21世纪高职高专规划教材

公共基础系列

高等数学学习指导

（工科类）

主编　李美贞　陈宝华

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

北京交通大学出版社
http://press.bjtu.edu.cn

21 世纪高职高专规划教材·公共基础系列

高等数学学习指导
(工科类)

主　编　李美贞　陈宝华

副主编　李忠杰　王久福

赵明才　范彩荣　于静之

清华大学出版社

北京交通大学出版社

·北京·

内容简介

本书是21世纪高职高专规划教材·公共基础系列——《高等数学》(工科类)的配套用书,同时兼顾其他同类教材的内容,可以作为教师的"教学参考",又适合学生使用,对于成人自学也是难得的学习参考书。

本书涉及函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、二元函数微积分、常微分方程、拉普拉斯变换、级数、行列式、矩阵、线性方程组、概率论、数理统计共16章,各章都包含四部分:内容提要与学习指导、典型例题精解、部分习题解答与提示、单元自测题。书后附录中附有5套期末考试模拟试题,并给出了单元自测题和期末考试模拟试题的答案。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导:工科类/李美贞,陈宝华主编. —北京:清华大学出版社;北京交通大学出版社,2007.12

(21世纪高职高专规划教材·公共基础系列)

ISBN 978-7-81123-196-0

Ⅰ.高… Ⅱ.①李… ②陈… Ⅲ.高等数学-高等学校:技术学校-教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第163195号

责任编辑:黎 丹
出版发行:清华大学出版社 邮编:100084 电话:010-62776969
北京交通大学出版社 邮编:100044 电话:010-51686414
印 刷 者:北京市梦宇印务有限公司
经 销:全国新华书店
开 本:185×230 印张:17.25 字数:387千字
版 次:2007年12月第1版 2007年12月第1次印刷
书 号:ISBN 978-7-81123-196-0/O·51
印 数:1~4 000册 定价:26.00元

出版说明

高职高专教育是我国高等教育的重要组成部分，它的根本任务是培养生产、建设、管理和服务第一线需要的德、智、体、美全面发展的高等技术应用型专业人才，所培养的学生在掌握必要的基础理论和专业知识的基础上，应重点掌握从事本专业领域实际工作的基本知识和职业技能，因而与其对应的教材也必须有自己的体系和特色。

为了适应我国高职高专教育发展及其对教学改革和教材建设的需要，在教育部的指导下，我们在全国范围内组织并成立了“21世纪高职高专教育教材研究与编审委员会”（以下简称“教材研究与编审委员会”）。“教材研究与编审委员会”的成员单位皆为教学改革成效较大、办学特色鲜明、办学实力强的高等专科学校、高等职业学校、成人高等学校及高等院校主办的二级职业技术学院，其中一些学校是国家重点建设的示范性职业技术学院。

为了保证规划教材的出版质量，“教材研究与编审委员会”在全国范围内选聘“21世纪高职高专规划教材编审委员会”（以下简称“教材编审委员会”）成员和征集教材，并要求“教材编审委员会”成员和规划教材的编著者必须是从事高职高专教学第一线的优秀教师或生产第一线的专家。“教材编审委员会”组织各专业的专家、教授对所征集的教材进行评选，对所列选教材进行审定。

目前，“教材研究与编审委员会”计划用2 3年的时间出版各类高职高专教材200种，范围覆盖计算机应用、电子电气、财会与管理、商务英语等专业的主要课程。此次规划教材全部按教育部制定的“高职高专教育基础课程教学基本要求”编写，其中部分教材是教育部《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》的研究成果。此次规划教材按照突出应用性、实践性和针对性的原则编写并重组系列课程教材结构，力求反映高职高专课程和教学内容体系改革方向；反映当前教学的新内容，突出基础理论知识的应用和实践技能的培养；适应“实践的要求和岗位的需要”，不依照“学科”体系，即贴近岗位，淡化学科；在兼顾理论和实践内容的同时，避免“全”而“深”的面面俱到，基础理论以应用为目的，以必要、够用为度；尽量体现新知识、新技术、新工艺、新方法，以利于学生综合素质的形成和科学思维方式与创新能力的培养。

此外，为了使规划教材更具广泛性、科学性、先进性和代表性，我们希望全国从事高职高专教育的院校能够积极加入到“教材研究与编审委员会”中来，推荐“教材编审委员会”成员和有特色的、有创新的教材。同时，希望将教学实践中的意见与建议，及时反馈给我们，以便对已出版的教材不断修订、完善，不断提高教材质量，完善教材体系，为社会奉献更多更新的与高职高专教育配套的高质量教材。

此次所有规划教材由全国重点大学出版社——清华大学出版社与北京交通大学出版社联合出版，适合于各类高等专科学校、高等职业学校、成人高等学校及高等院校主办的二级职业技术学院使用。

21世纪高职高专教育教材研究与编审委员会

2007年10月

前　　言

当前我国的经济、科技和社会发展对高职高专教育的人才培养提出了许多更高的要求，高职高专教育已成为社会关注的热点，面临大好的发展机遇，我们组织了几位多年来从事高校和高职高专数学教学的一线教学骨干，根据教育部最新制定的“高职高专教育高等数学课程的教学基本要求”，结合高职高专工科类专业的特点和培养对象，编写了21世纪高职高专规划教材·公共基础系列——《高等数学》（工科类）教材，在该教材使用2年的基础上我们又根据需要编写了其配套用书——《高等数学学习指导》（工科类）。

本书对主教材的重点、难点逐一进行分析讲解；对典型例题进行归纳，着重理清解题的思路、方法和规律，以帮助学生正确地理解数学概念，提高学生的解题能力和数学素质。

本书保持了主教材的体系并按原来的章节编排，书中各章都包含四部分内容：内容提要与学习指导、典型例题精解、部分习题解答与提示、单元自测题。

“内容提要与学习指导”对各章节的基本概念、定理、定义、公式、运算法则等内容进行全面总结，明确指出了各章必须掌握的知识点、要求掌握的程度及它们之间的内在联系，并对解题过程中常见的问题进行分类。

“典型例题精解”对每一类习题常用的解题方法和解题技巧进行了总结，以使读者能举一反三，触类旁通。

“部分习题解答与提示”考虑到高职高专学生的特点，给出了主教材各章节主要练习题的详细解答和提示。

“单元自测题”根据解题中常见的题型及学生在学习中容易出现的问题，编制了自我测验题。

另外，在本书后的附录中还精选了几套期末考试模拟试题，供学生自我检查学习效果，以提高学生学习的主动性和积极性之用；并给出了单元自测题和期末考试模拟试题的答案。

本书是作者根据当前高等职业教育发展的趋势和广大高职高专教师的实际需要，以及学生的自身状况编写的，它以主教材为主要教科书，同时兼顾其他同类教材的内容，读者即使使用其他教材也可采用本书作为参考书。本书既可以作为教师的“教学参考”，又可以作为学生的“学习指南”。

鉴于编者水平有限，书中不当之处在所难免，敬请读者与同行指正。

编　者

2007年10月

目　录

第 1 章　函数 …… 1
1.1　内容提要与学习指导 …… 1
1.2　典型例题精解 …… 3
1.3　部分习题解答与提示 …… 5
1.4　单元自测题 …… 5
第 2 章　极限与连续 …… 7
2.1　内容提要与学习指导 …… 7
2.2　典型例题精解 …… 11
2.3　部分习题解答与提示 …… 14
2.4　单元自测题 …… 16
第 3 章　导数与微分 …… 20
3.1　内容提要与学习指导 …… 20
3.2　典型例题精解 …… 23
3.3　部分习题解答与提示 …… 28
3.4　单元自测题 …… 30
第 4 章　导数的应用 …… 33
4.1　内容提要与学习指导 …… 33
4.2　典型例题精解 …… 37
4.3　部分习题解答与提示 …… 40
4.4　单元自测题 …… 44
第 5 章　不定积分 …… 46
5.1　内容提要与学习指导 …… 46
5.2　典型例题精解 …… 49
5.3　部分习题解答与提示 …… 53
5.4　单元自测题 …… 59
第 6 章　定积分 …… 61
6.1　内容提要与学习指导 …… 61
6.2　典型例题精解 …… 65
6.3　部分习题解答与提示 …… 68

6.4　单元自测题…………………………………………………………………… 71
第 7 章　定积分的应用 ………………………………………………………… 73
7.1　内容提要与学习指导…………………………………………………………… 73
7.2　典型例题精解…………………………………………………………………… 75
7.3　部分习题解答与提示…………………………………………………………… 78
7.4　单元自测题……………………………………………………………………… 82
第 8 章　二元函数微积分 ……………………………………………………… 84
8.1　内容提要与学习指导…………………………………………………………… 84
8.2　典型例题精解…………………………………………………………………… 92
8.3　部分习题解答与提示…………………………………………………………… 95
8.4　单元自测题 ……………………………………………………………………… 101
第 9 章　常微分方程…………………………………………………………… 104
9.1　内容提要与学习指导…………………………………………………………… 104
9.2　典型例题精解 ………………………………………………………………… 106
9.3　部分习题解答与提示…………………………………………………………… 109
9.4　单元自测题 ……………………………………………………………………… 114
第 10 章　拉普拉斯变换 ……………………………………………………… 116
10.1　内容提要与学习指导………………………………………………………… 116
10.2　典型例题精解………………………………………………………………… 121
10.3　部分习题解答与提示………………………………………………………… 125
10.4　单元自测题…………………………………………………………………… 129
第 11 章　级数 ………………………………………………………………… 131
11.1　内容提要与学习指导………………………………………………………… 131
11.2　典型例题精解………………………………………………………………… 139
11.3　部分习题解答与提示………………………………………………………… 144
11.4　单元自测题…………………………………………………………………… 155
第 12 章　行列式 ……………………………………………………………… 157
12.1　内容提要与学习指导………………………………………………………… 157
12.2　典型例题精解………………………………………………………………… 160
12.3　部分习题解答与提示………………………………………………………… 162
12.4　单元自测题…………………………………………………………………… 164
第 13 章　矩阵 ………………………………………………………………… 166
13.1　内容提要与学习指导………………………………………………………… 166
13.2　典型例题精解………………………………………………………………… 171
13.3　部分习题解答与提示………………………………………………………… 175

13.4 单元自测题…… 176
第 14 章 线性方程组 …… 179
14.1 内容提要与学习指导…… 179
14.2 典型例题精解…… 183
14.3 部分习题解答与提示…… 187
14.4 单元自测题…… 190
第 15 章 概率论 …… 192
15.1 内容提要与学习指导…… 192
15.2 典型例题精解…… 205
15.3 部分习题解答与提示…… 209
15.4 单元自测题…… 215
第 16 章 数理统计 …… 218
16.1 内容提要与学习指导…… 218
16.2 典型例题精解…… 225
16.3 部分习题解答与提示…… 228
16.4 单元自测题…… 231

附录 A 期末考试模拟试题…… 233
附录 B 单元自测题参考答案…… 246
附录 C 期末考试模拟试题参考答案…… 260

第 1 章

函　数

1.1　内容提要与学习指导

微积分研究的主要对象是函数，因此熟练掌握函数的有关概念和性质对学好微积分很重要.

1. 函数的概念

设 D 为非空实数集，x 与 y 是两个变量. 如果对变量 x 在 D 中的每一个值，按照某种对应法则 f，变量 y 都有一个确定的实数值与之对应，那么就称变量 y 是变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$，$x\in D$ 或简记为 $y=f(x)$. 称 x 为自变量，y 为因变量. 称自变量的取值范围 D 为函数 f 的定义域；相应函数值的全体组成的集合 $\{y \mid y=f(x),\ x\in D\}$ 称为函数的值域，记为 $f(D)$.

学习函数时要特别注意以下几点.

(1) 函数定义有两个要素：一是对应关系或对应法则. 凡是函数，都有确定的对应关系或对应法则，但不一定有解析式. 事实上有很多函数是没有解析式的，如一天 24 小时内每一时刻的气温情况. 函数定义的另一要素是定义域. 求函数的定义域，应遵循以下原则：

① 在实际问题中自变量的取值范围，即定义域由实际意义确立；

② 在数学式中，定义域是使数学式有意义的自变量的取值范围.

(2) 要正确理解记号“f”. 例如 $y=f(x)=x^2+x$，则 $f(x+1)=(x+1)^2+(x+1)$，而 $f(x^2)=(x^2)^2+x^2$.

(3) 若两个函数有相同的定义域，且有相同的对应关系，则这两个函数相等. 这里必须强调同时满足这两个条件. 例如 $f(x)=|x|$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 是同一个函数.

(4) 分段函数.

① 一个分段函数只表示一个函数，不能看成几个函数.

② 分段函数的定义域等于这个函数各“段”区间的并集.

③ 求分段函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的函数值时，要把 $x=x_0$ 代入到 x_0 所在的区间相对应的数学式中去. 例如，符号函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

就是一个分段函数.

2. 函数的特性

1) 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 定义在关于原点对称的数集 I 上，若 $x\in I$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为偶函数；若 $x\in I$ 时，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为奇函数.

这里要特别强调，不论奇函数或偶函数都是在对称数集上讨论的函数特性. 离开对称数集就无法谈论函数的奇偶性.

2) 单调性

设 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义，对于 I 内任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ 成立，则称 $f(x)$ 在区间 I 内是单调增加的或称 $f(x)$ 是区间 I 内的单调增加函数；若 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$ 成立，则称 $f(x)$ 在区间 I 内是单调减少的或称 $f(x)$ 是区间 I 内的单调减少函数. 这两种函数统称为单调函数. 若上述两个不等式是“$<$”、“$>$”，则分别称 $f(x)$ 在区间 I 内是严格单调增加和严格单调减少.

3) 周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在非零常数 T，使得对任意 $x\in D$，有 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为 D 上的周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期. 其中最小正周期称为 $f(x)$ 的基本周期.

我们所见的周期函数一般都是三角函数，要会求函数的周期.

4) 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义，如果存在一个正数 M，使得对于任意的 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内有界；否则，称 $f(x)$ 在区间 I 内无界.

有界函数的界是不唯一的.

3. 反函数

给定函数 $y=f(x)$，$x\in D$，值域为 $f(D)$，如果把 y 作为自变量，x 作为因变量，则由关系式 $y=f(x)$ 所确定的单值函数 $x=g(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，即 $x=f^{-1}(y)=g(y)$，而称 $y=f(x)$ 为直接函数.

关于反函数，除理解好定义之外，还应掌握以下内容.

① 函数 $y=f(x)$，若 x 与 y 之间满足一一映射，则函数的反函数一定存在；若 x 与 y 之间不满足一一映射，但若把这个函数限制在定义域的某个区间上，使其能够满足一一映射的条件，则 $y=f(x)$ 在该区间上也存在反函数.

② 求函数 $y=f(x)$ 的反函数一般遵循如下步骤：先从 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$，再在 $x=f^{-1}(y)$ 中把 x 和 y 对调得出 $y=f^{-1}(x)$.

③ $y=f(x)$ 的图像与 $x=f^{-1}(y)$ 的图像是同一条曲线；而 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

④ 函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的增减性是一致的.

4. 基本初等函数

包括常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

5. 复合函数

设 y 是 u 的函数 $(y=f(u))$，u 是 x 的函数 $(u=g(x))$，当 x 在某一区间 I 上取值时，相应的 u 值使 y 有意义，则称 y 是 I 上关于 x 的复合函数，记为 $y=f(u)=f[g(x)]$，$x\in I$. 也称 $y=f[g(x)]$ 是由 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 复合而成的，其中 x 是自变量，u 称为中间变量.

学习复合函数时要注意以下几点.

① "对于 x 值所对应的 u 值，函数 $y=f(u)$ 有意义"是复合函数定义中的重要条件，如果不满足这个条件，就不能够构成复合函数. 例如，$y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$，这两个函数不能复合，因为当 x 取任何实数时，都有 $u=2+x^2>1$，而 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $|u|\leqslant 1$.

② 复合函数的中间变量可以不止一个.

③ 把一个复合函数分解成若干个较简单的函数，这里的简单函数是指由基本初等函数经过有限次四则运算而得到的函数.

6. 初等函数

凡是由基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算而得到的能够用一个数学式表示的函数统称为初等函数.

由初等函数的定义，可以分解为以下 4 个条件：

① 由基本初等函数和常数作为运算和复合的起点；

② 有限次的四则运算；

③ 有限次的函数复合步骤；

④ 能用一个解析式表示出来.

必须满足条件①，否则会导致错误.

1.2　典型例题精解

【例 1-1】 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\log_a(x+1)}$　　(2) $y=\dfrac{x}{\tan\dfrac{x}{2}}$

解 (1)要使函数 y 有意义，只需满足

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\ x+1>0\\ \log_a(x+1)\neq 0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\ x+1>0\\ x+1\neq 1\end{cases}$$

解得 $-1<x\leqslant 2$ 且 $x\neq 0$. 所以函数的定义域为 $(-1,\ 0)\cup(0,\ 2]$.

(2) 要使函数 y 有意义，只需满足

$$\begin{cases}\dfrac{x}{2}\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\\ \tan\dfrac{x}{2}\neq 0\end{cases}\quad(k\in\mathbf{Z})$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{x}{2}\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{x}{2}\neq k\pi\end{cases}\quad(k\in\mathbf{Z})$$

解得 $x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$. 所以函数的定义域为 $\{x\,|\,x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})\}$.

【例 1-2】 证明：函数 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 为奇函数.

证明 设 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$，因为

$$f(-x)=\log_a(-x+\sqrt{x^2+1})=\log_a\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=-\log_a(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$$

所以 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 为奇函数.

【例 1-3】 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\cos^2(3x+1)$ (2) $y=\arctan(\ln 3x)$

解 (1) 函数 $y=\cos^2(3x+1)$ 是由 $y=u^2$，$u=\cos v$，$v=3x+1$ 复合而成.

(2) $y=\arctan(\ln 3x)$ 是由 $y=\arctan u$，$u=\ln v$，$v=3x$ 复合而成.

【例 1-4】 已知 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，$f(3)=4$，求 $f(1)$ 和 $f(11)$ 的值.

解 由已知可知 $f(x)=f(x+2)$，所以

$$f(1)=f(1+2)=f(3)=4$$

$$f(11)=f(3+4\times 2)=f(3)=4$$

【例 1-5】 验证函数 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 的反函数就是它本身.

证明　先从 $y=\frac{1-x}{1+x}$ 中解出 x，得

$$x=\frac{1-y}{1+y}$$

再把上式中的 x，y 互换，得

$$y=\frac{1-x}{1+x}$$

可见所求函数的反函数就是它本身.

1.3　部分习题解答与提示

习题 1.1

1. 否. 因为对 $x\in[1,2]$ 的任一个值，y 都没有值与之对应.

2. (1) 否. 定义域不同　(2) 否. 对应关系不同.

3. (3) 提示：$\begin{cases}1-x>0\\1-x\neq 1\end{cases}$　(4) 提示：$\begin{cases}x+1>0\\\left|\frac{x}{2}\right|\leqslant 1\end{cases}$

1.4　单元自测题

1. 不等式 $0\leqslant(x-2)^2\leqslant 4$ 与 $0\leqslant x-2\leqslant 2$ 所表示的实数范围是否相同？

2. 函数关系有几个要素？何谓函数的定义域？两个函数相同指的是什么？下列各对函数相同吗？

(1) $f(x)=\frac{x}{x(x+1)}$ 与 $g(x)=\frac{1}{x+1}$

(2) $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=(\sqrt{x})^2$

(3) $f(x)=2\ln|x|$ 与 $g(x)=\ln x^2$

(4) $f(x)=\arcsin x$ 与 $g(x)=\frac{\pi}{2}-\arccos x$

3. 函数的奇偶性是怎样定义的？若 $\varphi(x)$ 为偶函数，则 $f[\varphi(x)]$ 必为偶函数吗？若 $\varphi(x)$ 为奇函数，则 $f[\varphi(x)]$ 必为奇函数吗？

4. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$　　(2) $f(x)=x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}(a>0)$

5. 证明：$f(x)=1-\ln x$ 是单调减少函数.

6. 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域是$[0, 1]$，试求：

(1) $f(x^2)$的定义域；

(2) $f(\sin x)$的定义域；

(3) $f(x+a)(a>0)$的定义域.

7. 指出下列函数分解及复合过程.

(1) $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=\ln x$，求 $y=f(x)=?$

(2) $y(x)=\mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x^2+1}}$.

8. 试证对于定义在区间$[-l, l]$上的任意函数 $f(x)$，都可以表示成一个偶函数与一个奇函数的和.

9. 将长为 l 的铁丝剪为两段，一段弯成圆，一段弯成正方形. 若设正方形的边长为 x，圆与正方形的面积和为 y. 试将 y 表示成 x 的函数，并写出 x 的变化范围.

第 2 章

极限与连续

2.1 内容提要与学习指导

极限与连续是数学中的重要基本概念，它是学习微积分学的理论基础．因此，掌握好极限和连续的有关概念对后面的学习至关重要．

1．极限

1）数列的极限

对于数列$\{y_n\}$，如果当n无限增大时，y_n无限接近于某一确定的常数A，则称数A为数列$\{y_n\}$当n趋于无穷时的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$或$y_n\to A(n\to\infty)$．如果数列$\{y_n\}$有极限为$A$，则称该数列$\{y_n\}$收敛于$A$，且称$\{y_n\}$为收敛数列，否则称为发散数列．

注意：① 如果数列存在极限，则其极限值是唯一的．

② 并不是任何数列都有极限．例如，数列$\{x_n\}=\{(-1)^n\}$无极限．有穷数列一定没有极限．

2）函数的极限

定义 1　如果当自变量x的绝对值无限增大时，函数$f(x)$无限接近于某一个确定常数A，则称A为函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限，记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$或$f(x)\to A(x\to\infty)$．

定义 2　设函数$y=f(x)$在$U^{\circ}(x_0)$内有定义，如果当$U^{\circ}(x_0)$内的自变量x无限趋近于x_0时，函数$f(x)$无限趋近于某一确定常数A，则称当x趋近于x_0时，$f(x)$以A为极限或称$f(x)$在x_0处的极限为A，记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$或$f(x)\to A(x\to x_0)$．

对于极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，需要说明以下几点．

① 函数$y=f(x)$在点x_0存在极限，并不要求$y=f(x)$在x_0有定义．因为考察函数的变化趋势时，突出$f(x)$在$x\to x_0$这一过程中的取值情况，因此必须要求$f(x)$在x_0的附近有

定义．至于 $f(x)$在点 x_0 有无定义，并不影响函数 $f(x)$的极限存在．也就是说，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$是否存在，与 $f(x)$在点 x_0 有没有定义无关．例如，函数

$$y=f(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x>0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处没有定义，但$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

② 由极限的定义不难得出：$\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$，$\lim\limits_{x\to x_0}c=c$.

③ 左极限和右极限．极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的充要条件是：$f(x_0+0)=f(x_0-0)$.

该结论常用来判定函数在一点 x_0 处的极限是否存在．例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ x+1, & x<0\end{cases}$$

在分段点 $x=0$ 处，$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$，而 $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1$．因为 $f(0+0)\neq f(0-0)$，所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在.

3）无穷小量和无穷大量

(1) 无穷小量

在自变量 x 的某一最终变化过程中，以零为极限的量称为 $x\to\Delta$ 时的无穷小量，简称为无穷小.

学习无穷小量要理解以下几点.

① 无穷小量不是一个很小的数，而是一个趋于零的变量，即函数.

② 常量中只有零是无穷小量.

③ 无穷小量是和某一极限过程联系着的．一个函数在这一极限过程中是无穷小量，而在另一极限过程中未必是无穷小量.

(2) 无穷小量与具有极限的函数的关系

即

$$\lim_{x\to\Delta}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha,\ \alpha\to 0(x\to\Delta)$$

(3) 无穷小量的比较

设 $f(x)$，$g(x)$是 $x\to\Delta$ 时的无穷小，

① 如果$\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则称 $f(x)$是 $x\to\Delta$ 时比 $g(x)$高阶的无穷小，或称 $g(x)$是比 $f(x)$低阶的无穷小，记为 $f(x)=o(g(x))(x\to\Delta)$.

② 如果$\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{f(x)}{g(x)}=C(C\neq 0)$，则称 $f(x)$是 $x\to\Delta$ 时与 $g(x)$同阶的无穷小.

③ 若$\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，则称 $f(x)$是 $x\to\Delta$ 时与 $g(x)$等价的无穷小，记作 $f(x)\sim g(x)(x\to\Delta)$.

等价无穷小是一个很有用的性质，在求两个无穷小的比值的极限时可借助于等价无穷小

的代换来简化计算. 但要注意，如果不是乘或除的情况，一般不用等价代换，否则容易导致错误. 例如，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$，不能直接用 x 代替 $\tan x$ 和 $\sin x$. 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\neq\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}$$

正确的做法如下.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}\ (x\to 0\text{ 时，}\tan x\sim x)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}$$

(4) 无穷小量与无穷大量的关系

① 如果$\lim\limits_{x\to\Delta}\alpha(x)=0(\alpha(x)\neq 0)$，则$\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{1}{\alpha(x)}=\infty$；

② 如果$\lim\limits_{x\to\Delta}\alpha(x)=\infty$，则$\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{1}{\alpha(x)}=0$.

4) 极限的运算法则（略）

5) 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

这个极限的特征是：无穷小量的正弦和它自身的比的极限等于 1，即$\dfrac{\sin\text{（无穷小）}}{\text{无穷小}}\to 1$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

这个极限的特征是：底数由两项组成，一项是 1，另一项是无穷小，指数是底数中无穷小的倒数(无穷大)，即$(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}\to\mathrm{e}\quad(\alpha(x)\to 0)$.

2. 函数的连续性

1) 连续的概念

设函数 $y=f(x)$在 x_0 的某邻域$U(x_0)$内有定义，如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$或者$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 则称 $f(x)$在点 x_0 处连续，称 x_0 为 $f(x)$的一个连续点.

函数在 x_0 点连续的定义中，必须满足 3 个条件：一是 $f(x)$在 x_0 及其附近有定义；二是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在；三是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 只要有一条不满足，$f(x)$在点 x_0 就是间断的.

关于函数在 x_0 点连续的定义(两种定义)，它们虽然形式不同，但所表达的是同一个概念，本质上并无区别. 由于它们形式不同，在具体使用时，对不同问题要选用不同的定义形式，以求使问题简化.

2) 函数的间断点

由函数 $f(x)$在点 x_0 连续的条件可知，间断点 x_0 至少属于下列 3 种情况之一：