大学数学系列教材

线性代数

第三版

XIAN
XING
DAI
SHU

主　编　刘二根　谢霖铨
副主编　朱传喜　邬国根
主　审　孙弘安

江西高校出版社

学数学系列教材

线性代数

第三版

主　编　刘二根　谢霖铨
副主编　朱传喜　邬国根
主　审　孙弘安

江西高校出版社

线性代数(第三版)
主编　刘二根　谢霖铨

江 西 高 校 出 版 社
(江西省南昌市洪都北大道96号)
邮编:330046　电话:(0791)8592235,8504319
各地新华书店经销
江西太元科技有限公司照排部照排
江西教育印刷厂印刷

1999年12月第3版　2004年7月第8次印刷
850mm×1168mm　1/32　7.375印张　198千字
印数:44401~48400册

定价:10.00元
ISBN 7-81033-126-4/O·9

前　言

本书是按照全国工科数学课程教学指导委员会提出的“数学课程教学基本要求”(线性代数部分),根据面向21世纪工科数学教学内容和课程体系改革的基本精神而编写的教科书.内容包括行列式、n维向量、矩阵、线性方程组、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换及用MATLAB解线性代数问题;每章附有习题,书末附有习题的参考答案.第一章至第五章属于基本内容,教学时数约34学时,第六章是为要求掌握《线性代数》较多知识的专业编写的,讲授课时约8学时,而附录是学习《线性代数》的辅助内容,是为开展计算机辅助教学而编写的,约用2学时介绍.

本书第二版于1995年出版,经历了几年的教学实践.现根据在教学实践中积累的经验,以及使用本书的同行们所提宝贵意见,在保持原来基本框架的基础上对部分内容作了修改,成为本书第三版.参加本书编写的有高文明(第一章)、徐义红(第二章)、刘二根(第三章)、邬国根(第四章)、邓毅雄(第五章)、谢霖铨(第六章)、熊小峰(附录),由刘二根、朱传喜对全书进行统稿,孙弘安审定.

由于编者水平有限,缺点错误在所难免,恳请读者批评指正.

编　者

1999年5月

目　录

第一章 行列式

行列式是从解线性方程组的问题引进的.行列式不但是研究线性方程组和矩阵的有力工具,而且在许多理论和实际应用问题中,也发挥着重要作用.本章主要介绍行列式的定义、性质及计算,最后介绍行列式的一个应用,即用行列式解 n 元线性方程组的克莱姆法则.

§1 行列式的概念

在给出 n 阶行列式的定义之前,让我们先回顾中学代数从解线性方程组而引出的二阶和三阶行列式的定义.

为了解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1}$$

我们可以采用消元法,用 a_{22}去乘第一个方程,a_{12}去乘第二个方程,然后两方程相减,得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$,则可得

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \tag{2}$$

类似可以求得

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{3}$$

表达式(2)和(3)提供了线性方程组(1)解的一般公式.为了便于

记忆和讨论,我们引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

用它表示数 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{4}$$

我们称之为二阶行列式.其中横写的叫做行,竖写的叫做列,一共有二行二列,$a_{ij}(i,j=1,2)$称为它的元素.

根据上面二阶行列式的定义,(2)式和(3)式的分子分别可以写为

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22}-a_{12}b_2, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

可见二阶行列式是这样两项的代数和:一项是位于第一行第一列的元素与划去第一行和第一列后剩下的一个元素的乘积,取正号;另一项是位于第一行第二列的元素与划去第一行和第二列后剩下的一个元素的乘积,取负号.例如

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 2\times 9-7\times 3=-3.$$

利用二阶行列式的定义,方程组(1)的解可写成

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{5}$$

我们通过消元法得到了求解线性方程组(1)的公式(2)、(3),这个公式用行列式来表示就是(5)式.虽然用消元法可以求得二元线性方程组的解公式,但是随着未知数的增多这个公式越来越复杂,其规律也不易掌握.而在用行列式表示的解公式(5)中,解的表达有一定规律可循:

1. x_1 与 x_2 的分母都是将原方程组未知数前的系数按原顺序排成的一个行列式.

2. x_1 的分子行列式是将分母行列式的第一列换成常数项 b_1 与 b_2 而得到,x_2 的分子行列式是将分母行列式的第二列换成常数项所得.

正因为用行列式来表示二元线性方程组的解有简单明了的优点,我们希望也能用它来将一般的线性方程组的解表示出来. 为此我们来讨论三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{6}$$

从方程组(6)的前两个方程消去 x_3,后两个方程也消去 x_3,再从所得到的两个方程中消去 x_2 就得到

$$\begin{aligned} &(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})x_1 \\ &\quad = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} \\ &\qquad - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3. \end{aligned} \tag{7}$$

注意到上式中 x_1 的系数是由方程组(6)中未知数的 9 个系数 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$按照一定的规律构成的,借助二阶行列式的定义,该系数可表示为

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

我们把此式记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为三阶行列式. 即

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{8}
$$

上式的规律是:把第一行每一元素乘以划去该元素所在的行列之后剩下的二阶行列式,前面再冠以正、负相间的符号,最后求它们的代数和.

同样地,对(7)式等号右端正是三阶行列式

$$
\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.
$$

若(7)式 x_1 的系数不为零,则可写成

$$
x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \tag{9}
$$

类似的办法求得

$$
x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \tag{10}
$$

我们注意到在 x_1, x_2, x_3 的表达式中,它们的分母都相同.分子行列

式都是由分母行列式去掉对应于 x_i 的第 i 列，再换上常数列 b_1,b_2,b_3 组成．这些特点与二元线性方程组解的表达式是一样的．如果我们引进 n 阶行列式的概念，当然希望也能用 n 阶行列式表示 n 元线性方程组的解，本章第 3 节讨论的就是这个问题．

如果定义一阶行列式 $|a|=a$，则我们发现(4)式和(8)式的规律是一样的．我们把此规律进一步推广，便引进 n 阶行列式的概念．

定义 1 记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

它由 n 行 n 列元素(共 n^2 个元素)组成，又记 M_{ij} 为 a_{ij} 的余子式，即由 D 中划去第 i 行第 j 列后剩下的 $n-1$ 行 $n-1$ 列元素所组成的，即：

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

称 D 为 n 阶行列式，它的值由下面的归纳法来定义．

当 $n=1$ 时，(11)式定义 $D=a_{11}$，假定对 $n-1$ 阶行列式已经定义，那末对任意的 i,j，M_{ij} 是一个 $n-1$ 阶行列式，它的值由归纳假定是已经定义好的，既然如此，我们就可以借助于 M_{ij} 按下面的方式来定义 n 阶行列式 D 的值：

$$\begin{aligned} D = {} & a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\cdots+(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} \\ & +\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n} \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}. \tag{12}$$

显然,对于任何自然数 n,(12)式给出了一个计算 n 阶行列式的方法:将 n 阶行列式化为 $n-1$ 阶,再化为 $n-2$ 阶,……最后便可求出 D 的值.(12)式又称为 D 按第一行的展开式.

为了使(12)式的形状更好一些,我们再引进代数余子式的概念.

定义 2 在行列式 D((11)式)中,第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 的代数余子式定义为

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

其中 M_{ij} 是 a_{ij} 的余子式.

由定义 2,(12)式可化为

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}. \tag{13}$$

例 1 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 7 & 2 & 7 \\ 8 & 3 & 9 \end{vmatrix}; \qquad (2) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

[解]

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 7 & 2 & 7 \\ 8 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - 6 \times \begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-3) - 6 \times 7 + 0$$

$$= -45.$$

$$(2) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times 3 - (-1) \times (-6) + 3 \times (-9)$$

$$= -27.$$

例 2 用定义证明下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

注:主对角线(即从左上角到右下角这条对角线)上方所有元素全为零的行列式称为下三角行列式,类似地,可定义上三角行列式.上三角行列式和下三角行列式统称为三角行列式.

[证] 这是一个 n 阶行列式,但它的第一行除 a_{11}外均为零,因此利用(12)式展开时只有一项不为零,于是

$$D=a_{11}M_{11}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

容易看出 a_{11}的余子式仍是一个下三角行列式,只是阶数比 D 的阶数小 1. 因此又可用同样的方法求得

$$M_{11}=a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这样一直下去,则可得

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

即下三角行列式的值正好等于主对角线上元素的乘积.

由例 2,易知对角行列式(即主对角线以外的元素全为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 3 证明

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

[证] 由定义,按第一行反复展开

$$D = a_{1n}(-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3,n-2} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} (n-1\text{ 阶})$$

$$= a_{1n}(-1)^{1+n}a_{2,n-1}(-1)^{1+n-1}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{3,n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{4,n-3} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} (n-2\text{ 阶})$$

$$= \cdots\cdots$$

$$= (-1)^{1+n}(-1)^{1+n-1}\cdots(-1)^{1+2}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{(n-1)(n+4)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

§2 行列式的基本性质与计算

(一)行列式的基本性质

行列式的基本性质不仅对理解行列式的概念是必要的,而且是计算行列式的基础.下面我们来研究行列式的基本性质,先介绍一个概念.

定义 3 设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

如果把 D 的行列互换而不改变各行、各列的顺序,得到一个新的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为行列式 D 的转置行列式,记为 D' 或 D^T.

例如,在例 1(1)中该行列式的转置行列式为

$$D'=\begin{vmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix}.$$

由行列式的定义,知

$$D'=1\times\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}-7\times\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}+8\times\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}=-45.$$

此行列式和原来的行列式恰好相等,即 $D'=D$.

事实上，对一般的 n 阶行列式，我们也有同样的结论.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D'$.

由性质 1 及例 2 知上三角行列式也等于主对角线上元素的乘积.

根据性质 1 可知，行列式中行与列具有同等地位，行列式的性质凡是对行成立的，对列也同样成立，反之也成立.

对于例 1(1)中的行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&6&0\\7&2&7\\8&3&9\end{vmatrix},$$

将 D 的任意两行(列)交换，例如交换第一行、第三行得到

$$D_1=\begin{vmatrix}8&3&9\\7&2&7\\1&6&0\end{vmatrix},$$

由行列式的定义，容易算得 $D_1=45=-D$.

一般地，我们也有下面的结论.

性质 2　互换行列式的两行(列)，行列式改变符号.

由于性质 1 和性质 2 的证明比较复杂，我们只不加证明的给出来.

由性质 2 有下面的推论.

推论 1　若行列式 D 中某一行(列)的所有元素均为零，则

$$D=0.$$

[证]　当第一行元素全为零时，则由行列式的定义显然有

$$D=0.$$

若第 i 行($i>1$)的元素全为零时，则交换第 i 行和第一行后所得到的行列式应等于零，从而由性质 2 知 $D=0$.　　证毕

推论 2　若行列式 D 中有两行(列)相同，则 $D=0$.

只要将相同的两行互换就有 $-D=D$，故 $D=0$.

性质 3　如果行列式 D 中某行(列)的所有元素是两个数的和，

那么 D 可表示成两个新行列式之和，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{(第 } i \text{ 行)}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

［证］ 当 $i=1$ 时，由行列式的定义知

$$\begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & \cdots & b_{1n}+c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}(b_{1j}+c_{1j})M_{1j}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}b_{1j}M_{1j} + \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}c_{1j}M_{1j}$$

$$= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

当 $i>1$ 时，把第 i 行与第一行互换，再按上面方法把行列式拆成两个行列式之和，然后再把这两个行列式的第 i 行与第一行互换