万向思维

特别合作 sina 新浪教育

倍速

100+100+100 ?= 1000000

学习法

学习策略 + 漫画释义 + 综合应用 + 课后解答

高中数学 选修 2–2

人教 A 版

总主编 刘增利

打造学科状元

北京出版社出版集团
BEIJING PUBLISHING HOUSE(GROUP)
北京教育出版社
BEIJING EDUCATION PUBLISHING HOUSE

倍速 学习法

100+100+100²=1000000

万向思维 万卷真情™

基础·奠定一生成功路
倍速·坚定成功与你零距离
超效·决定学习新动力

高中 新课标

科目	分序	版本全称	版本简称	必修①	必修②	必修③	必修④	必修⑤
语文	1	人民教育出版社	人教版	✓	✓	✓	✓	✓
	2	广东教育出版社	粤教版	✓	✓	✓	✓	✓
	3	江苏教育出版社	国标江苏版	✓	✓	✓	✓	✓
	4	山东人民出版社	鲁人版	✓	✓	✓	✓	✓
	5	语文出版社	语文版	✓	✓	✓	✓	✓
数学	6	人民教育出版社A版	人教A版	✓	✓	✓	✓	✓
	7	人民教育出版社B版	人教B版	✓	✓	✓	✓	✓
	8	北京师范大学出版社	北师大版	✓	✓	✓	✓	✓
	9	江苏教育出版社	国标江苏版	✓	✓	✓	✓	✓
英语	10	人民教育出版社	人教版	✓	✓	✓	✓	✓
	11	外语教学与研究出版社	外研版	✓	✓	✓	✓	✓
	12	北京师范大学出版社	北师大版	✓	✓	✓	✓	✓
	13	河北教育出版社	冀教版	✓	✓	✓	✓	✓
	14	译林出版社	译林版	✓	✓	✓	✓	✓
	15	重庆出版社	重庆版	✓	✓	✓	✓	✓
物理	16	人民教育出版社	人教版	✓	✓			
	17	山东科学技术出版社	鲁科版	✓	✓			
	18	广东教育出版社	粤教版	✓	✓			
	19	上海科技教育出版社	沪科教育版	✓	✓			
化学	20	人民教育出版社	人教版	✓	✓			
	21	江苏教育出版社	国标江苏版	✓	✓			
	22	山东科学技术出版社	鲁科版	✓	✓			
政治	23	人民教育出版社	人教版	✓	✓	✓	✓	
历史	24	人民教育出版社	人教版	✓	✓	✓		
	25	岳麓书社	岳麓版	✓	✓	✓		
地理	26	人民教育出版社	人教版	✓	✓	✓		
	27	中国地图出版社	地图版	✓	✓	✓		
	28	山东教育出版社	鲁教版	✓	✓	✓		
	29	湖南教育出版社	湘教版	✓	✓	✓		
生物	30	人民教育出版社	人教版	✓	✓	✓		
	31	中国地图出版社	地图版	✓	✓	✓		
	32	江苏教育出版社	国标江苏版	✓	✓	✓		

选修			
科目	模块	版别	识别
数学	1−1	人教A版	✓
		人教B版	✓
	1−2	人教A版	✓
		人教B版	✓
	2−1	人教A版	✓
		人教B版	✓
	2−2	人教A版	✓
		人教B版	✓
	2−3	人教A版	✓
		人教B版	✓
英语	6	人教版	✓
		外研版	✓
	7	人教版	✓
		外研版	✓
	8	人教版	✓
		外研版	✓
物理	3−1	人教版	✓
	3−2	人教版	✓
	3−3	人教版	✓
	3−4	人教版	✓
	3−5	人教版	✓
化学	3	人教版	✓
	4	人教版	✓
	5	人教版	✓

万向思维 培养学子 全球视野

ISBN 978-7-5303-6145-0

9 787530 361450 >

定价：11.80元

总 主 编：刘增利

封面设计：魏晋文化 WEIJINWENHUA

特别合作 sina 新浪教育

倍速学习法

100+100+100=1000000

高中数学 选修2－2

人教A版

总主编 刘增利
学科主编 杨文彬
本册主编 韩廷蕴
编者 陈元端 王鹏 代凤奎 陈勤 冯艳红 李丽丽

北京出版社出版集团
BEIJING PUBLISHING HOUSE(GROUP)
北京教育出版社
BEIJING EDUCATION PUBLISHING HOUSE

编读交流平台

主编邮箱:zhubian@ wxsw. cn (任何疑问、意见或建议,皆请提出,我们是很虚心的。)

投稿邮箱:tougao@ wxsw. cn(想让大家分享你的学习心得和人生体验吗? 快投稿吧!)

求购邮箱:qiugou@ wxsw. cn(什么书适合自己,在哪能买到? 我们的选书顾问为你量身选择。)

图书质量监督电话:010 - 62380997　010 - 58572393　010 - 82378880(含图书内容咨询)

传真:010 - 62340468

销售服务短信:		建议咨询短信:	
中国移动用户发至	625551001	中国移动用户发至	625556018
中国联通用户发至	725551001	中国联通用户发至	725556018
小灵通用户发至	9255551001	小灵通用户发至	9255556018

想知道更多的图书信息,更多的学习资源,请编辑手机短信"**万向思维**"发送至**50120**;想知道更多的考试信息,更多的学习方法,请编辑相应的手机短信"**小学学习方法**""**初中学习方法**"或"**高中学习方法**"发送至**50120**。

通信地址:北京市海淀区王庄路1号清华同方科技广场B座11层万向思维(邮编100083)。

最新"万向思维金点子"奖学金获奖名单

2006年12月10日

一等奖:

狄　欢(江苏溧阳)

二等奖:

秦文莉(安徽宿州)　周文颖(河北迁西)

熊秋艳(云南墨江)　方　莱(安徽蚌埠)

李　昊(河南潢川)　马建明(安徽阜南)

王晓楠(辽宁本溪)　常思佳(黑龙江明水)

樊昕阳(河南安阳)　陈佳莹(浙江慈溪)

……

2007年7月10日

一等奖:

周　政(甘肃庆阳)　李贵兵(陕西石泉)

二等奖:

张　雪(安徽寿县)　尹寒梅(四川岳池)　夏佳志(湖北孝感)　李文霞(青海湟中)

宁年宝(福建三明)　雷裕鹏(福建福安)　谭进艳(广东廉江)　郑　慧(海南儋州)

李莹莹(黑龙江嫩江)　司晗广(河南许昌)　卢建英(云南绿春)　伍冬林(四川南充)

吴栩莹(浙江上虞)　黄洁仪(广东大朗)　郭　磊(陕西咸阳)　何　攀(甘肃庆阳)

陈斯文(福建龙海)　臧东东(内蒙古赤峰)　胡承贤(江西宜春)　倪　燕(四川成都)

……

倍速学习法　高中数学选修2-2　人教A版

策划设计　北京万向思维基础教育教学研究中心数学教研组

总主编　刘增利

学科主编　杨文彬

本册主编　韩廷蕴

责任编辑　邱利芳

责任审读　冯艳红　陈　勤

责任校对　晁　鲁　彭凤珠

责任录排　李翠翠

封面设计　魏　晋

版式设计　廉　赢

插图作者　范金凤

出　　版　北京出版社出版集团

　　　　　北京教育出版社

发　　行　北京出版社出版集团

印　　刷　陕西思维印务有限公司

经　　销　各地书店

开　　本　890×1240　1/32

印　　张　8.5

字　　数　238千字

版　　次　2007年11月第1版

印　　次　2007年11月第1次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5303-6145-0/G·6064

定　　价　11.80元

目录

第一章　导数及其应用

CONTENTS

目录

CONTENTS

目录

CONTENTS

目录

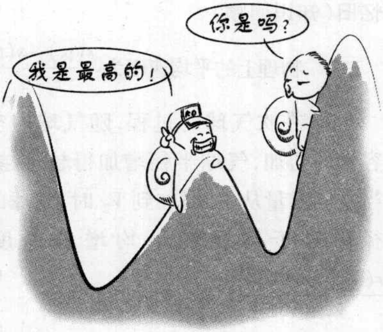
CONTENTS

第一章　导数及其应用

分类讨论思想

解答某些数学问题时，有时会有多种情况，对各种情况加以分类，并逐类求解，然后综合求解，这就是分类讨论法. 分类讨论是一种逻辑方法，也是一种数学思想. 有关的数学问题具有明显的逻辑性、综合性、探索性，能训练人的思维的条理性和概括性.

本章整体感知



导数和定积分都是微积分的核心概念.

它们是解决自然科学和生活中实际问题的有力工具.

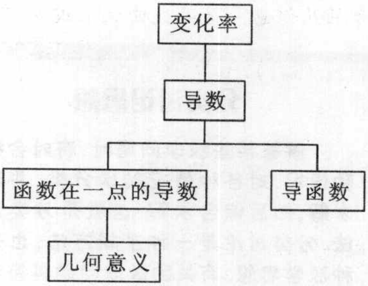
本章的重点是：导数的概念，并能利用导数公式、运算法则求导数；利用导数判断函数的单调性，求函数的极大值、极小值、最大值、最小值；利用导数的方法解决实际应用问题.

难点是对导数概念的理解，求导数和导数的应用；以及定积分的定义，应用定积分的几何意义求曲边梯形面积. 关键是要能根据实际问题，建立适当的函数关系式.

本章涉及的数学思想方法有：化归转化的思想、数形结合的思想、逼近思想、极限思想等.

1.1　变化率与导数

知识结构 · 理清知识脉络



自主学习 · 享受探究乐趣

一、新知导入

忆旧（知识回顾）

1. 物理上的平均速度为：$\dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$.

2. 在吹气球的过程，随气球内空气容量的增加，气球半径增加得越来越慢. 当空气容量从 V_1 增加到 V_2 时，气球的半径相对于体积的平均增长速度为 $\dfrac{r(V_2)-r(V_1)}{V_2-V_1}$.

迎新（问题引入）

左面两个问题的关系式：平均速度 $=\dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$ 和平均增长速度 $=\dfrac{r(V_2)-r(V_1)}{V_2-V_1}$. 若用函数 $y=f(x)$ 表示，应该如何表示呢？它们表示的又是什么量呢？

二、教材详析

知识点 1. 平均变化率

设函数 $y=f(x)$，x_1、x_2 是其定义域内不同的两点，那么函数的变化率可用式子 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ 表示，我们把这个式子称为函数 $f(x)$ 从 x_1 到 x_2 的平均变化率.

习惯上令 $\Delta x=x_2-x_1$，可把 Δx 看作是相对于 x_1 的一个"增量"，可用 $x_1+\Delta x$ 代替 x_2；类似地，$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$. 于是，平均变化率可以表示为 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

特别提示：

(1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ 中，Δx、Δy 的值可正可负，但 Δx 不能为 0. 若 Δy 为 0，则 $f(x)$ 为常数函数.

(2) 若 $x_1=x_0$，$x_2=x_0+\Delta x$，则平均变化率可表示为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

(3) 平均变化率的几何意义是函数曲线上过两点割线的斜率，函数 $y=f(x)$ 图象上两点 $A(x_1,f(x_1))$，$B(x_2,f(x_2))$，则 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=k_{AB}$.

知识点 2. 瞬时速度

作变速直线运动的物体在不同时刻的速度是不同的，把物体在某一时刻的速度叫瞬时速度.

用数学语言描述为：设物体运动的位移与时间的关系是 $s=s(t)$，当 Δt 趋近于 0 时，$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$ 趋近于常数，我们把这个常数称为 t_0 时刻的瞬时速度.

特别提示：

(1) Δt 趋近于 0，是指时间间隔 Δt 越来越短，能越过任意小的时间段，但始终不能为 0.

(2) Δt、Δs 在变化中都趋近于 0，但它们的比值趋近于一个确定的常数.

(3) 求瞬时速度的步骤：①设非匀速直线运动的位移满足 $s=s(t)$.

②设时间改变量为 Δt，则位移改变量 $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$.

③平均速度 $\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$.

④瞬时速度：当 Δt 趋近于 0 时，$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 趋近于 v（常数）.

知识点 3. 导数

一般地，函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率是：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，我们称它为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

特别提示：

(1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，是指当 Δx 趋近于 0 时，平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 趋近于一个常数 l，l 也就是函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率.

(2)求导的本质是求极限,当 Δx 趋近于 0 时,若$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$的极限存在,则说函数在点 x_0 处可导;若$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$的极限不存在,则说函数在点 x_0 处不可导.

(3)求$f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数的步骤:

①求函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$;

②求平均变化率$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$;

③取极限,得导数$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

知识点 4. 导数的几何意义

如图 1-1-1,我们可以发现,当点 Q 趋近于点 $P(x_0,f(x_0))$时,割线 PQ 趋近于确定的位置,这个确定位置的直线 PT 就称为过点 P 的切线.

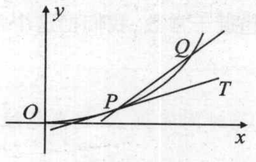


图 1-1-1

容易知道,割线 PQ 的斜率为 $k=\dfrac{f(x_Q)-f(x_P)}{x_Q-x_p}$.当点 Q 无限趋近于点 P 时,k 无限趋近于切线 PT 的斜率,因此,函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数就是切线 PT 的斜率,即

$$k=f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

特别提示:

(1)大多数函数曲线在一个非常小的范围内大致可看作直线,所以某点附近的曲线可以用过此点的切线近似代替,即以直代曲.

(2)利用导数求曲线的切线方程的步骤:

①求出函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数$f'(x_0)$;

②根据直线的点斜式方程,得切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

知识点 5. 导函数

如果$f(x)$在开区间(a,b)内每一点 x 都是可导的,则称$f(x)$在区间(a,b)可导.在区间(a,b)内,$f'(x)$构成一个新的函数,我们把这个函数称为函数$f(x)$的导函数,

简称导数. $y=f(x)$ 的导函数有时也记作 y',即 $f'(x)=y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

特别提示:

注意理解"函数在一点处的导数"和"导函数"的区别:

(1)函数在一点处的导数,就是该点附近的函数值的改变量与自变量的改变量的比值的极限,它是一个数值,不是变数.

(2)导函数是对某一区间内任意一点 x 而言的. 函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点都可导,是指对于区间 (a,b) 内每一个确定的值 x_0,都对应着一个确定的导数 $f'(x_0)$. 当 x 变化时,$f'(x)$ 随之改变,所以 $f'(x)$ 是 x 的一个函数.

(3)函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数,就是导函数 $f'(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的函数值.

解题方法·乘坐智慧快车

一、基础经典全析

题型1　利用定义求导数

例1 求下列函数的导数.

(1)求函数 $y=\sqrt{x}$ 在 $x=1$ 处的导数;

(2)求 $y=x^2+ax+b$(a,b 为常数)的导数.

分析:求函数在某一点处的导数,可以利用定义和导函数的函数值来求.

解:(1)方法一(导数定义法):$\Delta y=\sqrt{1+\Delta x}-1$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{1+\Delta x}-1}{\Delta x}=\frac{(\sqrt{1+\Delta x}-1)(\sqrt{1+\Delta x}+1)}{\Delta x(\sqrt{1+\Delta x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{1+\Delta x}+1}.$$

$$\because \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\Delta x}+1}=\frac{1}{2},\therefore y'|_{x=1}=\frac{1}{2}.$$

方法二(导函数的函数值法):$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}},$$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$\therefore y'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\therefore y'|_{x=1}=\frac{1}{2}.$$

$$(2)y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 + a(x+\Delta x) + b - (x^2+ax+b)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + ax + a \cdot \Delta x + b - x^2 - ax - b}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x \cdot \Delta x + a \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + a + \Delta x) = 2x + a.$$

点拨:根据导数的定义求函数的导数是求导数的基本方法,确定 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数有两种方法,即导数定义法和导函数的函数值法.

题型 2　求切线方程

例2 求曲线 $y=\frac{1}{x}$ 上一点 $P\left(4,\frac{1}{4}\right)$ 处的切线方程.

分析:关键是求出切线的斜率. 由导数的几何意义知,其斜率为 $f'(4)$,为此需求出曲线在点 P 处的导数.

解:$\because f'(4) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(4+\Delta x) - f(4)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{4+\Delta x} - \frac{1}{4}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-\Delta x}{4(4+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{4(4+\Delta x)} = -\frac{1}{16}.$$

$\therefore$ 所求切线的斜率为 $-\frac{1}{16}$.

$\therefore$ 所求切线的方程为 $y-\frac{1}{4} = -\frac{1}{16}(x-4)$,即 $x+16y-8=0$.

点拨:先求出点 P 处切线的斜率,再利用点斜式求出切线方程.

题型 3　求切点坐标

例3 已知曲线 $y=x^2+6$ 的切线分别符合下列条件,求切点.

(1)平行于直线 $y=4x-3$;

(2)垂直于直线 $2x-y+5=0$.

分析:根据导数的几何意义,求出切线的斜率,然后利用两直线平行、垂直的条件求出切点坐标.

解:设切点坐标为 (x_0,y_0).

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^2+6-(x^2+6)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$

$\therefore$ 过(x_0,y_0)的切线的斜率为 $2x_0$.

(1)$\because$ 切线与直线 $y=4x-3$ 平行,$\therefore 2x_0=4,x_0=2,y_0={x_0}^2+6=10$,即过曲线 $y=x^2+6$ 上点(2,10)的切线与直线 $y=4x-3$ 平行.

(2)$\because$ 切线与直线 $2x-y+5=0$ 垂直,$\therefore 2x_0\cdot 2=-1$,得 $x_0=-\dfrac{1}{4},y_0=\dfrac{97}{16}$,即过曲线 $y=x^2+6$ 上点$\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{97}{16}\right)$的切线与直线 $2x-y+5=0$ 垂直.

点拨: 两平行直线、垂直直线的斜率关系经常用到.

题型 4　导数的应用

例 4 已知曲线 $C:y=x^3$:

(1)求曲线 C 上横坐标为 1 的点处的切线方程;

(2)第(1)小题中的切线与曲线 C 是否还有其他公共点?

分析:(1)求出 $y=x^3$ 在 $x=1$ 处的导数值和切点坐标,再用点斜式写出切线方程.(2)只要联立切线方程和曲线方程求解即可.

解:(1)$\because x=1$ 时,$y=1^3=1$,$\therefore$ 切点坐标为(1,1).

又$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(1+\Delta x)^3-1}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[3+3\Delta x+(\Delta x)^2]=3$,即切线的斜率为 3.

$\therefore$ 所求的切线方程为 $y-1=3(x-1)$,即 $y=3x-2$.

(2)由$\begin{cases}y=3x-2,\\ y=x^3,\end{cases}$得 $x^3-3x+2=0$,

即$(x-1)(x^2+x-2)=0$,得 $x=1$ 或 $x=-2$.

$\therefore$ 切线与曲线 C 还有一个交点$(-2,-8)$.

点拨: 曲线的切线与曲线的公共点可以有多个.

例 5 已知直线 l_1 为曲线 $y=x^2+x-2$ 在点(1,0)处的切线,l_2 为该曲线的另一条切线,且 $l_1\perp l_2$.

(1)求直线 l_2 的方程;

(2)求直线 l_1,l_2 和 x 轴所围成的三角形的面积.

分析: 由 $l_1\perp l_2$ 可得出斜率 k_2,求出 l_1,l_2 和 x 轴两两相交的交点坐标再求面积.

解:(1)$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)-2-(x^2+x-2)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x+1)=2x+1$,

$\therefore f'(1)=3$，$\therefore$ 直线 l_1 的方程为 $y=3(x-1)$.

设 l_2 过曲线 $y=x^2+x-2$ 上的点 $B(b,b^2+b-2)$，

则过 B 点的切线的斜率为 $f'(b)=2b+1$，

直线 l_2 的方程为 $y-(b^2+b-2)=(2b+1)(x-b)$，即 $y=(2b+1)x-b^2-2$.

$\because l_1\perp l_2$，$\therefore 3(2b+1)=-1$，得 $b=-\dfrac{2}{3}$.

$\therefore$ 直线 l_2 的方程为 $y=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{22}{9}$.

(2)解方程组 $\begin{cases}y=3x-3,\\ y=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{22}{9},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{6},\\ y=-\dfrac{5}{2}.\end{cases}$

又直线 l_1,l_2 与 x 轴的交点坐标分别为 $(1,0)$，$\left(-\dfrac{22}{3},0\right)$，

$\therefore$ 所求三角形面积为 $S=\dfrac{1}{2}\times\left|-\dfrac{5}{2}\right|\cdot\left|1+\dfrac{22}{3}\right|=\dfrac{125}{12}$.

点拨:本题是一个导数综合题目，涉及导数的定义、几何意义、求切线方程的步骤、垂直条件的应用等.

二、综合创新探究

例6 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，求下列各极限的值.

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$ ________；

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=$ ________；

(3)若 $f'(x_0)=-2$，则 $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f\left(x_0-\dfrac{1}{2}k\right)-f(x_0)}{k}=$ ________.

分析:结合导数的定义求解.

(1)原式 $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-(-\Delta x)}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=-f'(x_0)$.

(2)原式 $=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-h)}{2h}$

$=\dfrac{1}{2}\left[\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}\right]$

$=\dfrac{1}{2}[f'(x_0)+f'(x_0)]=f'(x_0)$.

(3)原式 $=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f\left(x_0-\dfrac{1}{2}k\right)-f(x_0)}{-\dfrac{1}{2}k}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}f'(x_0)$

$=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times(-2)=1.$

解:(1) $-f'(x_0)$;(2) $f'(x_0)$;(3)1.

点拨:在导数定义中,增量 Δx 的形式多种多样的,不论 Δx 选哪种形式,Δy 也必须选相应的形式,利用函数 $f(x)$ 在点处可导的条件可以将已知极限式恒等变形,转化为导数定义的结构形式.

例7 设有一吊桥,其铁链连成一抛物线型,两端悬于相距 200 m 的支柱上,铁链的最低点在悬点下 40 m 处,求铁链在悬点处与支柱所成角的正切值.

分析:以两悬点的连线为 x 轴,悬点间线段的中垂线为 y 轴建立直角坐标系,如图 1-1-2,求出铁链所在抛物线的方程,再由铁链在悬点处与 x 轴的夹角的正切值即悬点处的切线的斜率可以得解.

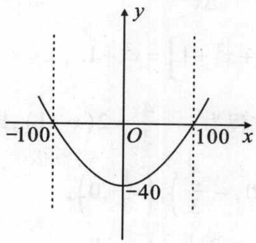


图 1-1-2

解:设抛物线方程为 $y=ax^2-40$,$\because$ 过点(100,0),

$\therefore 0=a\times 100^2-40$,$\therefore a=\dfrac{1}{250}$,

即抛物线方程为 $y=\dfrac{1}{250}x^2-40$.

铁链在悬点处与 x 轴的夹角 θ 满足

$\tan\theta=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{250}(100+\Delta x)^2-40-\dfrac{1}{250}\times 100^2+40}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{200}{250}\Delta x+\dfrac{1}{250}(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{250}\Delta x\right)=\dfrac{4}{5}.$

又铁链与支柱所成角为 $\dfrac{\pi}{2}-\theta$,$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{5}{4}.$