青海民族学院学术丛书之四十二

SHUXUEFANGFALUN

# 数学方法论

夏恒 主编

韩生贵 严惠英 副主编

SHUXUE FANGFALUN

兰州大学出版社
LANZHOU UNIVERSITY PRESS

青海民族学院院长基金资助项目

# 数学方法论


夏　恒　主编

韩生贵　严惠英　副主编



兰州大学出版社

LANZHOU UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学方法论/夏恒主编.—兰州:兰州大学出版社,2007.8

ISBN 978-7-311-03013-1

Ⅰ.数... Ⅱ.夏... Ⅲ.数学方法—方法论 Ⅳ.01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 139375 号

出 版 人　陶炳海
责任编辑　张微伟
封面设计　张稳移

书　　名　数学方法论
作　　者　夏　恒　主编
　　　　　韩生贵　严惠英　副主编
出版发行　兰州大学出版社　(地址:兰州市天水南路 222 号　730000)
电　　话　0931-8912613(总编办公室)　0931-8617156(营销中心)
　　　　　0931-8914298(读者服务部)
网　　址　http://www.onbook.com.cn
电子信箱　press@onbook.com.cn
印　　刷　兰州德辉印刷有限责任公司
开　　本　880×1230　1/32
印　　张　7.875
字　　数　231 千字
版　　次　2007 年 8 月第 1 版
印　　次　2007 年 8 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-311-03013-1
定　　价　12.00 元

(图书若有破损、缺页、掉页可随时与本社联系)

# 前 言

在我国全面开展素质教育的今天,人们学习数学时更加重视对数学思想和方法的探索.长期以来,人们总有一种美妙的梦想,试图找到一种万能的方法,去解决所有的问题.笛卡儿等人为此都曾做了非常有益的工作.但科学方法论证明,这样的方法是不存在的.然而,人们总想揭示数学上的发现和解法是怎样得到的,在数学解题过程中有什么规律可循.庞加莱、阿达玛、柯朗、波利亚等数学家与数学教育家普遍认为:获得数学成果的思维过程的价值决不比成果本身的价值小.他们都积极提倡揭示获得数学成果的思维过程,通过思维训练,打开人的智慧之门.

本书从观察、实验、比较、分类、归纳、类比和化归等基本方法入手,着力对数学解题的思维过程、解题策略、解题的思想和方法进行研究,既讲述了基础的理论原理,又选配了大量的典型例题进行分析,内容丰富,可读性强,富有启发性.本书可作为高等师范院校数学系本、专科教材,也可作为中学数学教师继续教育和骨干教师培训教材.

本书由编著者共同完成,其中夏恒编写了第一、二、三章,韩生贵编写了第四、五、七章,严惠英编写了第六章,最后由夏恒进行统稿.由于水平有限,错误在所难免,敬请广大读者不吝赐教,以便改正提高.

编者

2007 年 3 月于青海民族学院

# 目　录

# 1 绪 论

数学方法论是研究数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问.

数学是一门工具性很强的科学,它和其他科学比较起来还具有抽象性较强等特征,为了有效地发展它、应用它,就需要对这门科学的发展规律、研究方法、发现与发明等法则有所掌握.因此,我们学习数学都需要掌握数学方法论.

各个数学流派对待数学基础问题的研究,各有其方法论主张.事实上,他们各有所偏,各有所见.只有运用科学的反映论观点,才能从他们的主张中分析总结出较为正确的数学方法论观点.因此,无论是为了掌握、运用还是去发展数学方法论,我们都必须自觉地采取科学的反映论观点去考察问题和分析问题.

## 1.1 宏观的方法论与微观的方法论

数学科学的发展规律可以从数学发展史的丰富材料中归纳分析出来.由于数学史是人类社会科学技术发展史的一个重要组成部分,数学的发展与社会生产实践及技术发展的客观要求紧密相连,因此,对数学发展规律的研究,如果撇开数学的内在因素不谈,就属于宏观的数学方法论范畴.

数学工作者研究数学课题时,也可以不考虑数学发展的外在推动力,专就数学内部体系结构中的特定问题来进行分析研究,这样,就需要考虑采取最有效的数学研究方法,需要懂得数学发现与数学创造等

各种法则.这些对研究工作者个人必须遵循的方法与法则的研究,可以称为微观的数学方法论.

历史上最卓越的数学家如牛顿、欧拉、高斯、傅里叶、拉普拉斯等人,都既精通微观的数学方法论,也懂得宏观的数学方法论,否则,他们的成就与贡献不可能对社会生产技术的发展产生那样深远的影响.

一般来说,凡是具有历史眼光的数学家,他们的成果都往往起着承上启下的作用,因而总是带有经久不灭的光辉.而怎样才能获得"历史眼光"呢?这就需要通过对数学史的研究去理解一些宏观数学方法论的基本知识.此外,对数学家成长规律的一般分析,显然也应属于宏观数学方法论的范畴.同时,每一个数学研究工作者还必须精通某些微观的数学方法论,才能有效地开展科研工作,获得丰硕成果.

## 1.2 数学方法论的意义

对于数学方法论的意义,我们也可从各种不同的角度或不同的理论高度去进行分析.例如,对于数学发展规律的明确认识显然可以帮助我们去努力创造有利于数学发展的良好环境.另外,就微观的数学方法论而言,我们又可以从数学研究、数学教学与数学学习这几个角度来分析其意义.

第一,对数学的研究工作来说,虽然数学方法论并不能告诉我们的研究工作者在各种具体的场合应当采用什么样的方法,但它能促进对合理方法的不自觉运用向有意识的、自觉的应用转化.

第二,就数学的教学工作而言,数学方法论事实上对我们的数学教师提出了更高的要求,即数学教师不仅应当注意具体的数学知识的传授,而且也应注意对学生在数学方法论方面的训练和培养.应当强调的是,在这两者之间存在着相辅相成的辩证关系.一方面,只有注意对思想方法的分析,才能把数学课讲活、讲懂、讲深.所谓"讲活",就是让学生看到活生生的数学内容,而不是死的数学知识;所谓"讲懂",就是让学生真正理解有关的数学内容,而不是囫囵吞枣、死记硬背;所谓"讲

深”,则是指使学生不仅能掌握具体的数学知识,而且也能领会其内在的思想方法.另一方面,就数学方法论而言,只有与具体的数学知识密切结合,并真正渗透于其中,才不会成为夸夸其谈、纸上谈兵的空头文章.基于上面的分析,特别是考虑到我国数学教学存在的种种弊病,强调数学方法论与数学教学的有机结合显然将对提高数学教学质量起到积极的作用.

第三,自觉地以数学方法论来指导数学学习,也可收到更好的学习效果.从更为基本的意义上说,数学学习不仅是指对具体的数学知识的学习,而且也是指对数学方法的学习.即使大多数学习者将来未必会用到任何超出中学水平的数学知识,数学方法、特别是数学的思想方法对他们也有着十分广泛的指导意义;而就未来的数学工作者而言,重要的问题显然在于如何去完成新的创造,而所学到的具体数学知识只是为这种创造性工作提供了一个必要的基础.因而,从总体上说,我们应充分肯定数学方法论对于学习者的重要意义.

## 1.3 数学方法及其内涵

所谓方法,是指人们为了某种目的而采取的手段、途径和行为方式中所包含的可操作的规则或模式,或者说,解决一类问题时可采用的共同手段或计策就称为方法.

人们都熟知“方法”的含义,对此也从未有过什么大的争论.一个通俗的比喻是:要过河,必须采用造桥或驾船等方法,“不解决桥和船的问题,过河就是一句空话”.因此,方法首先是相对于某一目的而言.其次,方法是人的一种活动,人在活动中为达到某一目的,可以主观能动地选择、组合和创造各种手段和方式并加以实行.这便是方法的真实含义了.

解题时只有注意技巧,才会有方法的产生,方法正是从门路、技巧变通发展而来;而实施技巧要以能实施统领着它的方法为前提.人们通过长期的实践,发现了许多运用数学的手段、门路、技巧和程序,同一手

段、门路、技巧、程序被重复运用了多次，并且都达到了预期的目的，便成为数学方法.

数学方法是以数学为工具进行科学研究的方法，即用数学语言表达事物的状态、关系和发展过程，经过推理、运算和分析，形成解释、判断和预言的方法.也即从数学角度提出问题、解决问题(包括数学内部问题和实际问题)的过程中所采用的各种方式、手段、途径等，其中包括变换数学形式.例如，欲求和:

$$\arctan 1 + \arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7} + \cdots + \arctan\frac{1}{1+n+n^2},$$

可考虑用分解组合的方法，变换问题的数学形式.注意到

$$\arctan\frac{1}{1+k+k^2} = \arctan\frac{(k+1)-k}{1+k(k+1)},$$

联想正切的差角公式

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta},$$

得到

$$\alpha-\beta = \arctan\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.$$

再设

$$\tan\alpha = k+1, \tan\beta = k,$$

即可将原式变形为

$$\arctan 1 + (\arctan 2 - \arctan 1) + (\arctan 3 - \arctan 2) + \cdots + [\arctan n - \arctan(n-1)] + [\arctan(n+1) - \arctan n]$$
$$= \arctan(n+1).$$

即使是重大的数学方法，也是通过在变换问题的数学形式中不断深入地展开研究而形成的.例如群论的产生和建立与代数方程的可解性问题，即五次以上代数方程没有根式解的问题直接相关.在此问题的研究过程中，从代数方程根与系数的韦达关系开始，到提出预解式和预解方程的概念，从二次、三次、四次代数方程根的层次结构形式，到一般高次代数方程如果存在根式解，则公式中必将包含由开方根运算构成的一些层次，因而应把解的公式中层次结构的形式同域的扩张概念联

系起来,把确认每一层次的对应域的形成要素归结为对预解式和预解方程的寻求,以及把对预解式的寻求归结为转换群的各阶子群的结构分析等,所有这些方法都是在不断变换问题的数学形式中逐渐提炼概括形成的.

一般来说,中学数学中分析、处理和解决数学问题的活动是在数学思想指导下,运用数学方法,通过一系列数学技能操作来完成的.

数学方法包括如下主要内容:一是数学中科学认识的重要方法,例如抽象分析方法中的观察与实验等方法,逻辑思维方法中的比较与分类、归纳与类比等方法,以及非逻辑思维方法中的想像、直觉与顿悟等方法;二是数学推理论证的重要方法,例如综合法与分析法,完全归纳法与数学归纳法,演绎法、反证法与同一法等;三是数学中进行求解的重要方法,包括证明结论的主要方法和探求结论的主要方法等,例如数学模型法、关系映射反演方法、构造法等.

## 1.4 数学方法的特点和作用

数学方法具有以下三个基本特点:一是高度的抽象性和概括性;二是精确性,即逻辑的严密性及结论的确定性;三是广泛的应用性和可操作性.

数学方法的抽象性表现在对空间形式和数量关系这一特性的抽象.它在抽象过程中抛开了较多事物的具体特性,因而具有十分抽象的形式.它表现为高度的概括性,并将具体过程符号化.当然,抽象必须要以具体为基础.

数学方法的精确性,指数学方法具有很强的逻辑性和结论的确定性.这是因为,每一种数学方法总包含若干个环节,每个环节具有独特意义,环节之间又有一定关系.在上节的例子中,关键的一步是变换形式

$$\arctan\frac{1}{1+k+k^2}=\arctan\frac{(k+1)-k}{1+k(k+1)},$$

再联想正切的差角公式,取反正切函数……严密地一步一步变换形式,直至问题解决.也就是说每一步必须逻辑严密,最后结论也要确定.

至于数学方法广泛的应用性,更是尽人皆知的,只是在以往的教学、学习中,往往过于注重定理、概念的抽象意义,却抛开了它的广泛的应用性.如果把抽象的概念、定理比作骨骼,那么数学的广泛应用就好比血肉,缺少哪一个都将影响数学的完整性.高中数学新教材中大量增加数学知识的应用和研究性学习的篇幅,就是为了培养同学们应用数学解决实际问题的能力.

数学方法在科学技术研究中具有举足轻重的地位和作用:一是提供简洁精确的形式化语言;二是提供数量分析及计算的方法;三是提供逻辑推理的工具.

## 1.5 对学生在数学方法方面的培养

既然对数学方法的掌握与数学能力的形成紧密相关,那么,怎样培养学生掌握数学方法就是一个值得研究的课题.

数学方法寓于数学知识之中,所以,应该把对学生在数学方法方面的培养与数学知识的教学融为一体,在传授知识的同时,注意对数学方法的介绍.固然任何数学知识中都包含着一定的数学方法,获得知识的同时,必然会接触数学方法,但仅仅满足于对数学方法的自发认识是远远不够的,应当从自发提高到自觉的程度.

加强对学生在数学方法方面的培养,应特别注意以下几点:

### 1.5.1 从思想上提高认识,把使学生掌握数学知识和掌握数学方法都纳入教学目的

这不是出自形式上的考虑,而是为了从总体上重视数学方法的教学,促使教师在备课、讲课过程中都注意培养学生应用数学方法的能力.

### 1.5.2 备课时既要注意数学知识也要注意数学方法

数学知识，如概念、定理、公式等，都明显地写在教科书上，不会被人忽视，而数学方法如同有机体中的生命现象、化学元素的性质等，是无形的东西．人们往往看见的是躯体，而灵魂却常被忽略．传统的数学教学中，教师备课时几乎把全部精力都投入到了对知识的钻研，而很少注意蕴涵于知识之中的方法．因此，要大力提倡教师在备课时注意有关的数学方法，留意从知识中发掘、提炼出数学方法，并在讲课时明确地告诉学生，阐述方法的作用，引起学生思想上的重视．

比如，解一元一次方程是再简单不过的事了，然而这里也包含着数学方法．

例如，解方程 $5x+8=2x-1$．

$5x+8=2x-1$

$\Rightarrow 5x-2x=-1-8$

$\Rightarrow 3x=-9$

$\Rightarrow x=-3$．

在这里，不应当仅仅满足于求出解，还要告诉学生，方程求解的过程就是一连串变形的过程，直到变为最简单的形式，就得到了方程的解．这样，学生从总的方面对于解方程就有了明确的认识．

又如，证明不等式："若 $a<b$，证明 $b-2ab+a^2b-a+2a^2-a^3\geqslant 0$．"

证明：左端 $=b(1-2a+a^2)-a(1-2a+a^2)$

$=(1-a)^2(b-a)\geqslant 0$，

证毕．

这里，不能停留在证完题就了事的地步，也要告诉学生：把原来不明显的不等式，一步一步转化为明显的或已知的不等式，是证明不等式的基本思想方法．试想证明不等式的求差法、求比法、放缩法、利用著名不等式法等等，都是符合这种基本思想方法的．

在教学过程中，每当遇到这类情形时，教师都应尽力提炼出解题的思想实质，并不失时机地告诉学生，使其思想开阔、胸怀全局，而不是只

把眼光局限于枝节的、具体的变换技巧和运算过程.

在数学方法的教学中,不应只是注意解题的技巧性的方法,还要留意那些思考问题的带有一般性的认识论的方法,例如,从特殊到一般、先具体后抽象、先简单后复杂、局部与整体相联系等.把这些思想贯穿于日常的教学中,使学生耳濡目染、融化体会,这样,就会逐渐使学生能站在较高的层次上考虑问题.

### 1.5.3 运用对比手法显示方法的优越性

对比最具有说服力,能明显地显示出一种巧妙方法的优越性,并能在学生思想上留下较深的记忆痕迹.

例如:"当 $m$ 取什么值时方程 $x^2-2mx+m+1=0$ 的一个根大于 5,而另一个根小于 5?"

绝大多数学生会想到应用一元二次方程的判别式及求根公式求解,但这样做运算复杂,容易导致失败.如果应用数形转换的思想方法,借助于二次函数 $f(x)=x^2-2mx+m+1$ 的图像,就会想到只需满足 $f(5)<0$,即 $26-9m<0$,由此就能确定 $m$ 的取值范围是 $m>\dfrac{26}{9}$.

又如:"证明对于任意正数 $x,y,z$,总有 $\lg\dfrac{y}{x}\lg\dfrac{z}{y}+\lg\dfrac{z}{y}\lg\dfrac{x}{z}+\lg\dfrac{x}{z}\lg\dfrac{y}{x}\leqslant 0$."

如果直接去证则难度较大,但若用换元法,令

$$a=\lg\frac{y}{x},b=\lg\frac{z}{y},c=\lg\frac{x}{z},$$

则原题变为

"如果 $a+b+c=0$,则 $ab+bc+ca\leqslant 0$."

由于

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0,$$

所以

$$ab+bc+ca=-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\leqslant 0,$$

从而使原题得证.

通过对比,可起到示范的作用,并使学生看到灵活运用适当数学方法的优越性,从而引起学生自觉的注意.

### 1.5.4 互相关联、前后照应,注意同一方法在不同教材内容中的作用

有些数学方法,如换元法、配方法、待定系数法、特殊值法等,不是只适用于某段特定的教材,而是适用于许多不同性质的问题.例如,配方法可用于方程的求解、因式分解、求函数的极限、证明不等式等.在不同性质问题的解决中,遇到了相同的方法,就可以加深对这种方法的作用的认识,提高运用方法的技巧.教师应当引导学生进行回忆,一方面可以显示方法的作用,另一方面更可使其从联系、对比中学会更灵活地运用各种方法.

### 1.5.5 对不同类型的数学方法应有不同的教学要求,采取不同的教学方法

对宏观的数学方法,如以字母代数的方法、坐标方法、公理方法,应着重理解其思想实质,认识到它们的重大作用.对逻辑性的数学方法,应着重讲清其逻辑结构,要求正确使用逻辑推理形式.对容易混淆的地方,如某些命题的否定、某些命题成立的充分条件或必要条件的表述与判定,要反复强调,并用通俗的例子来阐释.类比是有助于发现的一种逻辑方法,要特别强调它的地位,注意应用类比法推广已有的性质、发现新的数学事实.对技巧性的数学方法,则应着重培养学生运用方法的技巧,注意扩大应用方法的范围.

### 1.5.6 注意各类数学方法的综合运用

一个稍为复杂的数学问题,常需在解决的不同阶段使用不同的数学方法,各种方法的综合运用,有利于数学能力的提高.

例如:“若 $x,y>0$ 且 $x+y=1$,证明 $(x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y})\geqslant\frac{25}{4}$.”

如果直接应用不等式 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$,则只能得到较弱的结果 $(x+$

$\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y})\geqslant 4$,原因在于没有用到条件 $x+y=1$.若注意到题设条件,则可使用换元法,令 $x=\sin^2\alpha$, $y=\cos^2\alpha$,把代数问题转化为三角问题.于是有

$$\begin{aligned}&(\sin^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha})(\cos^2\alpha+\frac{1}{\cos^2\alpha})\\&=\frac{\sin^4\alpha\cos^4\alpha+\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}\\&=\frac{\frac{1}{16}\sin^4 2\alpha+1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha+1}{\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha}\\&=\frac{(4-\sin^2 2\alpha)^2+16}{4\sin^2 2\alpha}\\&\geqslant\frac{(4-1)^2+16}{4\times 1}=\frac{25}{4}.\end{aligned}$$

在以上的证明中,既使用了换元法,又使用了配方法,才得到了较强的不等式.

像这样联合使用多种数学方法,不但会起到巩固、熟练使用方法的作用,更重要的是培养了学生的数学能力.

# 2 一般科学方法在数学中的应用

## 2.1 观察与实验

观察与实验是科学研究中十分重要的方法，也是数学学习中基本和常用的方法之一．在数学学习中，无论是概念的形成、命题的引出还是解题，都离不开观察和实验．

### 2.1.1 什么是观察和实验

观察是一种有计划、有目的的特殊形态的知觉，是按照客观事物本身的存在状态，在自然条件下，去研究和确定事物的特征和联系．

实验是针对所研究的对象，人为地创设条件，人为地将它们分为若干部分，并将其同其他事物（现象）联系起来，以深入了解所研究对象（现象）的自然状态和发展情况．

任何实验都和观察相联系，其结果又常为归纳提供经验材料，起到归纳推理的前提作用．因此，观察与实验具有培养发现和创新能力的作用，它们对数学学习有重要的意义．

### 2.1.2 观察与实验在数学学习中的作用、意义和局限性

#### 2.1.2.1 观察与实验在数学学习中的作用和意义

数学不是实验性的科学，因此不能将观察到的结果、实验得到的结论作为判断数学命题真假性的充分依据．对于数学活动的重要阶段——演绎推理阶段来说确实如此．可是，对于数学活动的另外两个阶段，即先