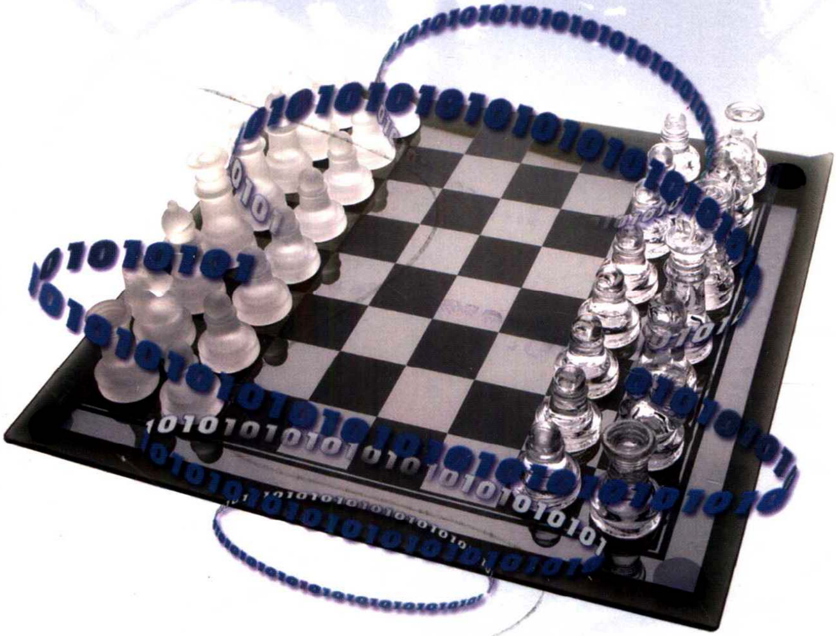
带熵博弈论及其应用

姜殿玉 著



科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书在传统博弈系统上引进 Shannon 熵和极大熵准则, 形成了一种新的博弈系统. 内容包括涉及博弈问题的 Shannon 熵和极大熵理论、在极大熵准则是全体局中人共同知识的条件下矩阵博弈、连续博弈和 n 人完全信息静态博弈解集的非空性、结构和求解算法, 以及在经济管理、环境和生态等学科领域的应用. 新的博弈系统可解决某些传统博弈系统无法解决的问题, 得到传统博弈系统无法得到的更符合实际的结果.

本书可供应用数学、系统科学与系统工程、运筹学、信息与控制、管理科学与管理工程等专业的研究生、教师及相关领域的研究人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

带熵博弈论及其应用/姜殿玉著. —北京: 科学出版社, 2008

ISBN 978-7-03-022570-2

I. 带… II. 姜… III. 对策论-研究 IV. O225

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 108738 号

责任编辑: 赵彦超 / 责任校对: 刘小梅
责任印制: 赵德静 / 封面设计: 王 浩

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

新 蕾 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 8 月第 一 版 开本: B5(720 × 1000)
2008 年 8 月第一次印刷 印张: 14
印数: 1—3 000 字数: 261 000

定价: 42.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈新蕾〉)

前　　言

1948 年, Shannon 提出信息熵的概念, 进而建立了通信的数学理论 —— 信息论, 推动了通信的现代化革命. 在整个信息论中, Shannon 信息熵理论扮演着重要的角色. 1957 年, 美国学者 Jaynes 提出了关于决策分析的极大熵准则, 这个准则使得决策更加客观. 1974 年, Smith 研究了用极大熵准则作为先验分布的理论根据, 得到结论: Shannon 信息熵最大的随机变量最可能发生. 目前, 极大熵准则在系统建模、仿真、人工智能、交通、经济分析、天气预报等领域得到了广泛应用.

信息是传统博弈论考虑的一个重要问题. 例如, 按照局中人所掌握的信息情况, 可以把博弈分成完全信息博弈和不完全信息博弈、信息对称博弈和信息不对称博弈等. 在扩展型博弈中, 信息集是一个重要概念. 另外, 信息问题一直为博弈论学者所关注. 然而, 将信息熵和极大熵准则引进博弈论的却是凤毛麟角, 更没有系统研究这方面内容的文献和论著.

本书总结了作者发表的论文并作了进一步研究, 试图将信息熵和极大熵原理引进完全信息静态博弈系统, 形成了一种新的博弈系统, 称为 "带熵博弈论". 在这种新的博弈系统中, 局中人更具有理性, 因而能够实现某种更为合理的均衡, 很多均衡结果是传统博弈无法得到的.

本书的内容兼顾了多层次、多领域的读者需求. 例如, 熵论部分包含了作者得到的新的研究结果, 可供研究信息熵的读者阅读. 对于从事博弈论应用方面研究的读者来说, 本书有相当一部分内容研究双矩阵博弈, 特别是 2×2 双矩阵博弈.

江苏省高校自然科学计划指导项目对于作者的工作给予了大力支持; 淮海工学院的领导对于科研工作非常重视, 并资助了本书的出版, 在此表示感谢. 国内外很多专家和同行对作者的工作表示了极大的兴趣, 作者对于他们的关心和帮助表示衷心的感谢. 作者感谢大连海事大学经济与管理学院、研究生院以及导师刘巍教授. 淮海工学院商学院的领导和同事们对于作者的科研工作给予了很大的支持, 中国运筹学会以及对策论专业委员会对于作者的工作也给予了关心与支持. 在此一并致以衷心的感谢.

带熵博弈论的研究具有较强的趣味性, 但因刚刚起步, 需要进一步研究的问题还很多, 希望本书的出版能够起到抛砖引玉的作用.

姜殿玉

2007 年 11 月

目　　录

绪　论

0.1　完全信息静态博弈及其所含信息量问题

最早用数学方法研究博弈的是 Borel[1], 他用数学工具研究国际象棋问题. 20 世纪 20~30 年代, von Neumann 研究了矩阵博弈, 得到了矩阵博弈的基本定理[2,3]. 1944 年, von Neumann 与 Morgenstern 合作出版了《博弈论与经济行为》, 1947 年出版了该书的第二版[4]. 这标志着真正形成了博弈论这一新兴学科. 这个时期, 博弈论研究的内容基本上是两类：一类是具有对抗性质的 (当然不合作), 另一类是具有合作形式的 (当然不对抗). 到了 1950~1951 年, 美国的 Nash 研究了第三类形式：多人非对抗非合作且每个参与博弈的人都仅有有限个策略, 他证明了这样的博弈经过向随机化扩充, 必然至少存在一个稳定的局势, 这种局势称为 Nash 均衡[5,6].

上述非合作形式的博弈, 即第一类和第三类都是一次性博弈, 也就是仅仅进行一局博弈. 而且博弈的结构仅由如下三个要素构成：① 所有参加博弈的决策主体, 称为局中人 (或称参与人); ② 每个局中人都有由至少一个行动 (或称策略) 构成的集合; ③ 当每个局中人都采取一个确定的行动时, 各局中人都有一个确定的赢得, 并且假定 (理性假定) 每个局中人都希望自己得到尽可能大的赢得. 进一步假定上述三个要素和一个理性假定是全体局中人都知道, 全体局中人知道全体局中人知道, 全体局中人知道全体局中人知道全体局中人知道, ⋯⋯ 的知识 (称为共同知识)[7,8].

鉴于上述这种类型的博弈假定了每个局中人如此严格地掌握了整个博弈结构 (三个要素和一个理性), 因此, 这种博弈被称为完全信息的. 此外, 又因为这种博弈是一次性的, 在进行博弈以前, 每个局中人都不知道其他局中人与决策有关的其他信息, 或者说博弈是同时进行的, 所以这种博弈又称为静态的. 于是合起来就是完全信息静态博弈. 注意, 这里的 “完全信息” 仅仅包括关于三个要素和一个理性的共同知识, 而不包括除此以外的其他信息.

然而, 对于实际博弈, 关于上面的 “静态” 的限制很不严格. 例如, 博弈论中著名的 “性别战” 讲的是有一对新婚夫妇打算一起到外面度过一个难忘的周末. 丈夫喜欢看足球, 妻子喜欢看芭蕾舞是他们的共同知识. 但是这对夫妇更愿意在一起. 如果不允许他们商量并让他们同时各自作出决策, 究竟是去足球场还是去芭蕾舞剧场. 他们应该怎样决策呢？

几乎每一本涉及博弈论的教科书都要讲到这个例子. 容易计算, 这个博弈有两个 “纯 Nash 均衡”：两人一起看足球, 或者两人一起去芭蕾舞剧场. 但是这两个结果中一个偏向于丈夫, 另一个偏向于妻子 —— 不公平. 怎样去实现其中的一个呢? 很多作者提出了不同的方法. 第一种观点是通过两人商量用抓阄的方法把原来的非合作博弈转化成合作博弈[9], 但是很显然, 这违背原来博弈的假定 (不允许互相商量). 第二种观点是 “实际生活中, 也许是这次看足球, 下次看芭蕾, 如此循环, 形成一种默契. 这里还有 ‘先动优势’, 例如, 若男的买票, 两人就会出现在足球场, 若女的买票, 两人就会出现在芭蕾舞厅.”[10,19,20] 但是, 前者不是一次性博弈, 后者的假定多了 —— 假定 “先动优势” 成立并且谁买票也必须是双方的共同知识 —— 超出了博弈结构中的共同知识所要求的范围. 第三种观点是 “没有理由认为只有某个平衡偶才是博弈的结果”[9]. 结果是丈夫去球场, 妻子去芭蕾舞厅 —— 两人分道扬镳, 各投所好. “就像亨利 (美国小说家) 的故事中讲到的丈夫用卖了自己的金表的钱给妻子买了一把精致的发梳；而妻子却用卖掉自己的秀发而得到的钱给丈夫买了一条金表链.”

另一个几乎每本博弈论书上都能讲到的著名例子是 “鹰–鸽博弈”, 也称为 “斗鸡博弈”. 两个痞子为了某种小利益手执木棍要拼命. 如果两人都往前冲直到双方用木棍相击, 则两败俱伤；若一方往前冲刺, 另一方逃跑, 则冲者胜, 得到全部利益, 逃跑者未得利益反丢面子; 若两人都逃跑, 则两人都不得利且丢面子. 容易计算, 两个纯 Nash 均衡是如果一方冲过来, 另一方就逃跑.

但是, 如果细心分析一下就会看出, 这个博弈结果其实与 “完全信息静态博弈” 的概念不相符. 因为要实现这样的纯 Nash 均衡, 双方必须知道对方怎么办. 可是按照 “完全信息静态博弈” 的定义, 这是不可能的. 设想两个人都被捂上耳朵, 戴上眼罩, 从一座两边带有扶手且宽度只能容纳一个人的桥的两端决定是不是上桥决斗, 桥两端、每个人的两种行动 —— 决斗或逃跑, 以及双方是否决斗的利害关系是他们的共同知识, 其他情况两人一概不知, 这样才是真正的 “完全信息静态博弈”. 为了区别一般的情况, 称后者为 “完全静态” 的.

文献 [9] 指出, 对于矩阵对策 (和连续对策), 使用混合策略可以增加迷惑对手的不明确性. 因此, 局中人所使用的混合最优策略的不明确性越大越好. 此外我们已经研究了博弈上的计策问题[9], 提出了一个局中人关于其他局中人决策的判断. 但是判断与混合策略在随机情况下都存在着不明确性. 例如, 一个局中人判断另一个局中人将分别以概率 1 和 0; 0.2 和 0.8 ; 0.5 和 0.5 选择自己的纯行动 1 和纯行动 2. 或者从另一个角度说, 一个局中人将分别以概率 1 和 0; 0.2 和 0.8 ; 0.5 和 0.5 选择自己的纯行动 1 和纯行动 2. 很显然, 第一种判断 (或混合行动) 最明确, 第二个次之, 而第三个最不明确. 或者说第一个判断已经不需要再进一步作侦查工作了, 其中已经没有信息量可以挖掘了. 第二个要挖掘的信息量次之, 第三个最大.

由此可见, 对于一般的完全信息静态博弈, 还存在着如下进一步研究的问题: 第一, 怎样度量局中人的判断或者混合行动的信息量或不明确性? 第二, 怎样度量超出 "完全静态" 以外的其他信息量? 第三, 对于 "完全信息完全静态博弈" 的均衡问题怎样处理?

0.2 信息熵的引进及其与博弈论的关系

1948 年, 信息论创始人 Shannon 在文献 [11] 中引进了描述随机变量取值的不确定性的度量工具 —— 熵. 后来, 人们把有限随机变量的熵的概念扩展到连续型随机变量.

1951 年, Shannon 等人, 把一篇文章中英文字母出现的信息熵问题刻画为一个二人零和博弈模型[12], 称为 Shannon 博弈, 其中, 第一个局中人 (决策者) 的策略是猜测下一个字母, 另一个局中人 (称为自然) 的策略是实际出现的字母. 如果决策者猜测的字母恰恰是实际出现的字母, 则决策者赢; 否则自然赢. Topsøe 等研究的码长博弈[13,14] 涉及极大熵问题. 文献 [15, 16] 更一般地研究了这样的二人零和博弈: "决策者" 希望字母出现的 Shannon 熵越小越好, "自然" 希望这个熵越大越好.

1980 年, 物理学家和计算机科学家为了研究量子计算机, 将博弈论的思想引入量子物理学, 形成了一门新兴学科 —— 量子博弈论[17~19]: 如果允许局中人的策略进行量子物理学上的线性叠加, 那么就形成了意义更为一般的量子博弈论. 经典博弈论中的解是量子博弈论中的解的特殊形式. 文献 [20] 分析了 Nash(最大效用) 与有序状态 (极小熵) 之间的关系. 作为 Nash-Hayek 均衡的一种范例, 引进了极小熵的概念. 并指出, 极小熵的概念与量子博弈论有关. 文献 [21] 提出了有限 n 人非合作博弈的一种极小熵解法, 其根据是每个局中人都希望所出现的混合均衡局势的不明确性 (Shannon 熵) 达到极小.

1999~2000 年, 美国博弈论专家 Neyman 和 Okada 利用 Shannon 熵的概念引进了关于二人零和重复博弈中的混合策略不明确性的度量 —— 策略熵的概念, 并由此研究了具有有限自动机和有界回顾的重复博弈值的渐近行为[22,23].

在文献 [24] 中, 在经典 n 人非合作博弈中除了引进每个局中人的各级判断以外, 还引进了局外人用以代表自然. 在这种新的博弈系统中, 一人博弈结构就是决策结构.

众所周知, 对于不确定决策结构, 人们提出了许多准则, 如乐观准则、悲观准则、理智乐观准则等. Laplace 提出等可能准则: 决策者在没有任何有关状态集的信息时, 可认为各个状态发生的概率相等. 随着信息论的诞生, 美国学者 Jaynes 于 1957 年提出了极大熵准则[25,26]. 1974 年, Smith 在文献 [27] 中研究了用极大熵准则作为先验分布的理论根据. 1996 年, 张瑞清、邱菀华在文献 [28] 中提出了决策分

析中一类极大熵的求解算法.

0.3 作者的研究工作

对于没有最优纯解的矩阵博弈, 具有最大 Shannon 熵的 Neumann 最优混合策略称为 Neumann-Shannon 最优混合策略. 由两个局中人的 Neumann-Shannon 最优混合策略构成的序对称为 Neumann-Shannon 博弈解. 文献 [29] 研究了 Neumann-Shannon 博弈解的存在性、解集的拓扑结构和凸性、解的交换性和求解算法, 并给出了带有唯一 Neumann-Shannon 博弈解的一类矩阵博弈.

文献 [30] 研究了赢得矩阵的各行和各列元素的算术平均值都相等的矩阵博弈. 给出一个矩阵博弈是这种博弈的一个充要条件和一个必要条件. 并给出了这种矩阵博弈的线性方程组解法.

文献 [31] 对于正方形 $[0, 2]\times[0, 2]$ 上的连续博弈, 把局中人的非纯策略 (概率分布函数) 的导数称为这个局中人的策略密度 (概率密度函数). 建立了这种连续博弈的最大熵理论. 证明了当每个局中人都没有最优纯策略时, 具有最大熵的最优策略密度集合的非空紧凸性, 研究了最优策略密度的最大熵, 给出一类带有最大熵的连续博弈.

文献 [32] 把双矩阵博弈分为无 Schelling 点的和有 Schelling 点的两种. 所谓有 Schelling 点的双矩阵博弈, 就是两个局中人在决策时, 具有作为共同知识的一些信息可以使得局中人实现某个纯 Nash 均衡 (如果存在的话). 给出一类无 Schelling 点双矩阵博弈的一种特有的均衡 —— 期望均衡的概念. 对于这类无 Schelling 点的双矩阵博弈, 如果局中人无法实现纯 Nash 均衡 (不存在、不唯一且不可交换), 那么由于期望均衡具有存在性和可交换性, 所以它是一种可取的最优局势.

文献 [33] 定义了一种所谓的强知识系统 (SKS), 它是将极大熵原理添加到经典知识系统 (CKS) 中而得到的. 全体局中人在强知识系统中要比在经典知识系统中聪明. 我们构造了一种 n 人非合作博弈, 称为 n 人条件博弈, 定义了一种所谓期望均衡. 给出在强知识系统下求期望均衡的方法. 有例子说明, 一般地, 在强知识系统下的期望均衡比在经典知识系统下的 Nash 均衡容易求出. 前者中的均衡比后者中的均衡容易实现.

文献 [34] 研究了这样一种有限博弈, 其全体局中人有且仅有如下共同知识: ① 局中人的集合 (至少有两个局中人); ② 每个局中人的行动集合; ③ 对于每个行动组合 (局势), 每个局中人的赢得; ④ 每个局中人都希望得到尽可能大的赢得. 定义了这种博弈的所谓期望均衡的概念. 第一个结论是, 在一个条件博弈中, 全体局中人刚好有共同知识①~④. 第二个结论是, 一个有限博弈的期望均衡有意义当且仅当全体局中人有共同知识①~④和⑤: 极大熵原理. 最后, 根据结果, 得到了关于

三个典型例子 —— 囚徒困境、性别战和鹰–鸽博弈的新结论.

文献 [35] 所做的工作如下: 有限静态策略博弈称为理性博弈, 如果全体局中人的共同知识包含并且仅仅包含: ① 局中人的集合 (至少有两个局中人); ② 每个局中人的行动集合; ③ 每个行动组合所对应的每个局中人的赢得或者偏好; ④ 极大熵原理. 这篇论文提出了所谓 Neumann-Morgenstern 稳定集 (简称 N-M 稳定集) 的概念, 表示在一个有限静态策略博弈中的全体纯 Nash 均衡集合中满足个体合理性和集体合理性的一个子集. 证明了具有至少一个纯均衡的有限静态策略博弈中 N-M 稳定集的存在性和唯一性. 如果全体局中人对于 N-M 稳定集中的所有纯局势都有相同的偏好, 那么这种博弈称为理想博弈. 例如, 有限理性博弈是理想博弈. 证明了每个有限静态策略博弈都等价于一个并且仅仅一个理想博弈.

文献 [36] 通过分析一个具体的无限策略博弈, 发现了能够实现但是局中人全体都不喜欢的纯 Nash 均衡子集合. 由此引进了无限策略博弈的 N-M 稳定集 (即没有比它更受局中人全体喜欢的那些纯 Nash 均衡的集合) 的概念. 证明了无限策略博弈至多存在一个 N-M 稳定集. 在 ZFC 公理集合论意义下, 证明了在集体劣于或无差异关系下纯 Nash 均衡集合的每个全序子集都有最大元素的无限策略博弈存在 N-M 稳定集.

在文献 [37] 中, 设每个局中人的纯策略空间都是实数集上的 Borel 集, 在实数集上有 m 个确定的 Lebesgue 可测集, 并存在从这 n 个纯策略空间的 Descartes 乘积到实数集的 m 个 n 元 Borel 函数. 这 m 个 Borel 函数在对应 Lebesgue 可测集下的逆像构成这 n 个纯策略空间的 Descartes 乘积的一个划分, 并且每 $n-1$ 个纯策略空间的 Descartes 乘积都具有有限正 Lebesgue 测度. 纯策略空间的 Descartes 乘积的不同分块中的纯局势一般具有不同的博弈结果. 每个局中人的效用都是自己所选纯策略的一元函数. 在极大熵准则是每个局中人的共同知识的条件下, 得到了求这类博弈的期望意义下的 Nash 均衡点的方法. 给出这种 Nash 均衡点的存在定理和可交换定理. 最后给出一个在经济管理学中的应用例子.

文献 [38] 给出了一种新的博弈 —— 非合作 n 人条件博弈, 并且给出了它的求解方法. 以这种博弈为工具, 在适当的假定下研究了在无人类的理想地域上同级消费者中各个种群的平均规模. 其结论是当个体的平均食量充分小时, 该种群的平均规模等于前一级消费者或生产者的最大承受量; 否则, 该种群的平均规模与前一级消费者或生产者的最大承受量成正比, 与个体的平均食量和该级消费者中种群的数目都成反比.

文献 [39, 40] 认为, Hardin 的公共地的悲剧关于环境管理科学很重要. 为了研究如何使环境得到合理的利用, 文章介绍了一种新的博弈, 即 n 人非合作条件博弈, 及其期望均衡的算法. 由此提出并且解决了如何合理地利用环境问题的数学模型, 这个问题是可持续发展战略问题, 即不但使利用者长期保持最佳的经济利益, 而且

也使公共环境总是处在最佳的状态. 其中第一个模型也适合于我国的人口政策, 第二个模型也适合于公海的渔业管理和公共环境问题等. 这两个模型的结果与可持续发展战略的理论相吻合.

文献 [41,42] 认为, 在传统的经济管理博弈中, 一般不考虑局中人的行动与环境之间的交互作用. 可是在某个区域内投产带有污染性质的项目时, 人们不得不考虑局中人的利益与环境之间的关系. 文献 [41] 以二进制数和 n 人非合作有限博弈理论为工具, 引进局势集合上的一种顺序关系, 在此基础上建立了毛利益–环境博弈模型, 证明了此博弈的效用函数中的负效用具有单调性. 然后研究了这类博弈的效用和 Nash 均衡的条件. 文献 [42] 引进了公害度的概念. 定义当公害度与概率达到最大时的情形为环境危机, 研究了出现在毛利益–环境博弈中的环境危机发生的条件.

0.4　本书的主要内容

本书包括三个部分的内容. 第一部分包括第 1 ~ 3 章, 主要研究本书涉及的经典博弈论的内容, 其结果大都是作者自成体系的推演. 第 1 章研究矩阵博弈理论, 第 2 章研究连续博弈理论, 第 3 章研究 n 人完全信息静态博弈理论.

第二部分包括第 4 ~ 6 章, 主要研究与本书有关的信息熵理论, 其中, 第 4 章研究有限博弈上的信息熵问题, 这里的基本内容来源于传统文献, 把信息熵引入博弈结构是作者的工作. 第 5 章研究连续型随机变量的信息熵. 作者做的主要工作是用非标准分析的思想把定义在有限闭区间内的离散型随机变量的概率用积分形式来表示. 在某种程度上将与定义在有限闭区间上的连续型随机变量的概率统一起来. 进而找到了有限闭区间上连续型随机变量的相对熵和绝对熵的最小值. 第 6 章证明离散型随机变量的极大熵原理, 但是此证明不太严格. 由此引进了双矩阵博弈的最优判断和矩阵博弈的正混合最优策略. 对于连续型情况也未给出证明.

第三部分是本书理论部分的核心, 包括第 7~10 章. 第 7 章把信息熵引进矩阵博弈, 把经典博弈解的概念加以限制, 形成使信息熵达到最大的博弈解. 这种新的博弈解保持了原有博弈解的全部性质. 第 8 章把经典连续博弈的结构作了改进, 形成了一种所谓策略密度博弈解. 在此结构上讨论绝对熵或相对熵最大的博弈解. 第 9 章研究一种新的博弈 —— 条件博弈及其上的一种特殊均衡 —— 期望均衡, 并把它用于有限博弈. 第 10 章研究正规博弈的纯 Nash 均衡和期望均衡的实现性问题.

第四部分是本书的应用部分, 包括第 11~14 章. 其中, 第 11 章讨论一些常见的双矩阵博弈的混合均衡和期望均衡的分析与比较. 第 12 章研究一类双矩阵博弈及其在环境生态科学上的应用. 第 13 章研究条件博弈及其期望均衡在环境生态管理学、生态学和经济管理学上的应用. 第 14 章研究经济管理学中的毛利益–环境博弈

与公害度问题.

参 考 文 献

[1] Borel E. The theory of play and integral equations with skew sysmetric kernels; on games that involve chance and the skill of the players; on systems of linear forms of skew symmetric determinants and the general theory of play (translated by Savage L J). Econometrica, 1953,21: 97～117.

[2] von Neumann J. Zur theorie der gesellschaftsspield. Mathematische Annalen, 1928, 100: 295～320.

[3] von Neumann J. Uber ein okonomisches Gleichingssystem und eine Verallgemeinering des Brouwerschen Fixpunktsetzes // Ergebnisse eines Math. Coll.. ed. K.Menger, 1937, 8: 73～83.

[4] von Neumann J, Morgenstrn O. Theory of Games and Economic Behaviour. Princeton: Princeton University Press, 1944, 1947.

[5] Nash J F. Equilibrium points in n-person games. Proc. Nat. Acad.Sc., 1950, 36: 48～49.

[6] Nash J F. Non-cooperative games. Annals of Maths., 1951, 54: 286～295.

[7] Aumann R J. Interactive epistemology I: knowledge. International Journal of Game Theory, 1999, 28 (3): 263～300.

[8] Aumann R J. Interactive epistemology II: probability. International Journal of Game Theory, 1999, 28 (3): 301～314.

[9] Thomas L C. Games, Theory and Applications. Chichester: Ellis Horwood Limited, 1984.

[10] 张维迎. 博弈论与信息经济学. 上海: 上海人民出版社, 1996.

[11] Shannon C E. A mathematical theory of communication. Bell Sys. Tech. Journal, 1948, 27: 379～423, 623～656.

[12] Shannon C E. Prediction and entropy of printed English.Bell System Technical Journal, 1951, 30: 50～64.

[13] Topsøe F. Information-theoretical optimization techniques. Kyberneticka, 1979, 15: 8～27.

[14] Harremoës P, Topsøe F. Maximum entropy fundamentals. Entropy, 2001, 3: 191～226.

[15] Grunwald P D, Dawid A P. Game theory, maximum generalized entropy, minimum discrepancy, robust Bayes and Pythagoras // Proc. IEEE Information Theory Workshop IEEE, New York, 2002: 94～97.

[16] Philip D A, Peter D G. Game theory, maximum entropy, minimum discrepancy and robust Bayesian decision theory. Annals of Statistics, 2004, 32 (4): 1367～1433.

[17] Eisert J, Wilkens M, Lewenstein M. Quantum games and quantum strategies. Phys. Rev. Lett., 1999, 83: 3077～3088.

[18] Meyer D A. Quantum strategies. Phys.Rev.Lett., 1999, 82: 1052～1055.

[19] Goldenberg L, Vaidman L, Wiesner S. Quantum Gambling. Phys. Rev. Lett., 1999, 82: 3356～3359.

[20] Edward J. Quantum Games and Minimum Entropy // Proc. Computational Science and Its Applications – ICCSA. Vipin Kumar, Marina L. Gavrilova, Chih Jeng Kenneth Tan, Pierre L'Ecuyer. Berlin Heidelberg: Springer, 2003: 216～225.

[21] Edward J. Quantum games: mixed strategy Nash's equilibrium represents. Entropy, 2003, 3: 313～347.

[22] Neyman A, Okada D. Strategic entropy and complexity in repeated games. Games and Economic Behavior, 1999, 29: 191～223.

[23] Neyman A, Okada D. Repeated games with bounded entropy. Games and Economic Behavior, 2000, 30: 228～247.

[24] 姜殿玉. 数理谋略论 —— 对策上的计策理论. 北京：中国文联出版社, 2003.

[25] Jaynes E T. Information theory and statistical mechanics. Phys Rev, 1957, 106: 620～630.

[26] Jaynes E T. Prior probabilities. IEEE Transactions on Systems, Science and Cybernetics, 1968, SSC-4: 227～241.

[27] Smith S A. A derivation of entropy and the maximum entropy criterion in the context of decision problems. IEEE Transactions on Systems, Science and Cybernetics, 1974, SSC-4: 157～168.

[28] 张瑞清, 邱菀华. 决策分析中一类极大熵问题的求解算法与应用. 系统工程理论与实践, 1996, 16(11)：39～43.

[29] 姜殿玉等. 矩阵对策的 Neuman-Shannon 对策解. 系统工程, 2005, 23(7)：17～21.

[30] Jiang D et al.. An equi-average matrix game and its solution by linear equations. Management Science and Engineering, 2007, 1(2): 36～42.

[31] 姜殿玉. 连续对策的最大熵策略密度对策解. 系统科学与数学, 2008, 28(9).

[32] 姜殿玉. 一类无 Schelling 点双矩阵对策及其期望 Nash 均衡// 袁亚湘, 胡晓东, 刘德刚, 吴凌云. 中国运筹学会第八届学术交流会论文集. Hong Kong: Global-Link Informatics Limited, 2006: 587～591.

[33] Jiang D et al.. Realizablity of expected equilibria of N-person condition game under strong knowledge system. International Journal of Innovative Computing, Information and Control, 2006, 2(4): 761～770.

[34] Jiang D. Static, completely static and rational games of complete information and their different Nash equilibria. International Journal of Innovative Computing, Information and Control, 2008, 4(3): 649～657.

[35] Jiang D. Neumann-Morgenstern stable set of a finite static strategy game. Journal of Mathematical Control Science and Applications, 2007, 1(2).

[36] Jiang D. N-M stable set of a regular game and its unique existence theorem in system ZFC. Journal of Mathematical Control Science and Applications. to appear.

[37] 姜殿玉等. 极大熵准则下 n 人非合作条件博弈的期望 Nash 均衡. 系统工程, 2005, 23(11): 108~111.

[38] 姜殿玉等. 自然条件下同级消费者中种群平均规模的博弈论研究. 生物数学学报, 2006, 21(2): 233~236.

[39] 姜殿玉等. n 人非合作条件博弈在环境管理中的应用. 大连海事大学学报, 2005, 31(4): 49~52.

[40] Jiang D. A sustainable development game in management science // Proceedings of The Second International Conference on Game Theory and Applications, edited by Gao H, Petrosyan Leon A, 2007: 79~82.

[41] Jiang D. Gross interest-environment games in economic management science. Management Science and Engineering, 2007, 1(1): 25~31.

[42] Jiang D. Gross interest-environment games and environment crisis theorems. Advances in Natural Science, 2008, 1(1).

第 1 章　经典矩阵博弈

本章介绍经典矩阵博弈系统, 该系统最早起源于数学家 von Neumann 和经济学家 Morgenstern 合著的*Theory of Games and Economic Behaviour.* 本章对这一内容作一全面、系统的介绍, 以使得本书体系完备并方便读者阅读 (当然, 读者为了扩展这部分内容, 也可以参看文献 [1~10]).

1.1 节介绍经典矩阵博弈的概念; 1.2 节介绍 von Neumann 博弈论基本定理; 1.3 节介绍矩阵博弈的良策; 1.4 节介绍关于博弈解的几个基本定理; 1.5 节介绍策略的优超关系及博弈的解法.

1.1　经典矩阵博弈的概念

1. *基本成分*

(1) 局中人. 参加博弈的决策主体称为局中人. 局中人可以是自然人, 也可以指某种团体, 如公司、国家、国家的结盟 (如欧盟等) 等. 本章的博弈仅有两个局中人 $p = 1, 2$. 这样的博弈称为二人博弈.

(2) 策略. 局中人在博弈时所用的招数称为这个局中人的纯策略. 设 $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_{m_p}\}$ 是局中人 p 的纯策略有限集, 则满足条件

$$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \cdots, m_p, \quad \sum_{i=1}^{m_p} x_i = 1$$

的 m_p 维向量 $(x_1, \cdots, x_{m_p})$ 称为局中人 p 的一个策略. 解释为局中人 p 以概率 x_i 来选择他的纯策略 $s_i, i = 1, \cdots, m_p$. 此时局中人 p 的第 i 个纯策略 s_i 即为 m_p 维单位向量

$$e_i^{m_p} = \underbrace{(0, \cdots, 0, \overset{i}{1}, 0, \cdots, 0)}_{m_p}, \quad i = 1, \cdots, m_p.$$

非纯的策略

$$x = (x_1, \cdots, x_{m_p}), \quad 0 \leqslant x_i < 1, \quad i = 1, \cdots, m_p$$

称为混合策略.

局中人 1, 2 的纯策略集分别记作 $I=\{1,2,\cdots,m\}$ 和 $J=\{1,2,\cdots,n\}$, 而策略集分别记作 X 和 Y, 即

$$X=\left\{x=(x_1,\cdots,x_m)\in\mathbf{R}^m|x_i\geqslant 0,i=1,\cdots,m,\sum_{i=1}^m x_i=1\right\},$$

$$Y=\left\{y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n|y_j\geqslant 0,j=1,\cdots,n,\sum_{j=1}^n y_j=1\right\},$$

$(x,y)\in X\times Y$ 称为局势, 表示局中人 1, 2 分别使用策略 x 和 y. 特别地, $(i,j)\in I\times J$ 称为纯局势, 非纯的局势称为混合局势.

(3) 赢得矩阵. 赢得矩阵指

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{1\cdot}\\ A_{2\cdot}\\ \vdots\\ A_{m\cdot}\end{bmatrix}=[A_{\cdot 1},A_{\cdot 2},\cdots,A_{\cdot n}],$$

表示在纯局势 $(i,j)\in I\times J$ 下局中人 1, 2 分别赢得 a_{ij} 和 $-a_{ij}$.

2. 基本公理

为介绍基本公理, 先介绍共同知识的概念. 共同知识是指 "所有局中人知道, 所有局中人知道所有局中人知道, 所有局中人知道所有局中人知道所有局中人知道, ······" 的知识.

公理 1.1.1 "局中人 1, 2 分别以获取尽可能大的 a_{ij} 和 $-a_{ij}$ 为博弈目标" 是局中人 1, 2 的共同知识.

这个公理指明了局中人的理性.

3. 矩阵博弈

定义 1.1.1 由满足公理 1.1.1 的局中人 1, 2 和他们的纯策略集 I,J 以及赢得矩阵 A 所构成的五元组 $\Gamma\equiv[1,2,I,J,A]$ 称为一个矩阵博弈.

当赢得矩阵 A 给定以后, Γ 的其他成分 1, 2, I,J 即被确定, 所以矩阵博弈 Γ 也可简称矩阵博弈 A.

因为矩阵博弈 A 有两个局中人, 每个局中人都仅有有限个纯策略, 且在任意纯局势 $(i,j)\in I\times J$ 下, 两局中人的赢得之和都满足

$$a_{ij}+(-a_{ij})\equiv 0,$$