



2009版

龚冬保教授数学考研

数学 考研

考点精讲 方法精练

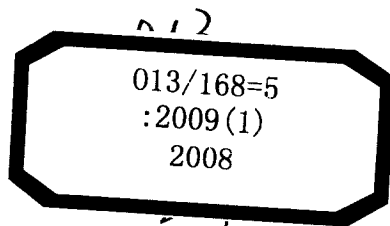
数学一

主编 龚冬保



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交通大学出版社考研图书网站 <http://kaoyan.xjtupress.com>



(2009 版)

数学考研 考点精讲方法精练

(数学一)

主编 龚冬保

编著 (高等教学) 龚冬保 王寿生 褚维盘
(线性代数) 崔荣泉
(概率统计) 周家良

西安交通大学出版社
• 西安 •

内容提要

本书是专门针对考研复习编写的教材,内容严格按教育部制订的“数学考试大纲”编写。为了适应考生“复习”的特点,本书建立了与普通教材不同的体系;针对考研的特点,突出基本功和综合运用、应试能力的训练,对于数学知识,着重于分析问题和解决问题的能力,全面而有重点地覆盖了所有考点和解题方法。本书既可作“考研辅导班”的教材,也可用于考生自学,同时也可供就读本科的各专业的大学参考。

作者在网上为本书读者免费答疑,具体方法请登录 kaoyan.xjtupress.com

图书在版编目(CIP)数据

数学考研考点精讲方法精练. 数学. 1/龚冬保主编;王寿生等编. —西安:西安交通大学出版社,2008.3
ISBN 978-7-5605-2169-5

I. 数… II. ①龚… ②王… III. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 021808 号

书 名 数学考研考点精讲方法精练(数学一)
主 编 龚冬保
责任编辑 叶涛

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路 10 号 邮政编码 710049)
网 址 <http://www.xjtupress.com>
电 话 (029)82668357 82667874(发行中心)
(029)82668315 82669096(总编办)
传 真 (029)82668280
印 刷 陕西江源印刷科技有限公司

开 本 787mm×1 092mm 1/16 印张 28 字数 694 千字
版次印次 2008 年 3 月第 1 版 2008 年 3 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5605-2169-5/O·231
定 价 39.80 元

读者购书、书店添货如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。

订购热线:(029)82665248 (029)82665249

投稿热线:(029)82664954

读者信箱:jdgy31@126.com

版权所有 侵权必究

2009 版前言

每年我们都要将本书与当年的考研试卷对比,无论是考点,还是解题方法,极其类似的题都不少.尤其我们书上介绍的一些特殊的方法,在解考研题时,效果更为显著,如用泰勒公式求极限的方法,解 2008 试卷中两道极限题,就非常简便.

例 1 (数学一、二). 求 $I_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$.

解 由泰勒公式: $\sin(\sin x) = \sin x - \frac{1}{6} \sin^3 x + o(\sin^3 x)$, 和等价无穷小 $x \sim \sin x (x \rightarrow 0)$, 可得

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6} \sin^3 x - o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

例 2 (数学三、四). 求 $I_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}$.

解 $x \rightarrow 0$ 时 $\ln \frac{\sin x}{x} \sim \frac{\sin x - x}{x}$.

及由泰勒公式: $\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$

$$\text{故 } I_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6} x^3 + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

又如 2008 四份考卷共用的线性代数题,用我们书中介绍的方法解,也很简单.

例 3 (数学一、二、三、四) 设 n 阶矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{bmatrix}$$

(1) 求证 $|A| = (n+1)a^n$;

(2) 方程组 $AX=B$ 有唯一解时,求解 $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 其中 $B=(1, 0, \dots, 0)^T$;

(3) 何时方程组有无穷多解? 并求通解.

解 (1) 记 $|A| = D_n$. 按第一行展开得 $D_n = 2aD_{n-1} - a^2D_{n-2}$.

$$\text{而 } n=2 \text{ 时 } D_2 = \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix} = 3a^2. \quad n=3 \text{ 时 } D_3 = \begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 \\ 0 & a^2 & 2a \end{vmatrix} = 4a^3.$$

由数学归纳法及上面递推公式即可证得 $D_n = |A| = (n+1)a^n$.

(2) $a \neq 0$ 有唯一解. 用克莱姆法则得

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{D_{n-1}}{D_n} = \frac{n}{(n+1)a}, \quad x_2 = -a^2 \frac{D_{n-2}}{D_n} = -\frac{n-1}{n+1}.$$

当 $k \geq 3$ 时, 方程是 $a^2 x_{k-2} + 2a x_{k-1} + x_k = 0$ 故

$$x_k = -a(2x_{k-1} + ax_{k-2}). \text{ 由归纳法得 } x_k = \frac{n-k+1}{n+1}(-1)^{k-1}a^{k-2}, \text{ 所求解是}$$

$$\mathbf{X} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{n}{a}, -n-1, (n-2)a, \dots, (-1)^{n-1}a^{n-2} \right)^T.$$

$$(3) \text{ 当 } a=0 \text{ 时, 方程组化为: } \begin{cases} x_2=1 \\ x_3=x_4=\dots=x_n=0 \end{cases}$$

故所求通解为 $\mathbf{X} = (0, 1, 0, \dots, 0)^T + k(1, 0, 0, \dots, 0)^T$.

细心的读者可以发现, 几乎每道试题的解题方法在我们书上都有.

由于本书紧扣考试大纲, 并注意分析了历年考试真题, 因此在考点上, 覆盖面全, 其中 2008 年所考到的微积分基本定理及周期函数的积分性质的题, 在我们书上均有详细的证明. 所以, 本书是针对性很强的辅导考研的自学课本.

自 2005 年起, 我们在网上义务答疑, 为考研学子释疑解难, 受到了读者的欢迎. 今年我们一如既往, 继续在网上为同学们解答在使用我们所编辅导时遇到的问题.

本书自出版以来, 受到广大读者关爱, 使编者在每年考研之后, 能与不少读者分享成功的喜悦, 感到莫大的欣慰, 在此表示由衷地感谢!

编 者

2008 之春于西安交大

第 1 版前言

目前考研的数学辅导书很多,却没有一本专门指导考研复习使用的教材,广大考生很希望有这样的教材。为此,我们尝试编写了本教材,以帮助考生能按教育部制订的研究生入学考试的《数学考试大纲》,全面系统地、有重点地、高效率地复习数学知识,取得好成绩。

复习是重复学习,不是重新学习。考研教材应与普通教材不同。首先,普通教材必须严格地按内容的逻辑顺序来编写,而考研教材不必受此拘束,可以从读者最熟悉的内容入手。比如高等数学部分,本书采取从微分法开始,以微分带积分,以积分促微分,使微积分紧密结合,深入浅出地讲完一元微积分的全部内容。其次,普通教材着重一个一个地讲解知识单元,而考研教材则侧重于内容间的联系。如本书线性代数部分将矩阵与行列式、向量代数与线性方程组、特征值特征向量与二次型紧密结合。第三,创立了一种新的体系,在逻辑顺序上更加符合考生的认识层次,更加适合于高效的复习。如概率论部分,先讲离散型随机变量的有关概率问题,再讲连续型随机变量的问题,再讲它们间的联系。第四,本书针对考研主要是考核解题能力的特点,安排了大量的例题,采用一题多解,一题多变的方式,侧重讲解题的思路、方法和技巧,培养读者灵活的分析能力和解决数学问题的能力。第五,根据编者多年辅导考研数学的经验,本书严格按《数学考试大纲》,从内容上既照顾了全面覆盖所有的考点,又突出了重点,从方法上既介绍了数学处理问题的基本方法,又突出了主要方法,特别考虑到考研试题中 70% 左右的是基本题,本教材在基本内容、基本方法上讲述的篇幅最大,对一些难题讲述,则侧重讲一道难题的思路,以及它与基本内容的联系,如何作到熟能生巧等等。第六,作为一本复习教材,本书还考虑要便于考生自学,因此,在许多题后附了不少注释,还介绍了不少自编练习题的方法。希望读者在阅读本书时,要一边看书一边自己动手推导,在读完一节,最好将这一节书中的例题当作习题,自己独立做一遍,然后再作本章练习题,这样效果会更好。

本书既然是一本考研的复习教材,因此,书中对一些估计考生很熟悉的内容,一些定理的证明、公式的推导等略去不讲,如果要知道相关的内容,可以在任何一本普通的教材中找到。

感谢西安交通大学出版社为本书的编辑和出版所作的努力。希望本书能受到读者的欢迎,更希望广大读者多提意见和建议,以使本书能改得更好,成为准备参加考研读者的良师益友。

编者

2006.3 修改于西安

目 录

2009 版前言

第 1 版前言

第 1 章 一元函数微积分(一)

1.1 微积分的基本方法	(1)
1.2 导数、微分及其实际意义	(18)
1.3 复合求导法的应用与高阶导数	(20)
练习题 1	(25)
答案与提示	(27)

第 2 章 一元函数微积分(二)

2.1 微分中值定理及简单应用	(30)
2.2 与微积分理论有关的证明题	(40)
2.3 导数的应用	(59)
2.4 定积分的应用	(65)
练习题 2	(71)
答案与提示	(74)

第 3 章 函数、极限和连续性

3.1 初等函数	(76)
3.2 函数的极限	(80)
3.3 求函数极限的基本方法	(86)
3.4 函数连续性及连续函数的性质	(91)
3.5 杂例	(95)
练习题 3	(102)
答案与提示	(105)

第 4 章 多元函数微分学

4.1 多元函数的概念与极限	(106)
4.2 多元函数连续、偏导数存在、可微的讨论	(108)
4.3 多元函数的微分法	(111)
4.4 多元函数的极值与最值	(118)
练习题 4	(123)
答案与提示	(125)

第 5 章 向量代数与空间解析几何多元函数微分学在几何上的应用

5.1 向量代数与空间解析几何	(127)
5.2 多元函数微分学在几何上的应用	(135)
练习题 5	(138)
答案与提示	(140)

第6章 重积分

6.1 二重积分	(141)
6.2 三重积分	(153)
6.3 重积分的应用	(160)
练习题6	(166)
答案与提示	(169)

第7章 曲线积分、曲面积分及场论初步

7.1 曲线积分及其应用	(171)
7.2 格林公式、平面曲线积分与路径无关的条件	(177)
7.3 曲面积分及其应用	(183)
7.4 高斯公式与斯托克斯公式	(187)
7.5 场论初步	(192)
练习题7	(196)
答案与提示	(198)

第8章 数列极限与无穷级数

8.1 数列极限	(199)
8.2 数项级数	(204)
8.3 幂级数	(210)
8.4 傅里叶级数	(221)
练习题8	(224)
答案与提示	(226)

第9章 微分方程

9.1 一阶微分方程	(228)
9.2 可降阶的微分方程	(236)
9.3 二阶线性微分方程	(237)
9.4 微分方程的应用	(243)
练习题9	(253)
答案与提示	(255)

第10章 矩阵和行列式

10.1 矩阵的概念与基本运算	(257)
10.2 矩阵的初等变换、矩阵的等价、矩阵的秩及初等矩阵	(262)
10.3 行列式的概念与性质	(264)
10.4 矩阵 A 的伴随矩阵及其性质	(267)
10.5 杂例	(269)
练习题10	(276)
答案与提示	(280)

第11章 向量组和线性方程组

11.1 向量的线性相关与线性无关	(283)
11.2 向量空间	(288)
11.3 向量的内积	(290)
11.4 线性方程组	(291)

11.5 杂例	(295)
练习题 11	(307)
答案与提示	(312)
第 12 章 矩阵的特征值和特征向量、二次型	
12.1 矩阵的特征值和特征向量	(315)
12.2 相似矩阵	(316)
12.3 实对称矩阵	(318)
12.4 二次型	(320)
12.5 杂例	(323)
练习题 12	(330)
答案与提示	(332)
第 13 章 离散型随机变量	
13.1 一维离散型随机变量及其分布	(336)
13.2 随机事件的关系和运算	(341)
13.3 概率的基本性质及基本公式	(345)
13.4 二维离散型随机变量及其概率分布	(354)
13.5 离散型随机变量的数字特征	(359)
练习题 13	(368)
答案与提示	(371)
第 14 章 连续型随机变量	
14.1 连续型随机变量及其分布	(374)
14.2 连续型随机变量的独立性	(377)
14.3 正态随机变量(重点)	(382)
14.4 连续型随机变量的概率计算(重点)	(385)
14.5 连续型随机变量函数的概率分布	(387)
14.6 连续型随机变量的数字特征的计算	(394)
练习题 14	(400)
答案与提示	(402)
第 15 章 大数定律和中心极限定理	
15.1 大数定律	(407)
15.2 极限定理	(408)
练习题 15	(410)
答案与提示	(411)
第 16 章 数理统计	
16.1 数理统计的基本概念	(412)
16.2 参数的点估计	(418)
16.3 参数的区间估计	(425)
16.4 假设检验	(426)
练习题 16	(428)
答案与提示	(430)

第1章 一元函数微积分(一)

1.1 微积分的基本方法

本书为何从微、积分法开始,而不从函数、极限开始?这正是本书的特点.我们认为,“复习”应当从你最熟悉、最容易提起回忆的内容入手,而不是从头再学一遍,这样效率会更高、效果会更好.

1.1.1 微积分的基本公式

定义 1.1 在某个区间 I 上,若 $F'(x) = f(x)$,便称函数 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导数,而称函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, $F(x) + C$ 是 $f(x)$ 的不定积分(C 是任意常数).

不定积分记为 $\int f(x)dx$.

从运算的角度讲,不定积分是微分的逆运算.因此,微积分运算的基础在于微分法.利用熟悉的微分,来做不太熟悉的积分,是复习微积分运算基本功的好方法.

例 1.1 求 $\int \sin 3x dx$.

解 这样想: $\cos 3x$ 求导能得到 $\sin 3x$,于是求导: $(\cos 3x)' = -3\sin 3x$,从而得 $\int \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$.

这就是我们说的用微分做积分题的方法,非但快,还不会出错,因为我们已经用求导验证了所得到的结果.下一个例题更能看出将微积分联系起来的好处.

例 1.2 验证表 1.1 中的基本公式(13)',即

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

解 做此题有一个巧妙方法

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx \stackrel{\textcircled{2}}{=} \int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) dx \\ &\stackrel{\textcircled{3}}{=} \int \frac{d(x + \sqrt{x^2 + a^2})}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \stackrel{\textcircled{4}}{=} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C \end{aligned}$$

这个方法是怎样得到的呢?原来它来自于求导的逆运算

$$\begin{aligned} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) &\stackrel{\textcircled{4}'}{=} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} (x + \sqrt{x^2 + a^2})' \stackrel{\textcircled{3}'}{=} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) \\ &\stackrel{\textcircled{2}'}{=} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \stackrel{\textcircled{1}'}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \end{aligned}$$

上面求导的倒数第1步即等式①'与积分的第1步即等式①倒过来看是一样的;同样②'与②、③'与③、④'与④是对应的.即,将求导的流程倒过来做,便得出这个积分的方法.

通过微分方法做积分题,可以让我们取得复习微积分的主动权,可以自己编题,先做微分,再反过来从微分的结果做积分.

例 1.3 我们目的是练习分部积分法,因此,编出一个题: $x^2 e^{-x}$,求导得 $(x^2 e^{-x})' = (2x - x^2)e^{-x}$;再求积分:

$$\begin{aligned}\int (2x - x^2)e^{-x} dx &= -(2x - x^2)e^{-x} + 2 \int (1 - x)e^{-x} dx = x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2(1 - x)e^{-x} - 2 \int e^{-x} dx \\ &= x^2 e^{-x} + C.\end{aligned}$$

因为是自己编的题,先求导,再积分,既练了微分,又练了积分,不用课本也不用老师、自编、自导、自演练,何乐而不为呢!我们提倡这样的复习方法:抓住内容间的联系,把书读薄,这样能够提高复习效率,增强复习效果。

为了练习微积分基本功,先要熟悉基本公式和运算法则,而且还是将微分和积分相对照更好。(见表 1.1 和表 1.2)。

表 1.1 微积分基本公式对照表

基本导数公式	对应的不定积分公式
① $(x^a)' = ax^{a-1}$	①' $\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C (a \neq -1)$
② $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	②' $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
③ $(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$	③' $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$
④ $(\sin x)' = \cos x$	④' $\int \cos x dx = \sin x + C$
⑤ $(\cos x)' = -\sin x$	⑤' $\int \sin x dx = -\cos x + C$
⑥ $(\tan x)' = \sec^2 x$	⑥' $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
⑦ $(\cot x)' = -\csc^2 x$	⑦' $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
⑧ $(\arcsin \frac{x}{a})' = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a > 0)$	⑧' $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$
⑨ $(\arctan \frac{x}{a})' = \frac{a}{a^2 + x^2} \quad (a > 0)$	⑨' $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$
⑩ $(\sinh x)' = \cosh x$	⑩' $\int \cosh x dx = \sinh x + C$
⑪ $(\cosh x)' = \sinh x$	⑪' $\int \sinh x dx = \cosh x + C$
⑫ $(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$	⑫' $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$
⑬ $(\ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2})' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \quad (a > 0)$	⑬' $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2} + C \quad (a > 0)$
⑭ $(\ln \frac{a+x}{a-x})' = \frac{2a}{a^2 - x^2} \quad (a > 0)$	⑭' $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C \quad (a > 0)$

对于此表中的 14 对公式,务必要记牢;以导数公式为基础,做到倒背如流。

由于紧扣微积分的联系,考虑到读者对微分熟悉,对积分较生疏,因此,我们以下主要先讲四种基本积分方法,读者应养成用微分检验积分结果的习惯。

表 1.2 微积分基本运算法则对照表

微分法(设 $F'(x) = f(x), G'(x) = g(x)$)	积分法
① 和的微分 $d[F(x) + G(x)] = f(x)dx + g(x)dx$	①' 分项积分法 $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
② 复合微分法 $dF(u(x)) = f(u)du = f(u(x))u'(x)dx$	②' 第一类换元积分法 $\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du$
③ 复合微分法 $dF(x(t)) = f(x)dx = f(x)\dot{x}(t)dt$	③' 第二类换元积分法 $\int f(x)dx = \int f(x(t))\dot{x}(t)dt$
④ 乘积微分法 $d(uv) = udv + vdu$	④' 分部积分法 $\int u dv = uv - \int v du$

1.1.2 分项积分法

例 1.4 $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C.$

例 1.5 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx = x - \arctan x + C.$

例 1.6 $\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C.$

分项积分法是最基本却又是容易被忽视的积分法,在复习中值得留意.

1.1.3 第一类换元积分法(凑微分的积分法)

例 1.7 计算 $\int \sin 2x dx.$

解 1 原式 $= \frac{1}{2} \int \sin 2x d(2x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + C.$

注 这里,实际上是令 $2x = u$,但当对这样简单的复合求导逆运算熟悉时,不必写出新的积分元 u ,大多数的第一类换元积分法都可以不写出 u ,而是将被积表达式凑成微分形式,即如 $\sin 2x dx = d(-\frac{1}{2} \cos 2x)$,故也称凑微分法.

解 2 原式 $= 2 \int \sin x \cos x dx = 2 \int \sin x d(\sin x) = \int d \sin^2 x = \sin^2 x + C.$

解 3 原式 $= 2 \int \cos x \sin x dx = -2 \int \cos x d(\cos x) = -\cos^2 x + C.$

复合求导是最重要的微分法则,因此,凑微分法是积分的最重要的方法.

例 1.8 求 $\int \frac{dx}{\cos x}.$

解 1 $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\sec x (\tan x + \sec x)}{\tan x + \sec x} dx = \int \frac{d(\tan x + \sec x)}{\tan x + \sec x} = \ln |\tan x + \sec x| + C$

解 2 $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{d \sin x}{1 - \sin^2 x} = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} + C$

解 3 $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} = 2 \int \frac{d \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} = \ln \left| \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right| + C$

$$\begin{aligned}\text{解 4 } \int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{dx}{\sin(\frac{\pi}{2} + x)} = \int \frac{d(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})} = \int \frac{\sec^2(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})} d(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) \\ &= \boxed{\ln \left| \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) \right| + C}\end{aligned}$$

以上 4 个方框的结果都是计算 $\int \frac{dx}{\cos x}$ 的公式,读者可用微分还原.

例 1.9 求 $\int \frac{dx}{1+e^x}$.

解 1 $\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{(1+e^x - e^x)dx}{1+e^x} = x - \ln(1+e^x) + C$

解 2 $\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^x dx}{e^x(1+e^x)} = \int (\frac{1}{e^x} - \frac{1}{1+e^x})e^x dx = x - \ln(1+e^x) + C$

解 3 $\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^{-x} dx}{1+e^{-x}} = -\ln(1+e^{-x}) + C$

1.1.4 第二类换元积分法

这一类是地道的换元法,第一类换元是凑微分,可以不作“换元”,第二类是假设被积函数 $f(x)$ 的原函数不易看出,而令 $x = x(t)$. 这样

$\int f(x)dx = \int f(x(t))\dot{x}(t)dt$, 使 $F(t) = f(x(t))\dot{x}(t)$ 比较简单. 通常,这类换元一个最重要思路是有理化被积表达式.

例 1.10 求 $\int x \sqrt{1-2x} dx$.

解 令 $1-2x = t^2$. 则 $x = \frac{1}{2}(1-t^2)$, $dx = -tdt$.

$$\text{原式} = \frac{1}{2} \int (t^2 - 1)t^2 dt = \frac{1}{10}t^5 - \frac{1}{6}t^3 + C = \frac{1}{30}[3(1-2x)^{5/2} - 5(1-2x)^{3/2}] + C$$

例 1.11 求 $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

解 1 令 $x = a \sin t$, 则 $dx = a \cos t dt$.

$$\text{原式} = a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} (t + \frac{1}{2} \sin 2t) + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C (\text{可以当成基本公式}).$$

解 2 (分部积分法).

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$= x \sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (\text{移项, 解出 } I)$$

$$I = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

解 3 (主要也是分部积分法).

$$I = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x \sqrt{a^2 - x^2} - I \quad (\text{移项})$$

故

$$I = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

例 1.12 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

解 1 (第一类换元).

$$\text{原式} = 2 \int \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = 2\arcsin\sqrt{x} + C.$$

$$\text{解 2} \quad \text{原式} = -2 \int \frac{d\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x})^2}} = -2\arcsin\sqrt{1-x} + C = 2\arccos\sqrt{1-x} + C.$$

注 遇到函数,首先要想到定义域.本题被积函数的定义域是 $(0,1)$,故我们只是在 $(0,1)$ 内求它的原函数.

解 3 (直接用公式).

$$\text{原式} = \int \frac{d(x - \frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2}} = \arcsin(2x-1) + C.$$

解 4(换元积分法) 令 $x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin t$

$$\text{原式} = \int dt = t + C = \arcsin(2x-1) + C.$$

解 5 由 $0 < x < 1$ 知,可令 $x = \sin^2 t, 1-x = \cos^2 t, dx = 2\sin t \cos t dt$.

$$\text{原式} = 2 \int dt = 2t + C = 2\arcsin\sqrt{x} + C.$$

解 6(有理化变换) 考虑被积函数.

$$\text{由} \quad \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x}{1-x}},$$

$$\text{令} \frac{x}{1-x} = t^2, \quad \text{则} x = \frac{t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2t}{(1+t^2)^2} dt$$

$$\text{原式} = 2 \int \frac{dt}{1+t^2} = 2\arctan t + C = 2\arctan \sqrt{\frac{x}{1-x}} + C.$$

1.1.5 分部积分法

$$\int u dv = uv - \int v du$$

将被积函数是 $u(x)v'(x)$ 的积分,化为 $v(x)u'(x)$ 的积分.要求表达式 $v(x)u'(x)$ 不比 $u(x)v'(x)$ 更复杂.

例 1.13 求 $\int \ln x dx$.

$$\text{解} \quad \text{原式} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

例 1.14 求 $\int x^2 \arcsin x dx$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{原式} &= \frac{x^3}{3} \arcsin x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{x^3}{3} \arcsin x - \frac{1}{6} \int \frac{x^2 dx^2}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{x^3}{3} \arcsin x + \frac{1}{6} \int (1-x^2)^{\frac{1}{2}} d(1-x^2) - \frac{1}{6} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) \\ &= \frac{x^3}{3} \arcsin x - \frac{1}{9} (1-x^2)^{3/2} + \frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C. \end{aligned}$$

例 1.15 求 $\int x^2 e^x dx$.

$$\text{解 1} \quad \text{原式} = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C.$$

解 2 (待定系数法). 设 $(x^2 + bx + c)e^x$ 是要求的一个原函数.

则 $[(x^2 + bx + c)e^x]' = [x^2 + (b+2)x + (b+c)]e^x = x^2 e^x$.

故 $b = -2, c = -b = 2$. 即 $\int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$.

以上分部积分法的第一个作用是依次化简被积函数直至求出原函数; 分部积分的第二个作用是产生递推公式.

例 1.16 求 $\int \sin^4 x dx$.

解 记 $\int \sin^n x dx = I_n$

$$I_4 = -\sin^3 x \cos x + 3 \int \sin^2 x \cos^2 x dx$$

$$= -\sin^3 x \cos x + 3 \int \sin^2 x dx - 3 \int \sin^4 x dx \quad (\text{将 } 3I_4 \text{ 移到等号左边}).$$

$$I_4 = -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{4} I_2.$$

$$I_2 = \int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + \int dx - I_2 \quad (\text{将 } I_2 \text{ 移到等号左边}).$$

$$I_2 = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} I_0 = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x + C$$

从而

$$I_4 = -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x - \frac{3}{8} \sin x \cos x + \frac{3}{4} x + C.$$

读者可以推导一般的 $I_n = \int \sin^n x dx$ 和 $I_n = \int \cos^n x dx$ 的递推公式.

例 1.17 求 $I_2 = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

解 我们采用倒推的方法. 由

$$I_1 = \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2} + 2 \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{1+x^2} + 2I_1 - 2I_2.$$

故 $I_2 = \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2} I_1 = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x + C$.

分部积分的第三个主要作用是产生循环公式而得出积分结果.

例 1.18 求 $I = \int e^x \cos x dx$.

解 $I = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - I$ (将 I 移到等号左边)

$$I = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C.$$

例 1.19 求 $I = \int \sqrt{a^2 + x^2} dx \quad (a > 0)$.

解 1 $I = x \sqrt{a^2 + x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = x \sqrt{a^2 + x^2} - I + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ (移项)

$$I = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C.$$

解 2 $I = \int \frac{a^2 + x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = a^2 \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + x \sqrt{a^2 + x^2} - I$ (移项)

$$I = \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + C \quad (\text{此结果可当公式用}).$$

读者还可换元积分做本题.

有理函数的积分主要是用分项积分. 其关键是化一个分式为部分分式, 而化一个分式为部分分式的关键是将分母分解因式. 三角有理函数从理论上讲用万能变换: 即设 $\tan \frac{x}{2} = t$, 可将三角有理函数化为有理函数的积分. 但一般做题用万能变换往往十分麻烦, 要利用三角函数间的关系灵活去做题, 也往往要综合运用以上四种基本的积分方法.

例 1.20 求 $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13} dx$.

解 本题中 $\frac{x+5}{x^2-6x+13}$ 已是部分分式了, 请注意以下所用分项积分的技巧:

由 $(x^2-6x+13)' = 2x-6$, 化 $x+5 = \frac{1}{2}(2x-6) + 8$. 于是

$$\text{原式} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13} + \int \frac{8}{(x-3)^2+4} d(x-3) = \frac{1}{2} \ln |x^2-6x+13| + 4 \arctan \frac{x-3}{2} + C.$$

例 1.21 (2000, 二) ① 设 $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, 求 $\int f(x) dx$.

解 令 $x = e^t$, 得 $f(t) = \frac{\ln(1+e^t)}{e^t}$, 则 $f(x) = \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$.

$$\text{原式} = -e^{-x} \ln(1+e^x) + \int e^{-x} \frac{e^x}{1+e^x} dx = -e^{-x} \ln(1+e^x) + x - \ln(1+e^x) + C.$$

例 1.22 (2000, 四) 求 $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

解 1 原式 $= 2 \int \arcsin \sqrt{x} d\sqrt{x} = 2 \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2 \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + 2 \sqrt{1-x} + C$.

解 2 令 $x = \sin^2 t$, 则

$$\text{原式} = 2 \int t \cos t dt = 2tsint - 2 \int \sin t dt = 2tsint + 2 \cos t + C = 2 \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + 2 \sqrt{1-x} + C.$$

例 1.23 (2001, 一) 求 $\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx$.

解 1 原式 $= -\frac{1}{2} e^{-2x} \arctan e^x + \frac{1}{2} \int \frac{e^x dx}{e^{2x}(1+e^{2x})} = -\frac{1}{2} e^{-2x} \arctan e^x + \frac{1}{2} \int e^{-x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{de^x}{1+e^{2x}}$
 $= -\frac{1}{2} (e^{-2x} \arctan e^x + e^{-x} + \arctan e^x) + C.$

解 2 令 $e^x = \tan t$, 则 $e^x dx = dt \tan t$.

$$\text{原式} = \int \frac{t}{\tan^3 t} dt \tan t = -\frac{1}{2} \frac{t}{\tan^2 t} + \frac{1}{2} \int \cot^2 t dt = -\frac{1}{2} \left(\frac{t}{\tan^2 t} - \int \csc^2 t dt + \int dt \right)$$

 $= -\frac{1}{2} \left(\frac{t}{\tan^2 t} + \cot t + t + C \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\arctan e^x}{e^{2x}} + e^{-x} + \arctan e^x + C \right).$

例 1.24 (2001, 二) 求 $\int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

解 令 $x = \tan t$, 则 $dx = \sec^2 t dt$.

$$\text{原式} = \int \frac{\cos t dt}{1 + \sin^2 t} = \arctan \sin t + C = \arctan \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

注 以上我们用到由 $x = \tan t$, 得 $\sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 可用画小直角三角形(见图

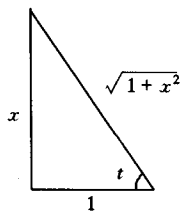


图 1.1

1.1) 方法求得. 这种方法方便.

① (2000, 二) 表示 2000 年数学二的试题. 下同.

例 1.21 ~ 例 1.24 的 4 道例题对我们有如下启发:不定积分题在考研试题中常常出现,但没有很难的题.

例 1.25 计算 $I = \int \cos^m x \cos(m+2)x dx$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad I &= \int \cos^m x [\cos(m+1)x \cos x - \sin(m+1)x \sin x] dx \\ &= \int \cos^{m+1} x \cos(m+1)x dx + \frac{1}{m+1} \cos^{m+1} x \sin(m+1)x - \int \cos^{m+1} x \cos(m+1)x dx \\ &= \frac{1}{m+1} \cos^{m+1} x \sin(m+1)x + C. \end{aligned}$$

注 本题关键是将 $\cos(m+2)x = \cos[(m+1)x + x]$ 展开,再分部积分. 这个技巧来源于对函数 $f(x) = \cos^n x \sin nx$ 求导的逆运算,并令 $n = m+1$ 的计算,读者不妨一试.

1.1.6 定积分与微分的联系

1.1.6.1 定积分的概念与性质

定义 1.2 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义. 经以下三步:

(1) 分割 对区间 $[a, b]$ 进行任意分割: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. 记 $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$, 以 Δx_k 表示此区间长即 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} (k = 1, 2, \cdots, n)$.

(2) 求和 在每个 Δ_k 上任意取一点 ξ_k , 作 $f(\xi_k) \Delta x_k (k = 1, 2, \cdots, n)$, 及取和

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

(3) 取极限 记 $\lambda = \max_{k=1, 2, \cdots, n} \Delta x_k$,

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

若这个和式极限存在, 且与分割、取点无关, 就称函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 极限值称为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上

的定积分. 记为 $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$

由定义可见, 定积分与不定积分截然不同, 定积分作为一种和式的极限是独立于导数和微分的; 而不定积分作为导数和微分的逆运算, 则完全要依赖导数和微分.

注意 定积分中的极限既不单纯是函数的极限, 更不是数列的极限, 加上定义中“任意分割”、“任意取点”两个任意性, 更使其显得“神秘”. 好在高等数学并不去深究这一概念, 只要正确理解它, 并掌握其一些基本的性质.

可积的必要条件. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

因此, 无界函数的广义积分, 不可能用“和式极限”来定义.

可积的充分条件. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 或分段连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

定积分的基本性质

1. 线性性

设 $f(x), g(x)$ 皆可积, 则其线性组合 $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ 可积, 且

$$\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)] dx = c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b g(x) dx$$

2. 对区间的可加性

首先, 定义 $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

则对任意的 a, b, c , 有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$