

奥博丛书

国际数学

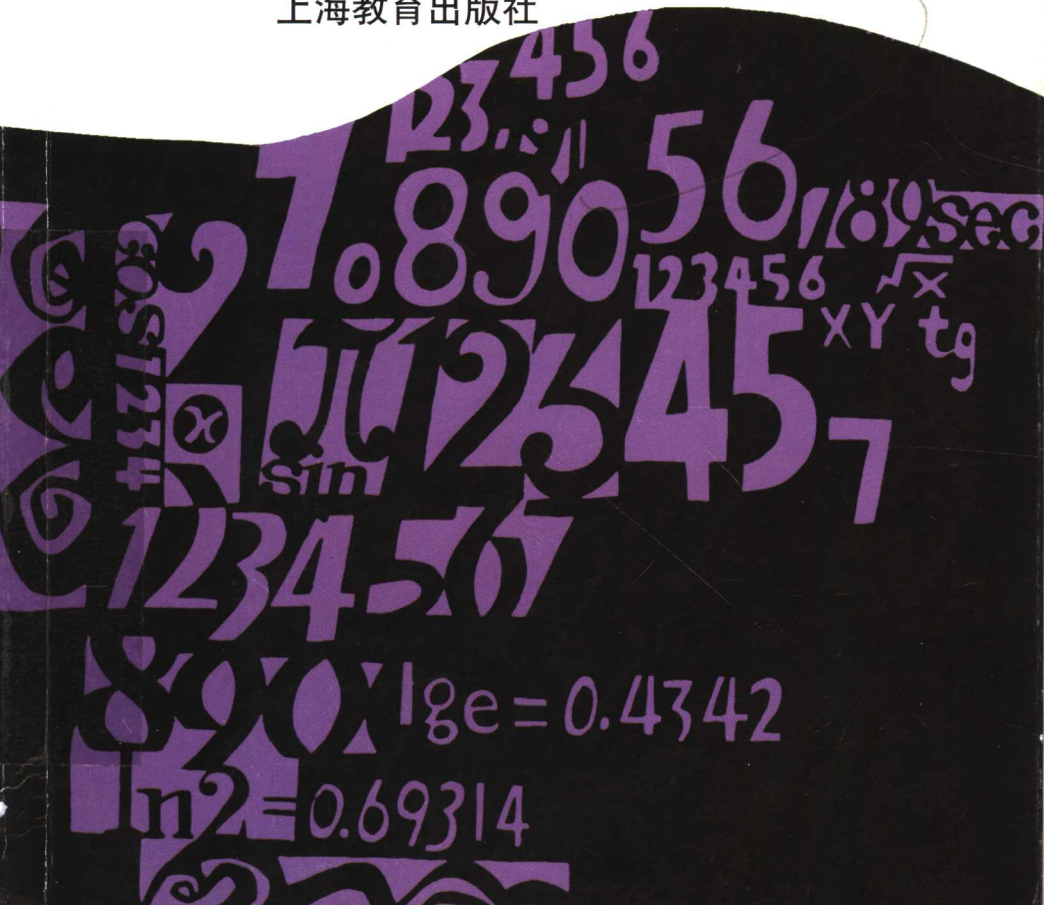
奥林匹克研究

熊 斌 田廷彦 编著

GUOJI SHUXUE

AOLINPIKE YANJIU

上海教育出版社



奥博丛书

G633.6/46

2008

国际数学 奥林匹克研究

熊斌 田廷彦 编著

GUOJI SHUXUE

AOLINPIKE YANJIU

||

上海教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

国际数学奥林匹克研究 / 熊斌, 田延彦编著. —上海: 上海教育出版社, 2008. 3

ISBN 978-7-5444-1252-0

I. 国… II. ①熊…②田… III. 中学-数学-竞赛-研究-世界 IV. G633.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第035849号

奥博丛书

国际数学奥林匹克研究

熊斌 田延彦 编著

上海世纪出版股份有限公司
上海教育出版社出版发行

易文网: www.ewen.cc

(上海永福路123号 邮政编码: 200031)

各地新华书店经销 江苏启东人民印刷有限公司印刷

开本 850×1168 1/32 印张21.25 插页4

2008年3月第1版 2008年3月第1次印刷

印数 1-5,000本

ISBN 978-7-5444-1252-0/0·0018 定价: 35.00元

(如发生质量问题,读者可向工厂调换)

前 言

你们要多锻炼,这样对身体有好处.回到家要多做数学,这样对头脑有好处.

——A·施瓦辛格

本书是关于国际数学奥林匹克(International Mathematical Olympiads,简称IMO)的一部比较专门性的著作,包括关于IMO的详细资料 and 分类研究,也有迄今为止IMO试题(中英文对照)及解答(不少经改进过),还有数学中一些常用的结果和方法,以供参赛选手、培训教师和广大数学爱好者参考.

自1894年匈牙利正式举办数学竞赛以来,这项活动一直得到世界各国的的大力支持.人们非常贴切地把数学竞赛比喻为“思维的体操”,前苏联更是干脆称其为“数学奥林匹克”,比以往的称呼——“数学竞赛”,它更能体现出一种追求卓越才智的奥林匹克竞技精神.到1959年,数学竞赛的国际化成熟了,“国际数学奥林匹克”(IMO)就应运而生.数学竞赛史上翻开了崭新的一页.到2006年,IMO已经举行了47届,已有91国家和地区参赛.

IMO的试题新颖别致,内容覆盖面广,涉及到了数论、代数(包括数列、函数、不等式、多项式等)、几何、组合、函数方程等,许多试题出自名家之手,体现了现代数学的思想与方法,又经过各国领队的挑选,值得我们认真学习与研究.

在一切学问中,数学的壁垒大概是最深的;人与人数学能力的差异容易辨别.正是由于这个特点,数学竞赛便与体育竞技一样,有了比较一致的评价标准,并几乎从一开始就得到了数学界、教育界、心理学界乃至社会各界的广泛认同.

后来,又发明了“奥林匹克数学”一词,把数学竞赛作为一种独特的学科,与中学(初等)数学、高等数学独立并称.而时下流行的新名词——“奥数”——究竟是由哪一个词演变而来,本书当然不去研究;笔者欣赏这个词,也确实同时想把它理解为“奥妙的数学”.本书力求体现数学竞赛的竞技和奥妙,读者一定会有所感受.

十年前,上教社便邀请我们写一本关于IMO研究的书.我们便着手查阅了大量的资料,对历届试题和解答进行了一些初步的探索,但总感觉还不够完善.近年来,我们又进行了一些讨论和研究,对历届IMO试题重新进行了分类和整理,除了做简化与严格化处理外,还对部分试题提供了多种好的解法.作者之一又担任过中国队的领队、副领队,参与了IMO的全过程,对IMO的认识又进了一步.摆在读者面前的这本拙著,便是作者的一些经验和体会.

感谢著名数学家、中国数学会前任理事长王元院士为此书题写书名;还要感谢我们的师长和朋友:袁宗沪、单墀、王杰、张奠宙、顾鸿达、曾容、刘鸿坤、舒五昌、黄宣国、吴建平、余红兵、刘诗雄、陈永高、李胜宏、冷岗松、朱华伟、葛军、冯志刚,没有他们多年来对我们的帮助和指导,此书的出版是不可能的.我们还要感谢历届中国队的领队和副领队:王寿仁、袁宗沪、梅向明、常庚哲、舒五昌、马希文、单墀、刘鸿坤、黄玉民、苏淳、严镇军、杨路、杜锡录、黄宣国、夏兴国、张筑生、王杰、陈传理、吴建平、陈永高、李胜宏、冯志刚、王建伟、冷岗松、朱华伟,从第26届起的中文试题是用他们翻译的简体中文版.

本书在编写过程中,参阅了一些国内外的资料,这里就不一一列举致谢了.本书第二作者还感谢于超英、毛莉萍、夏钟英和浦国雄等老师.纵使岁月无情流逝,往事仍将常驻心中.

最后还需要说明的是,不少家长个个“望子成龙”.愿望固然美好,但也要切乎实际.现在是市场经济时代,人才是靠竞争脱颖而出的,而不是单靠培养出来的.竞争就有个机会成本在,你不行就让给别人.所谓“世上无难事,只要肯登攀”,只是一种勉励罢了.尤其是IMO级别的奥赛,都是有一定难度的,要求参赛选手对本学科有非凡的悟性,这并不是每一位同学通过努力就可以办到的.希望大家量力而行.当然,如

不以过于功利的目的来看待数学,那就更好.当代最伟大的数学家之一——爱多士(P. Erdős, 1913—1996),一生四海为家,只为数学而生存,身后仅留下两万多美元,但他的1400多篇论文,以及那句极富哲理与感召力的名言——“最好的证明都写在上帝的书上,数学家就是那些有幸瞥见一页半纸的人”,却是留给每一位数学爱好者的巨大财富.

我们把第1届~第47届试题分为:数论(N),代数(A),不等式(I),几何(G),组合与其他(C),函数方程(F)六大类,并把试题和解答分为两部分:试题是按照每一届的顺序编排的,每个试题后面有记号(X/n),X表示所属类的字母N,A,I,G,C,F,而n表示所属类中的题号,例如,(A/8)表示这个题的解答在代数部分的第8题;解答部分是按内容N,A,I,G,C,F编排的,每个试题前的记号(m-n)表示这个题是第m届第n题,例如(18-2)表示这个题是第18届的第2题.这样的编排方式是一个尝试,希望有利于学生的学习和老师的辅导.

本书篇幅较大,虽然作者认真仔细地核查了多遍,但囿于我们的水平,不当乃至错误之处恐难避免,敬请读者不吝指正.

作者

2006年8月于上海

国际数学奥林匹克研究

王元



著名数学家陈省身教授接见中国国家队领队

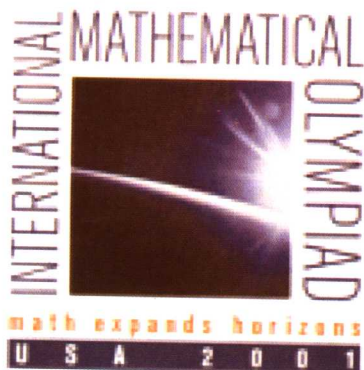


著名数学家陈省身教授在给数学竞赛获奖学生发奖



第46届IMO中国队4个获得满分的学生在领奖

近几年的部分IMO的LOGO



2001年第42届IMO的Logo



2004年第45届IMO的Logo

47th INTERNATIONAL
MATHEMATICAL
OLYMPIAD
LJUBLJANA, SLOVENIA
2006



2006年第47届IMO的Logo



2007年第48届IMO的Logo

丛书序言

一本武功秘笈！

找到它，勤加练习，就能成为武林高手。

这是金庸等人常写的故事。

这套奥博丛书，其中就有若干本或许可以称为解题秘籍。当然，得到它之后，要成为解题高手，还得注意：

一、勤加练习。因为解题是实践性的技能，只能通过模仿和实践来学到它。

二、循序渐进。孔子说：“欲速则不达。”不能操之过急。一个问题或一种方法，彻底弄清楚了，再往下看。切忌囫囵吞枣，食而不化。

三、不要迷信书本。“尽信书，则不如无书。”作者也有可能出错。“乾坤大挪移”第七层心法的一十九句就是“单凭空想而想错了的。”其实要成为真正的高手，不能依赖秘籍，而要自创新招。

这套奥博丛书，不只是解题的秘籍。它的作者阵营庞大，视角不尽相同，写法各有特点。或综述，或专题；或讲思想，或谈策略；或提供翔实材料，或介绍背景知识……。

据我了解，奥博丛书原本并不是一套丛书。它既没有预先设定的宏伟的出书规划，也不能保证其中的每一本都同样精彩。时间，才是考验它们的唯一准则。它不像其他丛书那样，追求在同一时间出齐；而是细水长流，渐渐汇聚成河。除已出的、即出的十余种外，想必还会继续推出新的品种。

开卷有益。相信这套丛书能很好地普及数学知识，增加读者对数学的理解，提高数学的品味(taste)，也就是鉴赏能力。祝愿这套丛书能够伴随读者度过一段愉快的时光。

单 埏

2006年3月16日

无 题

碎玉化紫烟，群芳落碧瑶。
飘然入仙境，恍惚出尘嚣。
但凡空度月，又见雁成行。
何时为君故，总把闲愁招。



作者介绍

熊斌 第46届国际数学奥林匹克中国队领队、主教练，中国数学奥林匹克委员会委员，多次参与中国数学奥林匹克、全国初中数学竞赛、全国联赛、西部数学奥林匹克、女子数学奥林匹克、国际城市青少年数学邀请赛等命题工作，指导了多名学生获得了IMO的金牌，在国内外发表了80余篇论文，主编和编著了100多本书。



作者介绍

田廷彦 中学就读于华东师范大学第一附属中学，期间曾进入储能中学和上海中学理科班，多次获得国家级与市级数学竞赛一等奖。1995年毕业于上海交通大学应用数学系。多年来一直参与奥数方面的工作（包括命题、写文章、写书和教学活动等），擅长几何，其次是数论与不等式。对科普也颇有兴趣与涉猎。

目 录

前言	1
第 1 章 国际数学奥林匹克竞赛(IMO)概况	1
§ 1.1 数学奥林匹克的由来及影响	1
§ 1.2 数学竞赛的命题、内容和教育价值	6
§ 1.3 中国选手参加 IMO(1985~2006)的情况	11
第 2 章 重要的定理与方法	18
§ 2.1 数论	19
2.1.1 整数与整除	19
2.1.2 同余	20
2.1.3 一次不定方程及一般不定方程	22
2.1.4 同余式与同余方程	23
2.1.5 取整函数 $[x]$	23
2.1.6 二次剩余	24
2.1.7 二次不定方程	25
§ 2.2 代数	26
2.2.1 集合与映射初步	26
2.2.2 方程、方程组	28
2.2.3 复数	28
2.2.4 函数	29
2.2.5 三角函数	34
2.2.6 数列与数学归纳法	36
2.2.7 多项式	40

§ 2.3	不等式	46
§ 2.4	几何与向量	51
2.4.1	面积公式与面积方法	52
2.4.2	三角形的性质	54
2.4.3	圆	54
2.4.4	几何计算	55
2.4.5	正弦定理、余弦定理及其他三角方法的应用	57
2.4.6	共线点与共点线	58
2.4.7	交比与调和点列	60
2.4.8	Simson 线与垂足三角形	61
2.4.9	完全四边形	62
2.4.10	几何变换	62
2.4.11	几何不等式与几何极值	66
2.4.12	立体几何	67
2.4.13	解析几何	69
2.4.14	向量	70
§ 2.5	组合	71
2.5.1	组合计数	72
2.5.2	狄利克雷(Dirichlet)原理(抽屉原理)	77
2.5.3	极端原理	77
2.5.4	图论	77
2.5.5	组合几何	81
§ 2.6	函数方程	86
2.6.1	函数迭代	86
2.6.2	函数方程	86
§ 2.7	常用解题方法概览	88
第 3 章	IMO(1959~2006)试题(中英文)	129
第 4 章	IMO(1959~2006)试题分类详解	249

§ 4.1	数论(N)	252
§ 4.2	代数(A)	309
§ 4.3	不等式(I)	356
§ 4.4	几何(G)	384
§ 4.5	组合与其他(C)	478
§ 4.6	函数方程(F)	541
第 5 章 留给数学爱好者的思考		567
附录 1	IMO(1959~2006)各国成绩表	576
附录 2	怀尔斯在 IMO 闭幕式上鼓舞人心的讲话	655
附录 3	从 IMO 金牌到菲尔兹奖——数学神童陶哲轩的工作 与人生	660

第 1 章 国际数学奥林匹克竞赛(IMO)概况

对于数学来说,整个文明世界就是一个国家.

——D·希尔伯特

§ 1.1 数学奥林匹克的由来及影响

诞生于 1959 年的国际数学奥林匹克竞赛(International Mathematical Olympiad, 简称 IMO), 是世界范围内青少年最高级别的智力活动之一.

早在 IMO 之前, 世界上已有不少国家开始搞数学竞赛, 主要集中在东欧和亚洲地区. 除了各国数学普及教育的交流和趋同, 国家级竞赛的成功举办, 也是 IMO 的基础. 这些竞赛中, 影响比较大的是匈牙利、前苏联和美国. 这里作一简要回顾.

1894 年, 匈牙利教育部门通过一项决议, 准备在中学举办数学竞赛. 当时著名科学家 J·埃特沃什(J. von Etötvös)男爵担任教育部长. 在他的积极支持下, 这项比赛得到了发扬. 部长的儿子、物理学家 R·埃特沃什(R. von Etötvös)由于成功地用实验验证了爱因斯坦广义相对论的等效原理, 这是匈牙利科学在世界舞台上崭露头角的标志性事件, 从此匈牙利数学竞赛的奖励亦被称作“埃特沃什奖”. 这是世界上最早的有组织地举办的数学竞赛. 后来匈牙利也确实因此产生了许多著名科学家, 比如分析学家费叶尔(L. Fejér)、舍贵(G. Szegö)、拉多(T. Radó)、哈尔(A. Haar)、黎斯(M. Riesz)、组合数学家寇尼希(D. König), 以及举世闻名的空气动力学家冯·卡门(T. von Kármán), 1994 年获诺贝尔经济学奖的博弈论大师豪尔绍尼(J. C. Harsanyi)等, 都是