可以写出漏警概率和虚警概率的表达式

$$P_M = \int_{-\infty}^{R_g} p_{r|H}(R|H_1) dR \quad (1.1)$$

$$P_F = \int_{R_g}^{\infty} p_{r|H}(R|H_0) dR \quad (1.2)$$

对于雷达检测来说,一般是不把由于漏警和虚警所造成的错误等同看待的,虽然漏报或虚报一个目标所造成的危害是很难确切地估价的。但是在假设 H_1 (即有目标存在) 非常难得发生的情况下,两类错误中最重要的错误应当是虚警。当然若不惜虚警概率变大,可以使漏警概率如所希望的那样小。在实际中,都是固定虚警概率 P_F , 选择门限 R_g , 使漏警概率 P_M 达到最小。在允许一定的虚警概率 (其所造成的损失是观测者所能承担得起的) 条件下,使正确检测的概率 (发现概率) 为最大值 (或使漏警概率为最小值) 的检验准则就是奈曼-皮尔逊 (Neyman-Pearson) 准则。但是应注意,对于单次测量这种特殊情况来说,奈曼-皮尔逊准则是没有什么意义的,因为这时固定虚警概率就固定了门限,因而也就固定了漏警概率。但是在实际场合是完全有可能获得多次观测的,因而有充分的可能使用拉格朗日 (Lagrange) 乘子法来约束虚警概率,而无须同时固定漏警概率。则我们可以要求下式达到极小

$$J_{NP} = P_M + \lambda [P_F - \alpha] \quad (1.3)$$

式中 λ 是拉格朗日乘子, α 为所期望的虚警概率。将式 (1.1)、(1.2) 代入到 (1.3)

$$J_{NP} = \int_{-\infty}^{R_g} p_{r|H}(R|H_1) dR + \lambda \left[\int_{R_g}^{\infty} p_{r|H}(R|H_0) dR - \alpha \right] \quad (1.4)$$

令 J_{NP} 对 R_g 的导数为零, 得到

$$p_{r|H}(R_g|H_1) - \lambda [p_{r|H}(R_g|H_0)] = 0 \quad (1.5)$$

这样,对于观测 $r = R$ 就得到似然比检验

$$\frac{p_{r|H}(R|H_1)}{p_{r|H}(R|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda \quad (1.6)$$

等式左端的分式称为似然比,记为 $\mathcal{L}(R)$ 。若似然比 $\mathcal{L}(R) > \lambda$, 就接受 H_1 ; 若 $\mathcal{L}(R) < \lambda$, 就接受 H_0 。等式右端的拉格朗日乘子便是门限,可以调整 λ 使得 $P_F = \alpha$, 因此 λ 是下式的解:

$$P_F = \int_{\lambda}^{\infty} p_{\mathcal{L}|H}(\mathcal{L}|H_0) d\mathcal{L} = \alpha \quad (1.7)$$

式中 $p_{\mathcal{L}|H}(\mathcal{L}|H_0)$ 为当 H_0 为真时 $\mathcal{L}(R)$ 的密度函数。由于对于负的 λ 值, $p_{\mathcal{L}|H}(\mathcal{L}|H_0)$ 为零,所以由式 (1.7) 给出的 λ 是非负的。

双择假设检验的根本问题就是推断 H_0 或 H_1 哪个为真。因此必须选定一种准则来处理以下四种情况:

(1) H_0 为真, 接受 H_0 ;

(2) H_0 为真, 接受 H_1 ;

(3) H_1 为真, 接受 H_1 ;

(4) H_1 为真, 接受 H_0 。

第一、三种情况双择 (H_0, H_1) 决一的结果是正确的; 第二、四种情况双择决一的结果是错误的。判决准则的作用就是赋予四种情况中的每种情况一个附加的权因子。对于雷达检测来说, 这个权因子就是代价因子。可以设想, 正确检测的代价因子应该比错误检测的代价因子小, 这是符合实际情况的。可见, 权因子的作用是不把四种可能的情况等同来看待。

通常我们把由于错误检测所造成的损失叫做风险, 衡量这种风险常采用贝叶斯(Bayes)准则。贝叶斯准则就是使平均风险达到最小的准则。贝叶斯检验基于两个约定, 一是源的输出受验前概率 P_0 和 P_1 的控制, 二是赋予每种可能的情况一个代价因子, 分别记为 C_{00} 、 C_{10} 、 C_{11} 、 C_{01} 。则贝叶斯风险为四种可能情况的代价的期望值, 记为

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = & C_{00}P(\text{接受 } H_0, H_0 \text{ 真}) + C_{01}P(\text{接受 } H_0, H_1 \text{ 真}) \\ & + C_{10}P(\text{接受 } H_1, H_0 \text{ 真}) + C_{11}P(\text{接受 } H_1, H_1 \text{ 真}) \end{aligned} \quad (1.8)$$

依据条件概率的定律 $P(A, B) = P(A|B)P(B)$ 可以将此式改写为

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = & C_{00}P_0P(\text{接受 } H_0|H_0 \text{ 真}) + C_{01}P_1P(\text{接受 } H_0|H_1 \text{ 真}) \\ & + C_{10}P_0P(\text{接受 } H_1|H_0 \text{ 真}) + C_{11}P_1P(\text{接受 } H_1|H_1 \text{ 真}) \end{aligned} \quad (1.9)$$

其中每项包含有三种因素, 例如第三项中 P_0 为 H_0 出现的先验概率, $P(\text{接受 } H_1|H_0 \text{ 真})$ 为将 H_0 视为 H_1 的概率, C_{10} 为这类错误的代价因子。若判决规则为简单的门限检验, 即若观测 $R > R_g$ 我们就接受 H_1 , 若 $R < R_g$ 我们就接受 H_0 , 则贝叶斯风险可进一步写为

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = & C_{00}P_0 \int_{-\infty}^{R_g} p_{r|H}(R|H_0) dR + C_{01}P_1 \int_{-\infty}^{R_g} p_{r|H}(R|H_1) dR \\ & + C_{10}P_0 \int_{R_g}^{\infty} p_{r|H}(R|H_0) dR + C_{11}P_1 \int_{R_g}^{\infty} p_{r|H}(R|H_1) dR \end{aligned} \quad (1.10)$$

显然, 错误判决的代价一定是高于正确判决的代价的, 即 $C_{10} > C_{00}$, $C_{01} > C_{11}$ 。自然所有的代价都是非负的意义也就隐含于其中了。又由于

$$\int_{-\infty}^{R_g} p_{r|H}(R|H_0) dR + \int_{R_g}^{\infty} p_{r|H}(R|H_0) dR = 1 \quad (1.11)$$

$$\int_{-\infty}^{R_g} p_{r|H}(R|H_1) dR + \int_{R_g}^{\infty} p_{r|H}(R|H_1) dR = 1 \quad (1.12)$$

则式 (1.10) 可写为

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = & C_{10}P_0 + C_{11}P_1 + \int_{-\infty}^{R_g} \{[(C_{00} - C_{10})P_0 p_{r|H}(R|H_0)] \\ & + [(C_{01} - C_{11})P_1 p_{r|H}(R|H_1)]\} dR \end{aligned} \quad (1.13)$$

由于贝叶斯准则是使平均风险最小的准则, 所以我们期望上式取值为最小。因为式中只有 R_g 是唯一可调整的参数, 所以只有式中的积分项的值可以改变。按照确定最佳门限的必要条件将 $\mathcal{R}$ 对 R_g 求导, 并令其为零, 最后得到

$$(C_{10} - C_{00})P_0 p_{r|H}(R_g|H_0) = (C_{01} - C_{11})P_1 p_{r|H}(R_g|H_1) \quad (1.14)$$

或记为

$$\frac{p_{r|H}(R_g|H_1)}{p_{r|H}(R_g|H_0)} = \frac{(C_{10} - C_{00})P_0}{(C_{01} - C_{11})P_1} \quad (1.15)$$

实际中, 观测值是可以小于门限的。若观测值小于门限, 则给定 H_0 的 r 的条件概率密度增大, 并且给定 H_1 的 r 的条件概率密度减小。因此比值 $p_{r|H}(R|H_1)/p_{r|H}(R|H_0)$ 将减小。同样观测值也是可以大于门限的, 最终将使上述比值增大。则式 (1.15) 将变为

$$\frac{p_{r|H}(R|H_1)}{p_{r|H}(R|H_0)} \geq \frac{H_1}{H_0} \frac{(C_{10} - C_{00})P_0}{(C_{01} - C_{11})P_1} \quad (1.16)$$

等式左端条件概率密度的比值称为似然比, 仍记为

$$\mathcal{L}(R) = \frac{p_{r|H}(R|H_1)}{p_{r|H}(R|H_0)} \quad (1.17)$$

式 (1.16) 的右端为检测的门限, 记为

$$\eta = \frac{(C_{10} - C_{00})P_0}{(C_{01} - C_{11})P_1} \quad (1.18)$$

这样, 贝叶斯准则导致了我们的似然比检验

$$\mathcal{L}(R) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \eta \quad (1.19)$$

通常对上式两边取自然对数是便于应用的

$$\ln \mathcal{L}(R) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \ln \eta \quad (1.20)$$

由于自然对数为单调函数, 并且式 (1.19) 两端均为正值, 因此上述取自然对数的运算是可行的。式中的门限是在假设验前概率和代价因子已知的情况下确定的。实际上, 代价因子与验前概率还是需要使用实际观测来不断调整予以更新的, 这就形成了自适应判决系统。当然, 单次观测是无法实现这种自适应判决的。

综上所述, 我们应用奈曼-皮尔逊准则和贝叶斯准则研究了单次观测的检测问题。我们可以看到似然比 $\mathcal{L}(R)$ 起了重要的作用。到目前为止, 几乎所有的假设检验的方法, 都可以用似然比检验来解决。

例 1 存在附加零均值高斯噪声时的恒定信号检测。在假设为 H_0 下, 没有信号; 在假设 H_1 下, 有一个振幅 $m > 0$ 的信号, 即

$$H_0: r = n \quad (1.21)$$

$$H_1: r = m + n \quad (1.22)$$

并且

$$p_n(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-R^2/2\sigma^2} \quad (1.23)$$

当我们检验高斯母体的均值是零还是 m 时, 上述表示的方式是很自然的。则似然比检验所需要的密度函数为

$$p_{r|H}(R|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-R^2/2\sigma^2} \quad (1.24)$$

$$p_{r|H}(R|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(R-m)^2/2\sigma^2} \quad (1.25)$$

似然比的自然对数为

$$\ln \mathcal{L}(R) = \frac{-(R-m)^2 + R^2}{2\sigma^2} = \frac{m(R-m/2)}{\sigma^2} \quad (1.26)$$

则似然比检验为

$$\frac{m(R-m/2)}{\sigma^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \ln \frac{(C_{10}-C_{00})P_0}{(C_{01}-C_{11})P_1} \quad (1.27)$$

或写为观测值 R 与门限比较的形式

$$R \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{m}{2} + \frac{\sigma^2}{m} \ln \frac{(C_{10}-C_{00})P_0}{(C_{01}-C_{11})P_1} = R_g \quad (1.28)$$

关于单次观测的检测问题就讨论到这里, 下边转入对多次观测检测的研究。

多次观测的检测 实际中, 对于多数检测问题来说, 单次观测是不能产生一个足够低的极小贝叶斯风险的, 这就必须进行多次观测。对于多次观测来说, 观测空间对应于一组 N 个观测: $r_1, r_2, \dots, r_N$ 。因此, 每组观测可以用矢量 $\mathbf{r}$ 来表示

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

它是一个 N 维的矢量, 它的具体观测结果可以用观测空间中的点 $\mathbf{R}$ 来表示。概率转移机构的作用就是产生这些与已知的条件概率密度 $p_{r|H}(\mathbf{R}|H_0)$ 和 $p_{r|H}(\mathbf{R}|H_1)$ 相一致的点 $\mathbf{R}$ 。

由于在简单的双择检测中, 我们假设判决规则是在 H_0 或 H_1 中二择决一, 因此我们可以把观测空间划分为两部分, 记为 Z_0 和 Z_1 , 如图 1.3。当观测落入 Z_0 时, 就将其视为 H_0 ; 而落入 Z_1 时, 就将其视为 H_1 。这

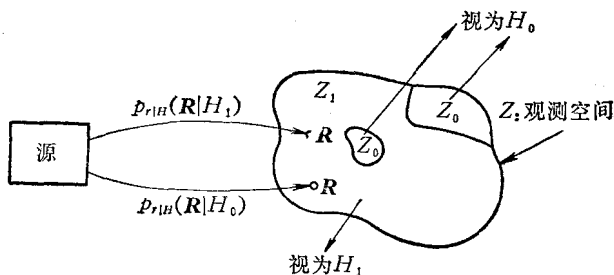


图 1.3 判决域

时我们可以把单次观测的贝叶斯风险的表达式推广到矢量的情况, 即推广到多次观测。式 (1.10) 的等价形式为

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = & C_{00}P_0 \int_{Z_0} p_{r|H}(\mathbf{R}|H_0) d\mathbf{R} + C_{01}P_1 \int_{Z_0} p_{r|H}(\mathbf{R}|H_1) d\mathbf{R} \\ & + C_{10}P_0 \int_{Z_1} p_{r|H}(\mathbf{R}|H_0) d\mathbf{R} + C_{11}P_1 \int_{Z_1} p_{r|H}(\mathbf{R}|H_1) d\mathbf{R} \end{aligned} \quad (1.30)$$

由于在进行判决时, 必须为每一个点 $\mathbf{R}$ 指定观测空间 Z 中的 Z_0 或 Z_1 区域, 所以贝叶斯检验必须使风险 $\mathcal{B}$ 为最小的方式选择判决区域 Z_0 或 Z_1 。由于对双择检测来说

$$Z = Z_0 + Z_1 \quad (1.31)$$

所以式 (1.30) 可重新写为

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = & C_{00}P_0 \int_{Z_0} p_{r|H}(\mathbf{R}|H_0)d\mathbf{R} + C_{01}P_1 \int_{Z_0} p_{r|H}(\mathbf{R}|H_1)d\mathbf{R} \\ & + C_{10}P_0 \int_{Z-Z_0} p_{r|H}(\mathbf{R}|H_0)d\mathbf{R} + C_{11}P_1 \int_{Z-Z_0} p_{r|H}(\mathbf{R}|H_1)d\mathbf{R} \end{aligned} \quad (1.32)$$

显然

$$\int_Z p_{r|H}(\mathbf{R}|H_0)d\mathbf{R} = \int_Z p_{r|H}(\mathbf{R}|H_1)d\mathbf{R} = 1 \quad (1.33)$$

依此式则可将式 (1.32) 化为仅含 Z_0 的形式

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = & C_{10}P_0 + C_{11}P_1 + \int_{Z_0} \{[(C_{01}-C_{11})P_1 p_{r|H}(\mathbf{R}|H_1)] \\ & - [(C_{10}-C_{00})P_0 p_{r|H}(\mathbf{R}|H_0)]\} d\mathbf{R} \end{aligned} \quad (1.34)$$

由于代价因子和验前概率是已知的, 所以上式右端的前两项是固定值项。第三项为积分项, 积分值受分配到 Z_0 的那些点 $\mathbf{R}$ 所控制。由于假设 $C_{10} > C_{00}$ 和 $C_{01} > C_{11}$ 是合理的, 所以积分项中两个方括号项均应为正值。如果积分的两项中全部 $\mathbf{R}$ 中第二项进入到 Z_0 的大于第一项进入到 Z_0 的, 则这个积分为负值。反之, 第二项拒绝进入 Z_0 的大于第一项的, 则积分为正值。拒绝进入 Z_0 即进入 Z_1 。这段解释还可以更明确地用下述一段话来说明。所有满足

$$(C_{10}-C_{00})P_0 p_{r|H}(\mathbf{R}|H_0) > (C_{01}-C_{11})P_1 p_{r|H}(\mathbf{R}|H_1)$$

的 $\mathbf{R}$ 的值都应该属于 Z_0 , 这样才能保证式 (1.34) 中的积分项为负值, 使风险 $\mathcal{B}$ 减小。反之, 如果所有满足

$$(C_{10}-C_{00})P_0 p_{r|H}(\mathbf{R}|H_0) < (C_{01}-C_{11})P_1 p_{r|H}(\mathbf{R}|H_1)$$

的 $\mathbf{R}$ 的值都应该属于 Z_1 , 也能使风险 $\mathcal{B}$ 减小。因为若满足上述不等式的 $\mathbf{R}$ 的值属于 Z_0 , 则式 (1.34) 中的积分项为正值, 从而会使风险 $\mathcal{B}$ 增大。依此可获得下述检验

$$\frac{p_{r|H}(\mathbf{R}|H_1)}{p_{r|H}(\mathbf{R}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{(C_{10}-C_{00})P_0}{(C_{01}-C_{11})P_1} \quad (1.35)$$

此式左端的比值我们称为似然比, 记为 $\mathcal{L}(\mathbf{R})$, 这是与单次观测情况相对应的, 即

$$\mathcal{L}(\mathbf{R}) = \frac{p_{r|H}(\mathbf{R}|H_1)}{p_{r|H}(\mathbf{R}|H_0)} \quad (1.36)$$

由于似然比是一个随机变量的两个函数的比值, 所以它仍为随机变量。尽管 $\mathbf{R}$ 是多维的, 但 $\mathcal{L}(\mathbf{R})$ 却始终是一维的。式 (1.35) 的右端是检验的门限, 记为 η

$$\eta = \frac{(C_{10}-C_{00})P_0}{(C_{01}-C_{11})P_1} \quad (1.37)$$

因此, 贝叶斯检验所导致的是似然比检验

$$\mathcal{L}(\mathbf{R}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \eta \quad (1.38)$$

其等价的检验为

$$\ln \mathcal{L}(\mathbf{R}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \ln \eta \quad (1.39)$$