



21 世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

高等数学

第六版

全程导学及习题全解

上册

主编 王进良

编委 周 珑 冯广庆

审核 张广丽

- ◆知识归纳 梳理主线重点难点
- ◆习题详解 精确解答教材习题
- ◆提高练习 巩固知识迈向更高



中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House



21 世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAO DENG YU ANXIAO JING DIAN JIAO CAI TONG BU FU DAO

图书在版编目(CIP)数据

高等数学全程导学及习题全解. 上册 / 王进良主编.
—北京: 中国时代经济出版社, 2007.9

高等数学

第六版

全程导学及习题全解

上册

主编 王进良

编委 周 珑 冯广庆

审核 张广丽

- ◆知识归纳 梳理主线重点难点
- ◆习题详解 精确解答教材习题
- ◆提高练习 巩固知识迈向更高



中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

图书在版编目(CIP)数据

高等数学全程导学及习题全解. 上册 / 王进良主编.

—北京: 中国时代经济出版社, 2007.9

(21 世纪高等院校经典教材同步辅导)

ISBN 978-7-80221-391-3

I. 高... II. 王... III. 高等数学—高等学校—教学参考资料

IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 104011 号

高等
数学
全程
导学
及习
题全
解(上
册)

王
进
良
主
编

出版者	中国时代经济出版社
地 址	北京东城区东四十条 24 号 青蓝大厦 11 层东办公区
邮 编	100007
电 话	(010)68320825 (发行部) (010)88361317 (邮购)
传 真	(010)68320634
发 行	各地新华书店
印 刷	北京鑫海达印刷有限公司
开 本	880 × 1230 1/32
版 次	2007 年 9 月第 1 版
印 次	2007 年 9 月第 1 次印刷
印 张	12.875
字 数	310 千字
印 数	1~5000 册
定 价	12.00 元
书 号	ISBN 978-7-80221-391-3

版权所有 侵权必究

内 容 简 介

本书是根据由高等教育出版社出版, 同济大学应用数学系主编的《高等数学》(第六版)(上、下), 而编写的一本配套学习辅导和习题解答教材。全书紧扣教材内容, 将各章节全部习题给出详细解答, 思路清晰, 逻辑缜密, 循序渐进的帮助读者分析并解决问题, 内容详尽, 简明易懂。本书对各章的知识点进行了归纳和提炼, 帮助读者梳理各章脉络, 统揽全局。在对《高等数学》(上、下)教材全部习题进行分析与讲解的基础上, 根据每章的知识重点, 还精选了一些具有代表性的典型例题, 方便读者迅速掌握各章的重点和难点。

本书可作为本科阶段学生和自考生学习“高等数学”课程的学习辅导材料和复习参考用书, 以及工科考研强化复习的指导书, 也可以作为教授“高等数学”课程教师的教学参考用书。

前 言

“高等数学”是解决理工科数学问题和工程实际问题的重要理论基础和实用工具,也是理工科各专业研究生入学考试的内容。为了帮助广大学生更好的学习和掌握“高等数学”课程的理论精髓和解题方法,我们根据同济大学应用数学系编写的《高等数学》(第六版)教材,编写了这本辅导资料。本辅导教材根据《高等数学》(第六版)教材中每一章的内容,编写了以下几方面的内容:

本章重点内容导学:精练了各章中的主要知识点,理清各知识点之间的脉络联系,囊括了主要定理及相关推论和重要公式等,帮助读者迅速了解本章重要知识点,系统理解各章的体系结构,奠定扎实的理论基础。

典型例题讲解:精选具有代表性的重点题型进行讲解,分析问题的突破点,指引解决问题的思路,旨在帮助读者学会独立思考的方式和分析问题的办法。习题全解:依据教材各章节的习题,进行详尽的解答。考虑到不同层次读者的需求,在解答过程中,对于重点习题进行了分析和讲解,归纳解题技巧。

同步自测题及解析:根据教学大纲要求及教学重点,编写了一套难易适中的自测题,并对自测题进行了详细的解答。

本书由王进良、周珑、冯广庆、孟慧、杨春等同志编写,全书由张广丽审核。本书编写过程中得到杜心康、宁建建等同志的大力协助,并得到中国时代经济出版社的领导和有关编辑的大力支持,为此表示衷心的感谢!对《高等数学》(第六版)教材的作者——同济大学应用数学系的老师们,表示衷心的感谢!

由于编者水平有限,加之时间仓促,本书难免有缺点和疏漏,存在一些不妥之处,敬请各位专家及广大读者批评指正。

编 者

2007年8月

目 录

第一章 函数与极限	(1)
本章重点内容导学	(1)
典型例题讲解	(2)
习题全解	(6)
习题 1-1	(6)
习题 1-2	(17)
习题 1-3	(20)
习题 1-4	(24)
习题 1-5	(27)
习题 1-6	(30)
习题 1-7	(33)
习题 1-8	(35)
习题 1-9	(39)
习题 1-10	(42)
总习题一	(44)
同步自测题及解析	(51)
第二章 导数与微分	(56)
本章重点内容导学	(56)
典型例题讲解	(57)
习题全解	(60)
习题 2-1	(60)
习题 2-2	(66)
习题 2-3	(75)
习题 2-4	(79)
习题 2-5	(85)
总习题二	(90)

同步自测题及解析	(97)
第三章 微分中值定理与导数的应用	(101)
本章重点内容导学	(101)
典型例题讲解	(101)
习题全解	(106)
习题 3-1	(106)
习题 3-2	(111)
习题 3-3	(115)
习题 3-4	(118)
习题 3-5	(128)
习题 3-6	(136)
习题 3-7	(141)
习题 3-8	(145)
总习题三	(148)
同步自测题及解析	(156)
第四章 不定积分	(160)
本章重点内容导学	(160)
典型例题讲解	(160)
习题全解	(166)
习题 4-1	(166)
习题 4-2	(173)
习题 4-3	(182)
习题 4-4	(189)
习题 4-5	(197)
总习题四	(204)
同步自测题及解析	(217)
第五章 定积分	(222)
本章重点内容导学	(222)
典型例题讲解	(222)
习题全解	(230)
习题 5-1	(230)
习题 5-2	(238)

习题 5-3	(244)
习题 5-4	(254)
习题 5-5	(257)
总习题五	(260)
同步自测题及解析	(272)
第六章 定积分的应用	(279)
本章重点内容导学	(279)
典型例题讲解	(279)
习题全解	(284)
习题 6-2	(284)
习题 6-3	(296)
总习题六	(301)
同步自测题及解析	(304)
第七章 微分方程	(308)
本章重点内容导学	(308)
典型例题讲解	(309)
习题全解	(314)
习题 7-1	(314)
习题 7-2	(317)
习题 7-3	(323)
习题 7-4	(332)
习题 7-5	(341)
习题 7-6	(350)
习题 7-7	(356)
习题 7-8	(362)
习题 7-9	(373)
习题 7-10	(377)
总习题七	(386)
同步自测题及解析	(399)

第一章 函数与极限

本章重点内容导学

一、映射与函数

1. 集合及映射的概念

2. 函数的定义及函数的二要素

$\left\{ \begin{array}{l} \text{定义域} \\ \text{对应规律} \end{array} \right.$

3. 函数的特性

有界性、奇偶性、单调性、周期性

4. 初等函数的类型

二、极限

1. 数列的极限

(1) “ $\epsilon-N$ ”定义及其应用

(2) 收敛数列的性质

唯一性、有界性、保号性

(3) 极限存在准则

夹逼准则、单调有界准则、柯西准则

2. 函数的极限

(1) “ $\epsilon-\delta$ ”定义及其应用

(2) 函数极限的性质

唯一性、局部保号性

3. 无穷小与无穷大的定义、关系

4. 极限运算法则及存在准则

5. 两个重要极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

三、函数的连续性

1. 函数的连续性

2. 函数的间断点

第一类间断点: $\begin{cases} \text{可去间断点} \\ \text{跳跃间断点} \end{cases}$

第二类间断点: $\begin{cases} \text{无穷间断点} \\ \text{振荡间断点} \end{cases}$

3. 连续函数的和、差、积、商的连续性

4. 闭区间上连续函数的有界性与最大值最小值定理, 零点定理与介值定理.

典型例题讲解

例 1 求函数 $f(x) = \arcsin \sqrt{3x-1} + \frac{1}{\ln(x-\frac{1}{2})}$ 的定义域.

解 当 $\arcsin \sqrt{3x-1}$ 和 $\ln(x-\frac{1}{2})$ 同时有定义时, 函数才有定义.

$$\text{所以 } \begin{cases} 0 \leq \sqrt{3x-1} \leq 1 \\ 3x-1 \geq 0 \\ x-\frac{1}{2} > 0 \\ x-\frac{1}{2} \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{解上述不等式可得 } \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \\ x \geq \frac{1}{3} \\ x > \frac{1}{2} \\ x \neq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$\therefore$ 函数的定义域为 $\frac{1}{2} < x \leq \frac{2}{3}$ 或 $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$.

例 2 设 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$, 求 $f(2x+\frac{1}{2})+f(2x-1)$ 的定义域.

解 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$, 要使 $f(2x + \frac{1}{2}) + f(2x - 1)$ 同时有定义.

$$\text{可得} \begin{cases} -1 < 2x + \frac{1}{2} < 1 \\ -1 < 2x - 1 < 1 \end{cases}$$

$$\text{解不等式可得} \begin{cases} -\frac{3}{4} < x < \frac{1}{4} \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

$\therefore$ 函数的定义域为 $0 < x < \frac{1}{4}$ 或 $(0, \frac{1}{4})$.

例 3 设

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 1+x & x \leq 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -x^2 & x > 0 \\ x & x \leq 0 \end{cases}$$

求 $f[g(x)], f[f(x)], g[g(x)]$.

$$\text{解} \quad f[g(x)] = \begin{cases} f(-x^2) & x > 0 \\ f(x) & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1-x^2 & x > 0 \\ 1+x & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f[f(x)] = \begin{cases} f(x) & x > 0 \\ f(1+x) & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x & x > 0 \\ 1+x & -1 < x \leq 0 \\ 2+x & x \leq -1 \end{cases}$$

$$g[g(x)] = \begin{cases} g(-x^2) & x > 0 \\ g(x) & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} -x^2 & x > 0 \\ x & x \leq 0 \end{cases}$$

例 4 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1+a^n+a^{2n}+a^{3n}} (0 \leq a \leq 1)$.

解 当 $0 \leq a \leq 1$ 时, $1 \leq \sqrt[n]{1+a^n+a^{2n}+a^{3n}} \leq \sqrt[n]{4}$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{4} = 1$$

由夹逼定理有.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1+a^n+a^{2n}+a^{3n}} = 1.$$

例 5 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$.

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})}{(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2+1) - (x^2-1)}{(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})} = 0.$$

例 6 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-12}{x^2-6x+9}$.

解
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-12}{x^2-6x+9} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+4)(x-3)}{(x-3)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{x-3} \\ &= \frac{2+4}{2-3} = -6. \end{aligned}$$

例 7 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

解 解法一
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1+2\sin x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} [(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^2 = e^2. \end{aligned}$$

解法二
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1+2\sin x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} [(1+2\sin x)^{\frac{1}{2\sin x}}]^{\frac{2\sin x}{x}} \\ &= e^2. \end{aligned}$$

例 8 求 $\lim_{x \rightarrow 2} (\frac{12}{x^3-8} - \frac{1}{x-2})$.

解
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (\frac{12}{x^3-8} - \frac{1}{x-2}) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{12 - (x^2+2x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2-2x+8}{(x-2)(x^2+2x+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x+4)}{x^2+2x+4} \\ &= -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

例 9 已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x^2}{1+2x} + ax + b) = 2$, 求常数 a, b .

$$\begin{aligned}
 \text{解 由 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{1+2x} + ax + b \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + (ax+b)(1+2x)}{1+2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+2a)x^2 + (a+2b)x + b}{1+2x} = 2
 \end{aligned}$$

$$\text{可得 } \begin{cases} 1+2a=0 \\ \frac{a+2b}{2}=2 \end{cases}$$

$$\text{解得 } a = -\frac{1}{2}, b = \frac{9}{4}.$$

例 10 设 $f(x) = ax^2 + bx, g(x) = \sin 2x$. 试讨论当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 无穷小量的关系.

$$\text{解 } g(x) = \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x) \sim 2x$

$\therefore$ 当 $b=0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小量;

当 $b=2$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的等价无穷小量;

当 $b \neq 0$ 且 $b \neq 2$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的同阶无穷小量.

例 11 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x} & x < 0 \\ 6 & x = 0 \\ \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}} & x > 0 \end{cases}$$

问 a 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续?

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^3}{x - \arcsin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2}{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2}{\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2 \sqrt{1-x^2} (\sqrt{1-x^2}+1)}{(\sqrt{1-x^2}-1)(\sqrt{1-x^2}+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -3a \sqrt{1-x^2} (\sqrt{1-x^2}+1) \\
 &= -6a
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \cdot \frac{x}{4}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 4 \cdot \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 4 \cdot \frac{ae^{ax} + 2x - a}{2x} \\
 &= 2a^2 + 4
 \end{aligned}$$

如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则有

$$\begin{cases} -6a = 6 \\ -6a = 2a^2 + 4 \end{cases}$$

解方程可得 $a = -1$

$\therefore$ 当 $a = -1$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

例 12 证明方程 $x^6 - 2x^5 + 5x^3 + 1 = 0$ 在区间 $[-1, 0]$ 上有一个根.

证明 令 $f(x) = x^6 - 2x^5 + 5x^3 + 1$,

则 $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上连续,

而且 $f(0) = 1 > 0$, $f(-1) = -1 < 0$.

由零点定理可知在 $[-1, 0]$ 内至少存在一点 ξ ($-1 < \xi < 0$),

使得 $f(\xi) = 0$.

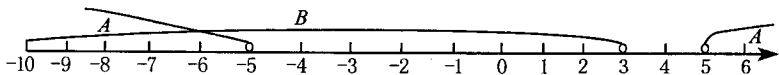
$\therefore \xi$ 是 $x^6 - 2x^5 + 5x^3 + 1 = 0$ 在 $[-1, 0]$ 之间的一个根.

习题全解

习题 1-1

1. 设 $A = (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$, $B = [-10, 3)$, 写出 $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ 及 $A \setminus (A \cap B)$ 的表达式.

解 $A = (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$, $B = [-10, 3)$, 在数轴上画出 A, B .



$$\therefore A \cup B = (-\infty, 3) \cup (5, +\infty), A \cap B = [-10, -5)$$

$A \setminus B$ 即 A, B 的差集.

$$A \setminus B = (-\infty, -10) \cup (5, +\infty), A \setminus (A \setminus B) = [-10, -5).$$

2. 设 A, B 是任意两个集合, 证明对偶律: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

证明 ① 设 $x \in (A \cap B)^c$

则 $x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A$ 或 $x \notin B$

$\Rightarrow x \in A^c$ 或 $x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \cup B^c$, 所以 $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$;

② 设 $x \in A^c \cup B^c$ 则 $x \in A^c$ 或 $x \in B^c \Rightarrow$

$x \notin A$ 或 $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B)^c$

则 $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$

则由①②可知 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

3. 设映射 $f: X \rightarrow Y, A \subset X, B \subset X$. 证明:

$$(1) f(A \cup B) = f(A) \cup f(B);$$

$$(2) f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

证明 (1) 设 $x_0 \in A \cup B$,

$$y = f(x_0) \in f(A \cup B) = \{f(x) \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\} \Leftrightarrow x_0 \in A \text{ 或 } x_0 \in B$$

$$\text{所以 } f(x_0) \in f(A) \text{ 或 } f(x_0) \in f(B) \Leftrightarrow f(x_0) \in f(A) \cup f(B)$$

$$\therefore f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

$$(2) f(A \cap B) = \{f(x) \mid x \in A \cap B\},$$

$$\forall y \in f(A \cap B), \text{ 故 } \exists x_0 \in A \cap B, \text{ 使得 } y = f(x_0)$$

则 $x_0 \in A$ 且 $x_0 \in B$, 即 $f(x_0) \in f(A)$ 且 $f(x_0) \in f(B)$,

所以 $y = f(x_0) \in f(A) \cap f(B)$

故有 $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

4. 求下列函数的自然定义域:

$$(1) y = \sqrt{3x+2};$$

$$(2) y = \frac{1}{1-x^2};$$

$$(3) y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2};$$

$$(4) y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$(5) y = \sin \sqrt{x};$$

$$(6) y = \tan(x+1);$$

$$(7) y = \arcsin(x-3);$$

$$(8) y = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{x};$$

$$(9) y = \ln(x+1); \quad (10) y = e^{\frac{1}{x}}.$$

解 (1) 若函数 $y = \sqrt{3x+2}$ 有意义, 则需满足 $3x+2 \geq 0$, 此函数的定义域为 $\{x | x \geq -\frac{2}{3}\}$.

(2) 若函数 $y = \frac{1}{1-x^2}$ 有意义, 则需满足 $1-x^2 \neq 0$, 则此函数的定义域为 $\{x | x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)\}$.

(3) 若函数 $y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$ 有意义, 则需满足 $\begin{cases} x \neq 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases}$, 则此函数的定义域为 $\{x | -1 \leq x \leq 1 \text{ 且 } x \neq 0\}$.

(4) 若函数 $y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ 有意义, 则需满足 $4-x^2 > 0$, 则函数定义域为 $\{x | -2 < x < 2\}$.

(5) 若函数 $y = \sin \sqrt{x}$ 有意义, 则需满足 $x \geq 0$, 则函数定义域为 $\{x | x \geq 0\}$.

(6) 若 $y = \tan(x+1)$ 有意义, 则需满足 $x+1 \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, 则此函数定义域为 $\{x | x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} - 1, (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)\}$.

(7) 若 $y = \arcsin(x-3)$ 有意义, 则需满足 $-1 \leq x-3 \leq 1$, 则此函数的定义域为 $\{x | 2 \leq x \leq 4\}$.

(8) 若 $y = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{x}$ 有意义, 则需满足 $\begin{cases} x \leq 3 \\ x \neq 0 \end{cases}$, 则此函数的定义域为 $\{x | x \leq 3 \text{ 且 } x \neq 0\}$.

(9) 若 $y = \ln(x+1)$ 有意义, 则需满足 $x+1 > 0$, 则此函数的定义域为 $\{x | x > -1\}$.

(10) 若 $y = e^{\frac{1}{x}}$ 有意义, 则需满足 $x \neq 0$, 则此函数的定义域为 $\{x | x > 0 \text{ 或 } x < 0\}$.

5. 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

(1) $f(x) = \lg x^2, g(x) = 2 \lg x;$

(2) $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2};$

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, g(x) = x \sqrt[3]{x-1};$

(4) $f(x) = 1, g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x.$

解 (1) 不同. 因为 $f(x) = \lg x^2$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 而 $g(x) = 2 \lg x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

(2) 不同. $g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$, 而 $f(x) = x$, 对应法则不同.

(3) 相同. 定义域、对应法则均相同.

(4) 不同. $f(x) = 1$ 的定义域为全体实数, 而 $g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x$ 不是.

6. 设

$$\varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3}, \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3}, \end{cases}$$

求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi(-2)$, 并作出函数 $y = \varphi(x)$ 的图形.

解 $\because \varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3} \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3} \end{cases}$ 是一个分段函数,

$$\therefore \varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left|\sin \frac{\pi}{6}\right| = \frac{1}{2}, \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left|\sin \frac{\pi}{4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left|\sin \frac{\pi}{4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}, \varphi(-2) = 0$$

函数图形如图 1-1 所示.

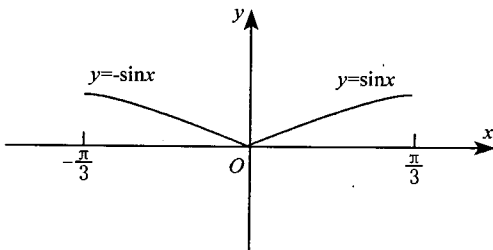


图 1-1

7. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

$$(1) y = \frac{x}{1-x}, (-\infty, 1); \quad (2) y = x + \ln x, (0, +\infty).$$

证明 (1) 令 $x_1 < x_2 < 1$, 则 $y_1 = \frac{x_1}{1-x_1}$, $y_2 = \frac{x_2}{1-x_2}$

$$y_2 - y_1 = \frac{x_2}{1-x_2} - \frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2(1-x_1) - x_1(1-x_2)}{(1-x_2)(1-x_1)} = \frac{x_2 - x_1}{(1-x_2)(1-x_1)}$$

$$\because x_1 < x_2 < 1$$