

中国科学院知识创新工程重要方向项目(kzcx2-yw-113)

中国科学院工程地质力学重点实验室

资助

非线性

岩土力学基础

秦四清 王思敬 孙 强 著
徐国存 王媛媛 马 平

地 质 出 版 社

中国科学院知识创新工程重要方向项目(kzcx2-yw-113) 资助
中国科学院工程地质力学重点实验室

非线性岩土力学基础

秦四清 王思敬 孙 强 著
徐国存 王媛媛 马 平

地 质 出 版 社

· 北 京 ·

内 容 提 要

本书是关于非线性岩土力学的入门专著。本书对用非线性科学理论(耗散结构理论、协同学、突变理论、混沌动力学等)解决岩土体失稳演化过程的非线性行为问题,给出了系统完整的研究思路和方法。本书重点提出了具有不同力学属性介质相互作用的极限状态确定非线性分析理论,并用它研究了产生主动土压力的充要条件、刚性抗拔桩产生极限抗拔力的充要条件、斜坡失稳演化机制、重力坝沿软弱结构面滑动的失稳模型与突变机制。书中还研究了滑移-弯曲斜坡与层状岩体几何失稳,以及顶板-煤柱系统的几何-物理失稳等问题。

本书可供从事地质工程、土木工程、岩土力学的专家、学者以及相关专业的研究生参考使用,亦可作为普通高等院校的教材使用。

图书在版编目(CIP)数据

非线性岩土力学基础/秦四清等著. —北京:地质出版社, 2008. 6

ISBN 978 - 7 - 116 - 05696 - 1

I. 非… II. 秦… III. 非线性力学-岩土力学 IV. TU4

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第083821号

执行编辑:王大军

责任编辑:于春林 白铁

责任校对:黄苏晔

出版发行:地质出版社

社址邮编:北京海淀区学院路31号,100083

咨询电话:(010) 82324508(邮购部);(010) 82324579(编辑室)

网 址: <http://www.gph.com.cn>

电子邮箱: zbs@gph.com.cn

传 真:(010) 82310759

印 刷:北京地大彩印厂

开 本:787mm×1092mm^{1/16}

印 张:9.75

字 数:240千字

印 数:1—1500册

版 次:2008年6月北京第1版·第1次印刷

定 价:30.00元

书 号:ISBN 978 - 7 - 116 - 05696 - 1

(如对本书有建议或意见,敬请致电本社;如本书有印装问题,本社负责调换)

序

非线性是复杂的自然过程和人为事物的本质性特征之一。它源于系统的物质性和开放性所造成的复杂性，并反映着系统内在的及内外的各种相互作用和总体行为。学界称之为非线性动力系统。

岩土和地质工程系统具有高度的非线性特征，岩土水与工程系统的物质运动和结构演化，以及其变形、破坏、和失稳充分体现了系统动力学过程的复杂性。显然，从系统的非线性入手，进一步探索其某种普适性的内在规律，发展科学合理的、能够反映复杂开放系统由渐变到突变、由连续到不连续、由无序到有序的研究理论和分析方法，将成为重要的发展方向。

岩土和地质工程系统的种种动力过程和非平衡发展，如系统无序—有序转化；渐变—突变转化；系统演化到临界点附近的自组织临界现象及涨落效应对系统的响应；子系统的协同作用；系统的内在确定性变形规律——混沌特征等等，正是非线性动力系统的典型行为。

非线性科学的发展，如耗散结构论、协同学、突变理论、混沌理论、分形理论及重正化群理论等，给岩土和地质工程系统研究中的非线性问题提供了重要的理论基础和科学方法。这些理论是研究非线性性质、非平衡体系的科学，决定了它们应用的普适性和广阔前景。

本书作者之一中国科学院地质与地球物理研究所秦四清研究员长期以来针对复杂的各种岩土体工程问题，用非线性动力系统理论进行深入研究，以期找到其变形破坏的本质和演化规律，探索失稳判据，发展科学的物理预测和预报模型。本书正是他们在中国科学院创新计划中取得的前沿性研究成果，其学术价值突出，工程应用意义显著，对地质工程与岩土力学的学科发展将起到积极的推动作用。

为此，特为其作序，并向同行读者推荐。

 (C. F. Lee)

中国工程院院士
加拿大工程院院士
香港大学常务副校长
2008年3月28日于香港

前 言

工程地质与岩土力学的核心是“变形与破坏”、“稳定性评价”、“极限状态与极限平衡”及“预测预报”等问题。如何实现科学合理的岩土体稳定性评价和地质灾害预测预报,是工程地质与岩土工程专家亟待解决的重大问题。

在传统的岩土体稳定性评价中,不少学者用模糊数学、灰色理论、黏弹塑性本构模型、损伤断裂模型、广义内时本构模型等理论与方法评价岩土体稳定性。这些理论与方法或者考虑了岩土体变形的不确定性或随机性,或者根据岩土介质应力应变曲线型式得到的某种简化本构模型描述岩土体变形的某种力学行为。这些理论与方法未能反映岩石变形局部化、从无序到有序、系统演化到临界点附近的自组织临界现象及涨落效应对系统的响应、系统突变等不连续行为以及子系统的协同作用和系统的内在混沌特征等非线性行为和规律。对这些问题,必须进行深入研究,以找到某种普适性的内在规律,建立科学合理的能够反映开放系统由渐变到突变、由连续到不连续、由无序到有序的岩土体稳定性分析理论。

过去的试验研究大多是针对岩土介质在峰值强度前的力学行为,但据我们近些年的研究,岩土体失稳不仅取决于峰值强度前的变形行为,更重要的是取决于其峰值后的力学行为。因此,开展岩土体在不同围压和不同孔隙水压力条件下的全应力应变性能研究,就显得更为重要。

预测岩土体破坏时间的常用方法是经验的或统计的。这些统计预报方法缺乏严格的物理基础,不仅用于预报的参数或指标物理意义不明确,而且预报结果与选用不同蠕变阶段的数据有关,常带有很大的主观随意性。岩土体失稳时间预报研究要取得重大进展,必须从经验或统计预报向物理预报发展。在滑坡预报研究中,滑坡预报常用的位移或位移速率指标与滑坡的发生未必有必然的联系,如在一次大暴雨期间,位移会陡增,位移速率也很大,但斜坡可能呈稳定状态,按位移或位移速率预测可能会得出错误的结论。为此,必须寻找与滑坡前兆突变异常有必然联系的标志和指标。

环境因素如降雨、地震、震动对岩土体失稳有重要影响,受到了很多学者专家的重视,几十年来发表了大量有关论著。以水对滑坡的影响而论,除化学腐蚀作用外,主要有静水压力(浮托力)、动水压力作用以及降低力学强度的作用等。但据我们最新的研究,水还有一种重要的作用,即增大材料均匀性或脆性的作用。岩土体临近失稳时,外部涨落(降雨、地震、爆破震动、大气压力、日月潮引力等)是失稳的重要触发因素,过去的研究对涨落效应大多未涉及,因此,有必要探索涨落因素对失稳的触发机制。

对岩土体稳定性科学评价难点在于岩土体系统的高度非线性。正是由于非线性的存在,才使人们对岩土体变形破坏机理认识模糊,引进的数学、力学理论有时失效,定量描述难以实现。求解非线性问题一般极为困难,非线性问题个性极强,必须具体问题具体分析,但非线性问题在基本面上具有普适性,如地震、滑坡、岩爆等,虽然失稳的表现形

式各异,但都是在外界影响下,介质的物理力学性质发生改变而引起的,其失稳机制并无本质区别。

耗散结构论、协同学、突变理论、混沌理论、分形理论及重正化群理论等非线性科学的发展,给研究地学中的非线性问题提供了理论和方法。这些理论是研究非线性性质、非平衡体系的科学,决定了它们在地学中的应用的普适性和广阔前景。地质体中平衡和封闭是相对的,非平衡和开放是绝对的,在自发地质过程的非平衡演变中,可能形成非平衡耗散结构,如地震、滑坡的孕育过程,均是耗散结构的形成过程。

与非线性动力学系统(NDS, nonlinear dynamical systems)理论相联系的概念和数学技术,已广泛应用于包括岩石力学和地质研究的很多方面。NDS理论在岩土力学研究中的应用给我们提供了对岩土体失稳机制深入洞察的机会,在此领域诸多学者已经做出了富有创新意义的研究成果。这些成果虽加深了对岩土体失稳机制的认识,但把岩土体演化过程中的蠕变-突变过程、非线性动力学机制、混沌行为、分岔演化机制与物理预报等有机地结合起来,考虑各种环境因素对岩土体演化过程的影响尚显不足。为此,本书将针对复杂的各种岩土体作用系统,用NDS理论进行深入研究,以找到其本质的失稳判据与演化规律,探索混沌产生的力学机制,发展科学的物理预报模型。

尽管诸多学者对岩土力学的基本问题做了深入研究,取得了丰硕成果,但这些研究仍停留在对岩土体变形与破坏机制认识的初级阶段,诸多问题有待深化。下面我们将通过对几个典型岩土力学基础理论问题的讨论予以阐述。

1. 什么原因使岩土体的演化从量变到质变?

如果岩土体系统中各要素相互作用仅仅是线性的,那么无论它们怎样组合,只会有量的增减,而不可能有质的变化,也即斜坡不会失稳,地震不能发生。对线性系统,任何预测和判断都会准确无误,而失败于预测许多灾难性滑坡和地震的事实说明,岩土体系统的演化行为具有高度非线性,其长期力学行为难以预测。

2. 用牛顿力学研究岩土体特性合适吗?

牛顿的物理学是机械论,它所描述的世界是没有质变的,牛顿力学方程对时间反演 $t \rightarrow -t$ 是不变的,它仅适用于封闭系统,而对具开放性质的岩土体系统并不适用,某些基于牛顿力学的岩土体稳定性评价理论具有相应的局限性。

3. 强度准则用于判断岩土体失稳问题合适吗?

对物理失稳问题,从严格意义上来说,强度准则只适用于具有应变软化属性的单一介质或简单串联系统(压机-岩样系统)。对客观存在的复杂岩土体系统,在应力场作用下,部分岩土体可能达到了峰值强度,而另一部分岩土体可能未达到峰值强度,难以判断在满足何种条件下系统会整体失稳,这说明强度准则只能判断系统的局部破坏。我们的研究表明,对于物理失稳问题,强度准则只是失稳的必要条件之一。

4. 人的预测能力是无限的吗?

研究表明,高度非线性的岩土体系统在演化过程中会出现混沌特征。混沌的出现说明,人的预测能力受可预报时间尺度限制,不是无限的。对具有混沌特征的系统,如果建立力学或统计模型进行预测,不但预测误差会随时间而增大,而且预测的系统行为发展模式可能会脱离系统的本质演化规律。这提示我们,在进行有关流变的数值计算时,预测系统的长期演化行为是不可靠的,需要极其慎重。

基于观测数据的统计预测方法, 缺乏物理依据, 统计预测的效果难以评估, 预测结果难以令人信服。例如, 对一条具有应变软化特征的应力应变曲线, 如果只给出峰值强度前的数据建立预测模型, 那么不管用任何统计方法或所谓的“智能”预测方法(神经网络法、BP 算法等), 都不可能预测出峰值后随应变的增大应力会减小的特征, 不但预测误差会越来越大, 预测的规律与实际情况将截然相反。

5. 刚体极限平衡法的适用性如何?

刚体极限平衡法常用于评价斜坡稳定性或计算挡土墙土压力, 该法采用了滑面介质力学属性为刚塑性的假设, 这是一种假定的理想情况。实际上滑面介质的应力应变属性或为应变软化属性或为应变硬化属性(弹塑性, 含理想弹塑性), 根本不可能具有刚塑性属性, 刚塑性假设纯粹为硬性假设, 与实际情况可能完全不符。换句话说, 该法只适用于滑面为单一介质或在某一蠕滑位移值时同时达到峰值强度的多种介质, 否则抗滑力不能按峰值强度叠加计算。对于实际斜坡系统而言, 滑面可能由具有不同力学属性的多种介质组成, 采用非线性科学理论进行研究显然是很必要的。

6. 为什么滑坡发生时间不一定发生在降雨或地震期间?

如果滑坡系统是线性的或弱非线性的, 则在适当的降雨强度和相当的地震震级作用下, 滑坡发生时间可与之同步; 如果滑坡系统是非线性的, 则滑坡发生时间可能提前或滞后于降雨或地震期间。

非线性科学引入地质学已有近 20 年的历史, 著者在 1993 年曾出版过将非线性科学引入工程地质学的第一部专著——《非线性工程地质学导引》, 接着黄润秋与许强在 1997 年出版了《工程地质广义系统科学分析原理及应用》一书。之后, 著者和其他有兴趣于此领域研究的学者一道, 在此领域做出了富有成效的探索。值得提出的是, 谢和平院士用分形几何理论研究岩石破坏机理取得了许多创新性成果, 其他学者用突变理论、重正化群理论、协同学研究岩土体变形破坏机理也都有新的认识和发现, 但这些研究大多集中于单一岩土介质, 这在实际岩土工程中极为少见, 具有不同力学属性介质的相互作用机理基本上是研究的空白。针对这些问题, 著者在此领域做了一些开拓性的工作, 提出了具有不同力学属性介质相互作用的非线性理论, 这也是本书的核心与重点。其理论的本质可概括为: ①单一介质可能有不同的应力应变属性, 如弹脆性、应变软化、应变硬化属性等, 不同介质的应力应变属性不同, 这取决于介质的赋存环境、应力状态与物理状态; ②不同力学属性介质的相互作用具有协同效应、突变效应与混沌效应, 用强度理论难以评价系统是否整体上达到了极限状态或失稳状态。我们的研究表明, 对单一岩土介质, 强度理论基本有效; 对多种具有不同力学属性介质组成的系统, 强度理论只适用于判断系统局部破坏, 不再适用于判断系统整体上是否达到了极限状态或失稳状态。多数情况下, 强度准则只是失稳的必要条件之一; ③系统是否达到极限状态或发生失稳与系统的刚度比和介质的均匀性有极大相关性。

本书分四篇十章, 第一篇是非线性岩土力学的理论基础, 包括第一章至第四章; 第二篇是土体剪切变形过程的极限状态分析理论, 包括第五章和第六章; 第三篇是岩体物理失稳非线性分析理论, 包括第七章和第八章; 第四篇是岩体几何失稳与几何-物理失稳非线性分析方法, 包括第九章和第十章。现简介如下。

第一章, 对非线性科学的概念、方法及解决问题的程序做了介绍, 并对其在工程地质

和岩土力学中的研究与应用进展做了简述。

第二章,总结了岩土介质应力应变曲线模式与破坏性质的关系,指出断续岩石节理(岩桥)的破坏和剪切行为与过去认为的简单弹脆性破坏不同,结构性土体用弹塑性本构关系不能很好描述,必须考虑损伤行为。对具有应变软化属性的单一介质,强度理论可用于确定其极限状态,否则强度理论不再适用。分析了极限平衡法的缺陷,对比了强度准则与刚度判据的适用范围。提出了具有应变软化属性介质与具有应变硬化属性介质协同作用的岩土介质剪切极限状态分析理论,这是本书的重要贡献之一,该理论可作为第三章、第六章、第七章、第八章、第十章的理论基础。

第三章,介绍了协同学理论在岩石力学中应用的一个实例。本章首先在同时考虑岩石的力学参量和热学参量条件下,构造系统的动力学方程组;接着应用协同学的绝热消去技术建立序参量方程;最后对序参量方程的稳定性与混沌性作了分析。

第四章,用耗散结构理论定性讨论了岩体演化过程中耗散结构形成的条件和机制,分析了滑坡孕育演化的自组织过程;根据 NDS 吸引子概念,建立了考虑混沌特性的滑坡可预报时间尺度的确定方法,并对滑坡长期预报、中期预报与临滑预报的可行性进行了分析;建立了滑坡演化的非线性动力学模型,模型参数可根据观测数据和著者提出的改进反迭代算法确定,模型的可靠性通过实例分析得到了验证。

第五章,可看作第二章的一个应用实例,本章把墙后土体看作由两种具有不同应力应变属性的介质组成,一种具有应变硬化或弹塑性(含理想弹塑性)性质,另一种具有应变软化属性,研究两种不同属性介质相互作用产生的土压力。研究给出了产生主动土压力的必要条件和充分条件,并结合实测资料验证了理论模型的可靠性,提出了与前人研究思路和方法完全不同的新的非线性土压力理论,深化了对土压力有关问题的认识。

第六章,可看作第二章的一个应用实例,本章把桩周土体看作由两种具有不同应力应变属性的介质组成,研究刚性抗拔桩产生极限抗拔力的必要条件和充分条件,提出了极限承载力非线性分析理论。

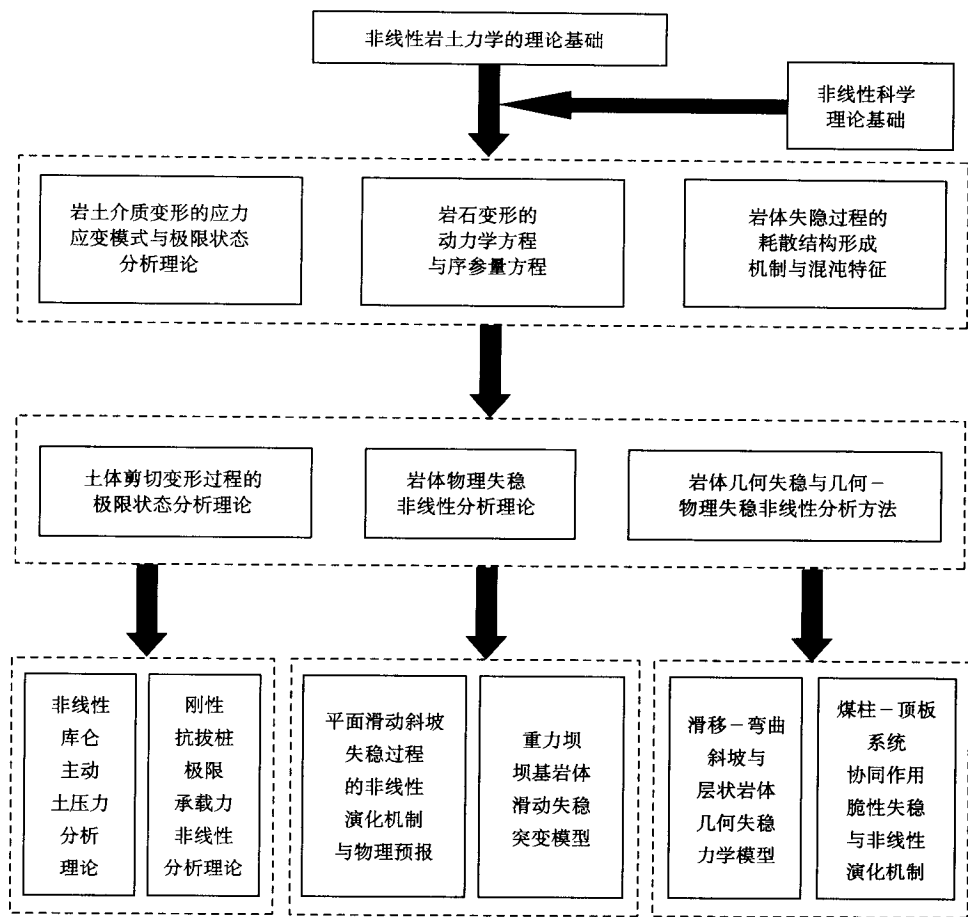
第七章,可看作第二章理论的应用。该章以平面滑动斜坡为例,考虑滑动面介质的不同力学属性,用突变理论研究它的失稳机制;在此基础上,考虑滑面介质的蠕变、加速度与环境因素特性,建立非线性动力学模型探索滑坡物理预报方法及混沌产生的条件和判据。

第八章,可视为第二章理论的应用。该章应用突变理论方法,研究了重力坝沿软弱结构面滑动的失稳模型与突变机制。软弱结构面内含岩桥,岩桥介质具有复杂弹脆性属性,软弱结构面内除岩桥外的介质具有应变软化属性。当具有不同力学属性的介质相互作用时,系统演化将表现出强烈的非线性行为,其失稳模式和判据与过去的认识有很大不同。

第九章,主要研究岩体几何失稳问题。对滑移-弯曲斜坡提出了一个尖点突变模型,用它研究了斜坡失稳机制并进行了实例分析。参照对滑移-弯曲斜坡失稳的研究方法,研究了近水平及陡立岩层的几何失稳力学模型,给出了失稳判据,并结合实例进行了验证。

第十章,主要研究岩体几何-物理失稳问题。用突变理论对坚硬顶板和底板下,顶板-煤柱系统的失稳及其演化的非线性动力学与声发射机制,进行了系统分析。把顶板视为弹性梁,煤柱的本构关系用 Weibull 分布模型描述,研究了失稳的充要力学条件准则、突跳释能机制、失稳演化过程与蠕变三阶段的关系、系统演化的非线性动力学模型及失稳过程

的声发射(AE)物理模型与特征，对失稳机制与宏观破坏物理现象有了更深入的理解。
本书的研究思路与技术路线框图如下：



研究思路与技术路线框图

本书是第一作者近 15 年来在非线性岩土力学方面研究成果的总结，是《非线性工程地质学》一书的改进与提高版本。在成书的过程中也参阅、吸纳了某些学者的研究成果。秦四清研究员撰写了前言、第二章—第五章、第七章—第十章，孙强博士撰写了第一章和第六章，王思敬院士参与了有关问题的讨论和指导，审阅了全文并提出了宝贵的修改意见。本书所涉及的问题探索性较强，难免有错误之处，衷心希望读者批评指正。

衷心感谢王思敬院士、张倬元教授、伍法权研究员对地质工程和岩土力学中非线性研究的支持以及对第一作者的鼓励与帮助，特别感谢香港大学李焯芬院士为本书作序，感谢中国科学院知识创新工程重要方向项目(kzcx2-yw-113)和中国科学院工程地质力学重点实验室在经费方面的支持。

目 录

前 言

第一篇 非线性岩土力学的理论基础

第一章 岩土体演化行为分析的非线性科学理论基础	(1)
第一节 非线性系统及其数学基础	(1)
第二节 分岔理论及其应用	(5)
第三节 非线性科学理论简介	(8)
第四节 非线性科学理论的研究对象	(21)
第五节 岩土体演化行为的非线性研究进展与前景	(21)
参考文献	(26)
第二章 岩土介质变形的应力应变模式与极限状态分析理论	(28)
第一节 岩土介质应力应变曲线模式	(28)
第二节 断续岩石节理(岩桥)的破坏与剪切行为	(29)
第三节 结构性土体的弹塑性损伤本构模型	(31)
第四节 岩土介质变形破坏的极限状态	(32)
第五节 刚体极限平衡方法、强度准则与刚度判据	(33)
第六节 应变软化介质的 Weibull 本构模型	(33)
第七节 岩土介质剪切变形过程的非线性力学模型与极限状态分析理论	(34)
参考文献	(39)
第三章 岩石变形的动力学方程与序参量方程	(40)
第一节 引言	(40)
第二节 岩石变形的动力学方程	(41)
第三节 序参量方程	(43)
第四节 序参量方程的稳定性分析与混沌态判据	(44)
第五节 对序参量方程的讨论	(45)
参考文献	(47)
第四章 岩体失稳过程的耗散结构形成机制与混沌特征	(48)
第一节 引言	(48)
第二节 岩体变形演化过程中耗散结构形成的条件	(49)
第三节 岩体失稳过程中耗散结构的形成机制	(52)
第四节 滑坡孕育演化的自组织过程	(54)
第五节 系统运动的混沌性与滑坡可预报性	(55)
第六节 滑坡演化的非线性动力学模型	(61)
参考文献	(68)

第二篇 土体剪切变形过程的极限状态分析理论

第五章 非线性库仑主动土压力分析理论	(70)
--------------------------	------

第一节	引言	(70)
第二节	基于库仑主动土压力的非线性分析理论	(71)
第三节	结论	(79)
参考文献		(79)
第六章	刚性抗拔桩的极限承载力非线性分析理论	(81)
第一节	引言	(81)
第二节	确定抗拔桩极限承载力的非线性分析理论	(82)
第三节	结论	(88)
参考文献		(88)
第三篇 岩体物理失稳非线性分析理论		
第七章	平面滑动斜坡失稳过程的非线性演化机制与物理预报	(89)
第一节	引言	(89)
第二节	斜坡平面滑动失稳的尖点突变模型	(90)
第三节	考虑蠕变特性的斜坡演化非线性动力学模型	(98)
第四节	简化的物理预报模型	(101)
第五节	考虑滑动加速度及环境影响的斜坡演化非线性动力学模型	(104)
第六节	结论	(109)
参考文献		(111)
第八章	重力坝坝基岩体滑动失稳的突变模型	(113)
第一节	引言	(113)
第二节	坝基沿软弱结构面滑动的力学模型	(113)
第三节	坝基沿结构面滑动失稳的尖点突变模型	(115)
第四节	库水位涨落及工程处理措施对滑动失稳的影响	(116)
参考文献		(117)
第四篇 岩体几何失稳与几何-物理失稳非线性分析方法		
第九章	滑移-弯曲斜坡与层状岩体几何失稳力学模型	(119)
第一节	引言	(119)
第二节	滑移-弯曲斜坡失稳尖点突变模型	(121)
第三节	滑移-弯曲斜坡失稳实例研究	(124)
第四节	层状岩体失稳的尖点突变模型	(125)
第五节	结论	(128)
参考文献		(129)
第十章	煤柱-顶板系统协同作用的脆性失稳与非线性演化机制	(130)
第一节	引言	(130)
第二节	煤柱-顶板系统协同作用的尖点突变模型与失稳机制	(131)
第三节	系统演化的非线性动力学模型	(137)
第四节	系统演化的声发射非线性动力学模型与失稳过程的声发射特征	(139)
第五节	结论	(145)
参考文献		(145)

第一篇 非线性岩土力学的理论基础

本篇在介绍非线性科学基本理论的基础上,分别给出了协同学、耗散结构理论、混沌动力学在岩土力学分析中的解题方法与应用实例,提出了具有不同应力应变属性介质协同作用的极限状态分析非线性理论。

第一章 岩土体演化行为分析的非线性科学理论基础

非线性科学是研究系统非线性特征的一门综合性学科,主要包括耗散结构理论、突变理论、协同学、分形几何学、混沌动力学等分支学科。非线性科学几乎涉及了自然科学和社会科学的各个领域,并正在改变人们对现实世界的传统看法。由非线性科学所引起的对确定论和随机论、有序与无序、偶然性与必然性等范畴和概念的重新认识,已经形成了一种新的自然观,将深刻地影响人类的思维方式,并涉及现代科学逻辑体现的根本性问题。迄今为止,非线性科学已经在自然科学的诸多领域得到了应用和发展^[1~30]。非线性科学的诞生给系统科学注入了新的活力,同时也为岩土工程的研究吹来了非线性时代的春风。对岩土非线性力学行为的系统研究从《非线性工程地质学导引》一书的出版为标志性开端,已经有将近15年的发展历程。其间,随着岩土工程理论研究、实验手段与实测资料的不断积累,特别是新的信息测试、监测技术在岩土工程中的不断应用和发展,为研究岩土的非线性力学行为提供了有力的基础条件,使得岩土非线性研究有了长足的进步,非线性科学的主要理论“新三论”(耗散结构理论、协同学、突变理论)、混沌动力学、分形理论^[1~4]等在岩土工程的研究与应用中扮演着愈发重要的角色。

岩土工程所涉及的研究对象不仅仅是一个开放、复杂的巨系统,同时又是一个非线性复合系统,因此从非线性角度认识岩土体系统的演变规律具有重要的现实意义和科学意义。本书阐述了非线性科学的主要思想,总结了近年来我们在非线性岩土力学方面的研究成果。为便于理解本书以后各章的内容,第一章将对有关非线性科学的主要思想和研究方法进行介绍。

第一节 非线性系统及其数学基础

一、线性和非线性的数学描述^[5]

如果描述系统状态的物理量在空间的分布是均匀的,即有:

$$\nabla x_i = 0 \quad (1-1)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = f(x_i, x_j) \quad (1-2)$$

式中, ∇ 为梯度算子。如果 f 是物理量 x_i 的线性函数, 那么系统方程(1-2)就是一个线性系统。如果 f 是非线性函数, 则方程(1-2)表示的是一个非线性系统。

如果描述系统状态的物理量不仅是时间的函数, 而且还是空间的函数, 即有:

$$\nabla x_i \neq 0 \quad (1-3)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial t} + v \cdot \nabla x_i = f(x_i, x_j) \quad (1-4)$$

如果广义速度 v 是不均匀的, 那么 $v \cdot \nabla x_i$ 为非线性项, 因此, 不管 f 是否为线性函数, 方程(1-2)表示的是一个非线性系统。

线性系统具有以下显著特点:

- 1) 均匀性(空间分布均匀、相互作用等权重);
- 2) 独立性(代数叠加律);
- 3) 可逆性: 所谓的可逆性指的是当 $t \rightarrow -t$, 物理规律或结果仅符号改变而形式、分布不变, 即 $f(t) = -f(-t)$ 。

非线性系统具有以下显著特点:

- 1) 非均匀(空间分布、相互作用的方式、效应、结果随试件、地点、条件而变);
- 2) 相干性(各主要要素不具有独立性, 遵守矢量叠加原理);
- 3) 不可逆性(空间不均匀所致, 各要素的作用和重要性不同), 如生物进化、天气演变、地球自转等演化行为的不可逆性;
- 4) 存在支配与从属、控制与反馈、策动与响应等对立矛盾的两方面。

二、确定性论、概率论与混沌^[5]

牛顿(Newton)和拉普拉斯(Laplace)都曾断言, 只要建立起系统的动力学方程, 就可以根据系统的初始条件和边界条件准确地确定系统任意时刻以后的运动。在牛顿所创建的经典力学体系里, 科学家相信, 任意一个确定性的系统在确定性的激励下, 其响应必然也是确定的。也就是说, 确定性遵循的是 $\varepsilon - \delta$ 语言, 即动力系统小量的初始误差 ε 所产生的结果误差也是一小量 δ , 此外, 确定性论还遵循因果——对应关系, 一个初始条件或一组边界条件唯一地对应于一个(组)解。由于确定性论的典型代表——牛顿力学的巨大成功, 几百年来, 人们理所当然地认为世界是精确可知的, 当时的事实的确如此。科学家利用牛顿三定律及其在流体中的应用公式 N-S 方程, 精确地计算出系统轨线和未来的状态, 从有形的轨迹到无形的行为, 从行星、彗星的发现到航海、气象、水文、地震的预报, 无一不是确定性的成果。事实上, 确定性论也是可知论的科学依据。

与确定性论平行发展的是概率论, 即客观世界所遵循的因果关系是一与多的对应关系。在概率论看来, 世界是不可知的, 所以概率论是不可知论的基础。由于随机因素的存在, 系统遵守的是大数定律, 即系统的统计行为是可知的, 而具体的某一事件或某一行为是不可准确预测的。

很显然, 确定性论和概率论二者是对立的, 互不相通的。由于两者观点的不同, 确定性论和概率论分别派生出了动力建模和统计建模。然而, 无论是动力建模还是统计建模,

误差总是客观存在的。过去一般认为导致预测误差的主要原因有三个方面：客观模式与主观模式的误差、计算与观察的误差以及由于资料或参数的离散而产生的误差。

如图 1-1 所示，某物理场的空间结果分为 I、II、III、IV 四个区域。这四个区域的结构彼此存在着本质上的区别，如不同性质的吸引子或同一个吸引子的不同特性区域。假设系统的初始状态是 A，观测误差是 $\pm \varepsilon$ ，规定的允许预报误差为 $\pm \delta$ 。由于客观存在的状态变量的离散化，我们无法确定、区别彼此很近的一些态，如 A、B、C、D、E 究竟哪个态是真实的初始态。因此，我们亦无法知道演化时间 t 后，它们所演化出的彼此不同的状态 A'、B'、C'、D'、E' 中哪个是未来的真实状况。即我们的预报模式可能是 B'、C'，也可能是 D'。如果我们预报的是 B'，由于 $\overline{A'B'} \leq \varepsilon$ ，预报是精确的。如果我们预报的是 D'，由于 $\overline{A'D'} \leq \delta$ ，预报是准确的，即系统仍是可预报的。如果我们预报的是 C' 或 E'，由于 C' 或 E' 与 A' 的物理性质有本质的差异，我们的预报是失败的。

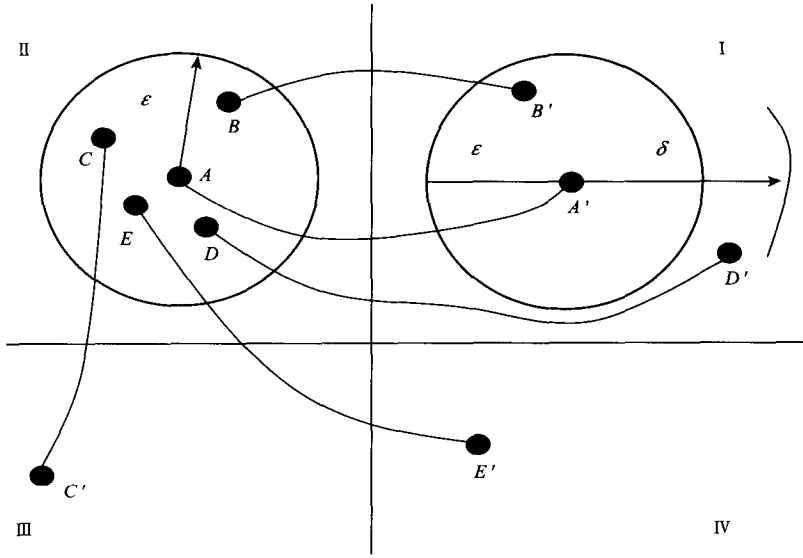


图 1-1 资料离散而产生的误差^[5]

随着对客观事物认识的提高，客观模式与主观模式的误差可以逐渐减少。随着计算和观察精度的提高，由计算和观察所产生的误差也可以逐渐减少。如果我们能消除由于资料或参数的离散而产生的误差，那么我们就可以通过建模而准确地描写任意客观系统。但是林振山^[5]认为资料或参数的离散而产生的误差将是客观和永恒的，无论人类如何提高认知能力和水平都将无法消除该误差。

随着计算机技术的发展，人们得以进行大规模的数值模拟和非线性微分动力系统的研究。大量研究结果表明：由于资料或参数的离散而产生的预报误差总是无法消除的。不仅如此，一些看似非常简单的二维非自治确定性非线性动力系统和三维自治确定性非线性动力系统存在着不确定解。1963 年，气象学家 Lorenz(《确定性非周期性》)试图用一简单的三维自治非线性动力系统来研究大气对流的稳定性，但研究结果却让数学家百思不得其解：确定性非线性动力系统存在着不确定性。此外，计算机模拟试验发现，输入参数的稍

微变化将导致结果的巨大变化,一切变化好像都是出人意料的。Ruelle 和 Tankens 提出了奇怪吸引子的概念(1971,《论湍流的本质》); Li 和 Yorke 首先使用了混沌这个术语(1975,《周期3则混沌》); May 发表了关于生物学的生态方程(1976,《表现非常复杂的动力学的简单数学模型》); Feigenbaum 对 May 的虫口模型进行计算机数值实验时,发现了称之为费根鲍姆(Feigenbaum)常数的两个常数(1978); Mandelbrot 在1980年发现了以他的名字命名的 Mandelbrot 集合。在一大批杰出的数学家和物理学家的深入研究下,人们发现了划时代的混沌现象。即3个变量以上的自治动力系统或2个变量以上的自治动力系统或1个变量以上的延时动力系统可以出现不确定行为。我们把确定性非线性耗散动力系统的不确定行为(即混沌)称为类随机行为或动力系统的内在随机或简称为动力随机。这种动力随机(混沌)与传统的随机现象的主要区别在于,混沌在高层次是有序、有结构和自相似的。

混沌系统的最大特点就是对初值的极其敏感性,如著名的“蝴蝶效应”指出:巴西的一只蝴蝶拍拍翅膀,就可能导致美国得克萨斯州的一场龙卷风。混沌现象的发现说明了确定性动力系统的行为不仅仅是定常、周期和准周期的,而更普遍的则是无序的混沌。混沌架起了从确定性论到概率论的桥梁。混沌使我们认识客观世界由单一到多样,由简单到复杂,由和谐到奇异,由静态美到动态美。混沌是令人振奋的,它开启了简化复杂现象的可能性。

三、相空间和定态^[5]

所谓的相空间指的是用状态变量 $\{x_i\}$, ($i=1, 2, \dots, n$)支撑起来的抽象的物理空间,也称为 Hirbert 空间。它不同于真实的三维位置空间 r 以及真实的四维时间-空间 $t-r$,主要差别在于相空间是想象和抽象的,是非现实的,它的维数可以是有限的 n 维(即所有研究的对象有 n 个变量)或无穷维。此外,相空间的坐标还可以代表任意一个状态变量或状态参量的某个分量。

由任意两个状态变量支撑起来的抽象的物理空间(抽象平面)叫做相平面。对于任意一个二阶非线性微分方程:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \quad (1-5)$$

式中, $f(x, \dot{x})$ 是作用在单位质量点上的力; $\dot{x}$ 和 $\ddot{x}$ 分别表示质点的速度与加速度。质点的位置 x 和速度 $\dot{x}$ 刻画了该系统在任一时刻的状态,称为相,平面 $(x, \dot{x})$ 称作相平面。

为方便起见,令 $y = \dot{x}$, 那么方程(1-5)可写为普适的二元(以后称为维,广义维)动力方程组:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dx}{dt} = y \end{cases} \quad (1-6)$$

方程(1-6)更为普遍的形式是二维的自治动力系统,即

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (1-7)$$

所谓的自治动力系统就是方程右边的函数 $f(x, y)$ 与 $g(x, y)$ 都不含时间自变量 t 。反之, 如果 $f=f(x, y, t)$, $g=g(x, y, t)$, 则称为非自治动力系统。

在 $x-y$ 相平面里, 向量场为

$$w(x, y) = f(x, y)i + g(x, y)j = \dot{x}i + \dot{y}j \quad (1-8)$$

上式直观地描述了系统的演化行为。该向量场在相空间里表现为一簇带箭头方向的曲线, 即相轨道, 或称相速度流($w = \dot{x}i + \dot{y}j$)。每一条相轨道都是由无穷多的相点所组成的。由于运动是有方向的, 所以相点不仅代表系统每时刻的相位置, 还表示了相流的方向(相轨道的切线方向)。

在相空间(平面)里, 系统的状态由其位置和运动方向唯一确定, 因此, 相空间里的相点与系统的状态是唯一对应的。一个相点对应于一个状态, 反过来, 一个状态可以唯一地用一个相点来表示。

定态指的是在一定参数下不随时间变化的态, 也就是在相空间里静止不动的点, 即满足以下条件的点:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x} = 0 = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = \dot{y} = 0 = g(x, y) \end{cases} \quad (1-9)$$

由于方程(1-9)是一代数方程组, 容易求出其解: $x_{0i}, y_{0i}, (i=1, 2, \dots, n)$ 。

从某种意义上说, 知道了系统定态的个数和定态的各自特性, 就基本知道了系统的演化特性和物理场的空间分布(拓扑结构)。而求定态的过程则是将一个复杂甚至无法求解析解的微分方程组转化为简单、可解的代数方程组。这在数理分析史上是一个飞跃。

定态也称为平衡态(在某些文献中, 平衡态是指稳定的定态), 定态的稳定与否, 分别用稳定的态和不稳定的态表示。

在数学上, 还把满足方程(1-9)解的态叫做奇点。奇点的“奇”就是奇怪和不真实。因为方程(1-9)的左边为一组导数等于零的方程, 导数等于零就意味着没有确定的切线方向, 所以从数学的角度来看, 所有满足方程(1-9)解的点(即定态)可以有任意的切线方向。换句话说, 在任意一个态上可以存在无穷多的轨线, 这显然违背了状态与相点位唯一对应的唯一性定理。所以, 定态是不真实的态, 是“奇怪”的。事实上, 定态(奇点)表示的是当 $t \rightarrow \infty$ 时系统达到的可能的态(一个或多个)。 $t \rightarrow \infty$ 显然不是真实的, 而是一种理想的极限。

第二节 分岔理论及其应用

分岔理论^[5,6,24]是耗散结构理论、突变理论和混沌理论的基础。所有的耗散结构、突变和混沌现象都必须经过分岔。但分岔未必能出现耗散结构和混沌现象。所以, 分岔是耗散结构、突变和混沌产生的必要条件, 但不是充分条件。

一、吸引子与分岔

吸引子就是稳定的定态, 如稳定的结点、稳定的焦点。而不稳定的定态则称为排斥

子，如不稳定的结点、不稳定的鞍点、不稳定的焦点等。非线性动力系统与线性系统的最大区别之一就是复杂性。而复杂性的表现就是存在有多个吸引子和多个排斥子，而不只是一个平衡态。所以，线性系统只有一个吸引子，而非线性系统则在大多数情况下存在多个吸引子。因此，多个吸引子的存在就是分岔的前提。

下面通过一个例子说明分岔产生的条件，如对方程(1-10)所示的一维非线性系统：

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 + px \quad (p > 0) \quad (1-10)$$

系统存在 3 个平衡态：

$$\begin{cases} A_{01}: (x_{01} = 0) \\ A_{02}: (x_{02} = \sqrt{p}) \\ A_{03}: (x_{03} = -\sqrt{p}) \end{cases} \quad (1-11)$$

其特征值为：

$$\omega = -3x_0^2 + p \quad (1-12)$$

根据式(1-12)可知， A_{01} 是不稳定的结点， A_{02} 、 A_{03} 都是稳定的结点。所以系统存在一个排斥子和两个吸引子，如图 1-2 所示。

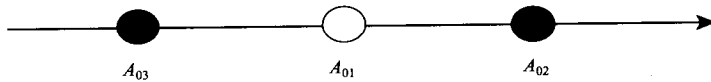


图 1-2 两个吸引子和一个排斥子共存

分岔，指的是由于参数的变化，系统因原平衡态失稳而进入新的平衡态的过程。例如对式(1-10)，当 $p \leq 0$ ，系统只有一个平衡态 A_{01} ，当参数由 $p \leq 0$ 变为 $p > 0$ 时系统存在三个平衡态： $A_{01}: (x_{01} = 0)$ 、 $A_{02}: (x_{02} = \sqrt{p})$ 、 $A_{03}: DK (x_{03} = -\sqrt{p})$ 。所以， $p = 0$ 为一分岔点。当参数由 $p \leq 0$ 变为 $p > 0$ 时，系统将从失稳的平衡态 A_{01} 分出两个新的平衡态 A_{02} 和 A_{03} 。

分岔点意味着原来的平衡态失稳而分出新的平衡态，所以，分岔点必定是奇点(平衡态)。因此，分岔点的必要条件是：

一维(元)：

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda) = 0 \quad (1-13)$$

二维(元)：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \quad (1-14)$$

式中， λ 代表某一控制参数。分岔意味着从一个态分岔出至少两个态或两个态分支，分岔点是若干奇点的一个，故要满足临界定态条件，即 $\partial f / \partial x = 0$ 。从稳定性分析理论可知，对于动力系统 $dx/dt = f(x, \lambda)$ ，如果 $f = 0$ 是奇点条件，那么 $\omega = \partial f / \partial x$ 则是奇点性质判别条件。

当 $\omega = \partial f / \partial x < 0$ 时，平衡态是稳定的；当 $\omega = \partial f / \partial x > 0$ 时，平衡态是不稳定的；当 ω