



特别合作
sina 新浪教育

倍速™

$100+100+100 \neq 1000000$

学习法

学习策略 + 漫画释义 + 综合应用 + 课后解答

高中数学 选修2-2

人教A版 总主编 刘增利

打造学科状元



北京出版社出版集团
BEIJING PUBLISHING HOUSE (GROUP)



北京教育出版社
BEIJING EDUCATION PUBLISHING HOUSE

倍速

100-100-100-1000000

学习法

万向思维 万卷真情TM

基础·奠定一生成功路

倍速·坚定成功与你零距离

超效·决定学习新动力

高中

新课标

科目	分序	版本全称	版本简称	必修				
				①	②	③	④	⑤
语文	1	人民教育出版社	人教版	✓	✓	✓	✓	✓
	2	广东教育出版社	粤教版	✓	✓	✓	✓	✓
	3	江苏教育出版社	国标江苏版	✓	✓	✓	✓	✓
	4	山东人民出版社	鲁人版	✓	✓	✓	✓	✓
	5	语文出版社	语文版	✓	✓	✓	✓	✓
数学	6	人民教育出版社 A 版	人教 A 版	✓	✓	✓	✓	✓
	7	人民教育出版社 B 版	人教 B 版	✓	✓	✓	✓	✓
	8	北京师范大学出版社	北师大版	✓	✓	✓	✓	✓
	9	江苏教育出版社	国标江苏版	✓	✓	✓	✓	✓
英语	10	人民教育出版社	人教版	✓	✓	✓	✓	✓
	11	外语教学与研究出版社	外研版	✓	✓	✓	✓	✓
	12	北京师范大学出版社	北师大版	✓	✓	✓	✓	✓
	13	河北教育出版社	冀教版	✓	✓	✓	✓	✓
	14	译林出版社	译林版	✓	✓	✓	✓	✓
物理	15	重庆出版社	重庆版	✓	✓	✓	✓	✓
	16	人民教育出版社	人教版	✓	✓			
	17	山东科学技术出版社	鲁科版	✓	✓			
	18	广东教育出版社	粤教版	✓	✓			
化学	19	上海科技教育出版社	沪科教育版	✓	✓			
	20	人民教育出版社	人教版	✓	✓			
	21	江苏教育出版社	国标江苏版	✓	✓			
	22	山东科学技术出版社	鲁科版	✓	✓			
政治	23	人民教育出版社	人教版	✓	✓	✓	✓	✓
历史	24	人民教育出版社	人教版	✓	✓	✓		
	25	岳麓书社	岳麓版	✓	✓	✓		
地理	26	人民教育出版社	人教版	✓	✓	✓		
	27	中国地图出版社	地图版	✓	✓	✓		
	28	山东教育出版社	鲁教版	✓	✓	✓		
	29	湖南教育出版社	湘教版	✓	✓	✓		
生物	30	人民教育出版社	人教版	✓	✓	✓		
	31	中国地图出版社	地图版	✓	✓	✓		
	32	江苏教育出版社	国标江苏版	✓	✓	✓		

科目	模块	版别	识别
数 学	1-1	人教 A 版	✓
		人教 B 版	✓
	1-2	人教 A 版	✓
		人教 B 版	✓
	2-1	人教 A 版	✓
		人教 B 版	✓
	2-2	人教 A 版	✓
		人教 B 版	✓
	2-3	人教 A 版	✓
		人教 B 版	✓
英 语	6	人教版	✓
		外研版	✓
	7	人教版	✓
		外研版	✓
物 理	8	人教版	✓
		外研版	✓
	3-1	人教版	✓
	3-2	人教版	✓
	3-3	人教版	✓
化 学	3-4	人教版	✓
	3-5	人教版	✓
	3	人教版	✓
	4	人教版	✓

万向思维 培养学子 全球视野

ISBN 978-7-5303-6145-0

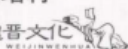


9 787530 361450 >

定价：11.80 元

总 主 编：刘增利

封面设计：魏晋文化



倍速TM

$100+100+100=1000000$

学习法

高中数学 选修2-2

人教A版

总 主 编 刘增利

学科主编 杨文彬

本册主编 韩廷蕴

编 者 陈元端

陈 勤

王 鹏 代凤奎

冯艳红 李丽丽



北京出版社出版集团
BEIJING PUBLISHING HOUSE(GROUP)

北京教育出版社
BEIJING EDUCATION PUBLISHING HOUSE

编读交流平台

- ✉ 主编辑箱:zhubian@wxsw.cn (任何疑问、意见或建议,皆请提出,我们是很虚心的。)
 投稿邮箱:tougao@wxsw.cn (想让大家分享你的学习心得和人生体验吗?快投稿吧!)
 求购邮箱:qiugou@wxsw.cn (什么书适合自己,在哪能买到?我们的选书顾问为你量身选择。)
 📞 图书质量监督电话:010-62380997 010-58572393 010-82378880 (含图书内容咨询)
 传真:010-62340468



销售服务短信:

中国移动用户发至 625551001
 中国联通用户发至 725551001
 小灵通用户发至 925551001

建议咨询短信:

中国移动用户发至 625556018
 中国联通用户发至 725556018
 小灵通用户发至 925556018

想知道更多的图书信息,更多的学习资源,请编辑手机短信“万向思维”发送至 50120;
 想知道更多的考试信息,更多的学习方法,请编辑相应的手机短信“小学学习方法”“初中学习方法”或“高中学习方法”发送至 50120。

🏠 通信地址:北京市海淀区王庄路1号清华同方科技广场B座11层万向思维(邮编100083)。

最新“万向思维金点子”奖学金获奖名单

2006年12月10日

2007年7月10日

一等奖:

狄 欢(江苏溧阳)

二等奖:

秦文莉(安徽宿州) 周文颖(河北迁西)
 熊秋艳(云南墨江) 方 莱(安徽蚌埠)
 李 昊(河南潢川) 马建明(安徽阜南)
 王晓楠(辽宁本溪) 常思佳(黑龙江明水)
 樊昕阳(河南安阳) 陈佳莹(浙江慈溪)

一等奖:

周 政(甘肃庆阳) 李贵兵(陕西石泉)

二等奖:

张 雪(安徽寿县) 尹寒梅(四川岳池) 夏佳志(湖北孝感) 李文霞(青海湟中)
 宁年宝(福建三明) 雷裕鹏(福建福安) 谭进艳(广东廉江) 郑 慧(海南儋州)
 李莹莹(黑龙江嫩江) 司哈广(河南许昌) 卢建英(云南禄春) 伍冬林(四川南充)
 吴翔堂(浙江上虞) 黄洁仪(广东大朗) 郭 磊(陕西咸阳) 何 攀(甘肃庆阳)
 陈斯文(福建龙海) 臧东东(内蒙古赤峰) 胡承贤(江西宜春) 倪 燕(四川成都)

倍速学习法 高中数学选修2-2 人教A版

策划设计	北京万向思维基础教育教学研究中心数学教研组	出 版	北京出版社出版集团
总 主 编	刘增利	发 行	北京教育出版社
学科主编	杨文彬	印 刷	北京出版社出版集团
本册主编	韩廷蕴	经 销	陕西思维印务有限公司
责任编辑	邱利芳	开 本	各地书店
责任审读	冯艳红 陈 勤	印 张	890×1240 1/32
责任校对	晁 鲁 彭凤珠	字 数	8.5
责任排版	李翠翠	版 次	238千字
封面设计	魏 晋	印 次	2007年11月第1版
版式设计	康 赢	书 号	2007年11月第1次印刷
插图作者	范金凤	定 价	ISBN 978-7-5303-6145-0/G·6064
			11.80元

版权所有 翻印必究

目录

第一章 导数及其应用

本章整体感知 (1)

1.1 变化率与导数

知识结构 (2)

自主学习 (2)

一、新知导入 (2)

二、教材详析 (2)

解题方法 (5)

一、基础经典全析 (5)

二、综合创新探究 (8)

三、相关高考信息 (10)

厚积薄发 (10)

新题精练 (12)

参考答案与点拨 (13)

1.2 导数的计算

知识结构 (15)

自主学习 (15)

一、新知导入 (15)

二、教材详析 (15)

解题方法 (17)

一、基础经典全析 (17)

二、综合创新探究 (18)

三、相关高考信息 (21)

厚积薄发 (22)

新题精练 (23)

参考答案与点拨 (24)

1.3 导数在研究函数中的应用

知识结构 (27)

自主学习 (27)

一、新知导入 (27)

二、教材详析 (27)

解题方法 (30)

一、基础经典全析 (30)

二、综合创新探究 (32)

三、相关高考信息 (36)

厚积薄发 (39)

新题精练 (40)

参考答案与点拨 (41)

1.4 生活中的优化问题举例

知识结构 (45)

自主学习 (45)

一、新知导入 (45)

目录

二、教材详析	(45)	自主学习	(70)
解题方法	(46)	一、新知导入	(70)
一、基础经典全析	(46)	二、教材详析	(70)
二、综合创新探究	(48)	解题方法	(72)
三、相关高考信息	(49)	一、基础经典全析	(72)
厚积薄发	(52)	二、综合创新探究	(73)
新题精练	(52)	三、相关高考信息	(74)
参考答案与点拨	(54)	厚积薄发	(75)
1.5 定积分的概念		新题精练	(76)
1.6 微积分基本定理		参考答案与点拨	(77)
知识结构	(58)	本章总结	(80)
自主学习	(58)	本章知识结构	(80)
一、新知导入	(58)	本章专题讲座	(80)
二、教材详析	(58)	综合应用创新	(85)
解题方法	(61)	高考命题方向	(86)
一、基础经典全析	(61)	本章测试	(90)
二、综合创新探究	(63)	参考答案与点拨	(92)
三、相关高考信息	(63)	第二章 推理与证明	
厚积薄发	(64)	本章整体感知	(98)
新题精练	(65)	2.1 合情推理与演绎推理	
参考答案与点拨	(67)	2.1.1 合情推理	
1.7 定积分的简单应用		知识结构	(99)
知识结构	(70)	自主学习	(99)
		一、新知导入	(99)

目录

二、教材详析	(99)	一、新知导入	(118)
解题方法	(101)	二、教材详析	(118)
一、基础经典全析	(101)	解题方法	(120)
二、综合创新探究	(103)	一、基础经典全析	(120)
三、相关高考信息	(103)	二、综合创新探究	(124)
厚积薄发	(105)	三、相关高考信息	(125)
新题精练	(105)	厚积薄发	(126)
参考答案与点拨	(108)	新题精练	(127)
2.1.2 演绎推理		参考答案与点拨	(129)
知识结构	(110)	2.3 数学归纳法	
自主学习	(110)	知识结构	(133)
一、新知导入	(110)	自主学习	(133)
二、教材详析	(110)	一、新知导入	(133)
解题方法	(111)	二、教材详析	(133)
一、基础经典全析	(111)	解题方法	(134)
二、综合创新探究	(112)	一、基础经典全析	(134)
三、相关高考信息	(113)	二、综合创新探究	(139)
厚积薄发	(114)	三、相关高考信息	(141)
新题精练	(114)	厚积薄发	(142)
参考答案与点拨	(116)	新题精练	(143)
2.2 直接证明与间接证明		参考答案与点拨	(145)
知识结构	(118)	本章总结	(148)
自主学习	(118)	本章知识结构	(148)
		本章专题讲座	(148)

目录

综合应用创新	(151)	自主学习	(181)
高考命题方向	(153)	一、新知导入	(181)
本章测试	(157)	二、教材详析	(181)
参考答案与点拨	(160)	解题方法	(185)
第三章 数系的扩充与复数的引入		一、基础经典全析	(185)
本章整体感知	(166)	二、综合创新探究	(190)
3.1 数系的扩充和复数的概念		三、相关高考信息	(192)
知识结构	(167)	厚积薄发	(194)
自主学习	(167)	新题精练	(196)
一、新知导入	(167)	参考答案与点拨	(197)
二、教材详析	(168)	本章总结	(202)
解题方法	(169)	本章知识结构	(202)
一、基础经典全析	(169)	本章专题讲座	(202)
二、综合创新探究	(172)	综合应用创新	(209)
三、相关高考信息	(174)	高考命题方向	(213)
厚积薄发	(175)	本章测试	(215)
新题精练	(176)	参考答案与点拨	(217)
参考答案与点拨	(177)	阶段测试题	(224)
3.2 复数代数形式的四则运算		参考答案与点拨	(226)
知识结构	(181)	附录 课本习题参考答案	(230)

第一章 导数及其应用

分类讨论思想

解答某些数学问题时,有时会有多种情况,对各种情况加以分类,并逐类求解,然后综合求解,这就是分类讨论法.分类讨论是一种逻辑方法,也是一种数学思想.有关的数学问题具有明显的逻辑性、综合性、探索性,能训练人的思维的条理性和概括性.



本章整体感知

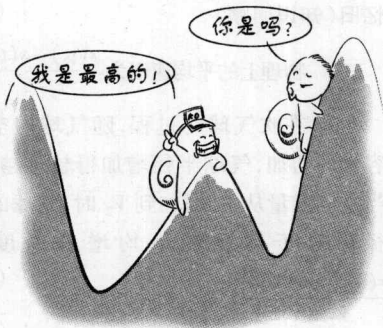
导数和定积分都是微积分的核心概念.

它们是解决自然科学和生活中实际问题的有力工具.

本章的重点是:导数的概念,并能利用导数公式、运算法则求导数;利用导数判断函数的单调性,求函数的极大值、极小值、最大值、最小值;利用导数的方法解决实际问题.

难点是对导数概念的理解,求导数和导数的应用;以及定积分的定义,应用定积分的几何意义求曲边梯形面积.关键是要能根据实际问题,建立适当的函数关系式.

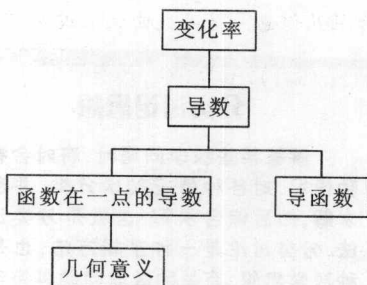
本章涉及的数学思想方法有:化归转化的思想、数形结合的思想、逼近思想、极限思想等.



1.1 变化率与导数



知识结构 · 理清知识脉络



自主学习 · 享受探究乐趣

一、新知导入

忆旧(知识回顾)

1. 物理上的平均速度为: $\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$.

2. 在吹气球的过程,随气球内空气容量的增加,气球半径增加得越来越慢.

当空气容量从 V_1 增加到 V_2 时,气球的半径相对于体积的平均增长速度为

$$\frac{r(V_2) - r(V_1)}{V_2 - V_1}.$$

迎新(问题引入)

左面两个问题的关系式:平均速度 =

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \text{ 和 平均增长速度 = }$$

$$\frac{r(V_2) - r(V_1)}{V_2 - V_1}.$$

若用函数 $y = f(x)$ 表示,应该如何表示呢? 它们表示的又是什么量呢?

二、教材详析

知识点 1. 平均变化率

设函数 $y = f(x)$, x_1, x_2 是其定义域内不同的两点,那么函数的变化率可用式子 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ 表示,我们把这个式子称为函数 $f(x)$ 从 x_1 到 x_2 的平均变化率.

习惯上令 $\Delta x = x_2 - x_1$, 可把 Δx 看作是相对于 x_1 的一个“增量”,可用 $x_1 + \Delta x$ 代替 x_2 ; 类似地, $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$. 于是,平均变化率可以表示为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

特别提示:

(1) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ 中, Δx 、 Δy 的值可正可负, 但 Δx 不能为 0. 若 Δy 为 0, 则 $f(x)$ 为常数函数.

(2) 若 $x_1 = x_0$, $x_2 = x_0 + \Delta x$, 则平均变化率可表示为 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

(3) 平均变化率的几何意义是函数曲线上过两点割线的斜率, 函数 $y = f(x)$ 图象上两点 $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, 则 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = k_{AB}$.

知识点 2. 瞬时速度

作变速直线运动的物体在不同时刻的速度是不同的, 把物体在某一时刻的速度叫瞬时速度.

用数学语言描述为: 设物体运动的位移与时间的关系是 $s = s(t)$, 当 Δt 趋近于 0 时, $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$ 趋近于常数, 我们把这个常数称为 t_0 时刻的瞬时速度.

特别提示:

(1) Δt 趋近于 0, 是指时间间隔 Δt 越来越短, 能越过任意小的时间段, 但始终不能为 0.

(2) Δt 、 Δs 在变化中都趋近于 0, 但它们的比值趋近于一个确定的常数.

(3) 求瞬时速度的步骤: ① 设非匀速直线运动的位移满足 $s = s(t)$.

② 设时间改变量为 Δt , 则位移改变量 $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$.

③ 平均速度 $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

④ 瞬时速度: 当 Δt 趋近于 0 时, $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 趋近于 v (常数).

知识点 3. 导数

一般地, 函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的瞬时变化率是: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$,

我们称它为函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数, 记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$, 即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

特别提示:

(1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 是指当 Δx 趋近于 0 时, 平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 趋近于一个常数 l , l 也就是函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的瞬时变化率.

(2) 求导的本质是求极限, 当 Δx 趋近于 0 时, 若 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限存在, 则说函数

在点 x_0 处可导; 若 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限不存在, 则说函数在点 x_0 处不可导.

(3) 求 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数的步骤:

① 求函数的增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$;

② 求平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$;

③ 取极限, 得导数 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

知识点 4. 导数的几何意义

如图 1-1-1, 我们可以发现, 当点 Q 趋近于点 $P(x_0, f(x_0))$ 时, 割线 PQ 趋近于确定的位置, 这个确定位置的直线 PT 就称为过点 P 的切线.

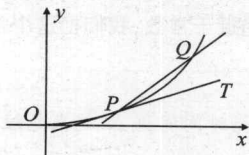


图 1-1-1

容易知道, 割线 PQ 的斜率为 $k = \frac{f(x_Q) - f(x_P)}{x_Q - x_P}$. 当点 Q 无限趋近于点 P 时, k 无

限趋近于切线 PT 的斜率, 因此, 函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数就是切线 PT 的斜率, 即

$$k = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

特别提示:

(1) 大多数函数曲线在一个非常小的范围内大致可看作直线, 所以某点附近的曲线可以用过此点的切线近似代替, 即以直代曲.

(2) 利用导数求曲线的切线方程的步骤:

① 求出函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$;

② 根据直线的点斜式方程, 得切线方程为 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

知识点 5. 导函数

如果 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内每一点 x 都是可导的, 则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 可导. 在区间 (a, b) 内, $f'(x)$ 构成一个新的函数, 我们把这个函数称为函数 $f(x)$ 的导函数,

第一章 导数及其应用

简称导数. $y=f(x)$ 的导函数有时也记作 y' , 即 $f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

特别提示:

注意理解“函数在一点处的导数”和“导函数”的区别:

(1) 函数在一点处的导数, 就是该点附近的函数值的改变量与自变量的改变量的比值的极限, 它是一个数值, 不是变数.

(2) 导函数是对某一区间内任意一点 x 而言的. 函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内每一点都可导, 是指对于区间 (a, b) 内每一个确定的值 x_0 , 都对应着一个确定的导数 $f'(x_0)$. 当 x 变化时, $f'(x)$ 随之改变, 所以 $f'(x)$ 是 x 的一个函数.

(3) 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数, 就是导函数 $f'(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的函数值.



解题方法 · 乘坐智慧快车

一、基础经典全析

题型1 利用定义求导数

例1 求下列函数的导数.

(1) 求函数 $y=\sqrt{x}$ 在 $x=1$ 处的导数;

(2) 求 $y=x^2+ax+b$ (a, b 为常数) 的导数.

分析: 求函数在某一点处的导数, 可以利用定义和导函数的函数值来求.

解: (1) 方法一 (导数定义法): $\Delta y = \sqrt{1+\Delta x} - 1$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{1+\Delta x} - 1}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{1+\Delta x} - 1)(\sqrt{1+\Delta x} + 1)}{\Delta x(\sqrt{1+\Delta x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1+\Delta x} + 1}.$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+\Delta x} + 1} = \frac{1}{2}, \therefore y'|_{x=1} = \frac{1}{2}.$$

方法二 (导函数的函数值法): $\Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}},$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$\therefore y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \therefore y'|_{x=1} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}
 (2) y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + a(x + \Delta x) + b - (x^2 + ax + b)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + ax + a \cdot \Delta x + b - x^2 - ax - b}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \Delta x + a \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + a + \Delta x) = 2x + a.
 \end{aligned}$$

点拨:根据导数的定义求函数的导数是求导数的基本方法,确定 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数有两种方法,即导数定义法和导函数的函数值法.

题型2 求切线方程

例2 求曲线 $y = \frac{1}{x}$ 上一点 $P\left(4, \frac{1}{4}\right)$ 处的切线方程.

分析:关键是求出切线的斜率.由导数的几何意义知,其斜率为 $f'(4)$,为此需求出曲线在点 P 处的导数.

$$\begin{aligned}
 \text{解:} \because f'(4) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(4 + \Delta x) - f(4)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4 + \Delta x} - \frac{1}{4}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\Delta x}{4(4 + \Delta x)}}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{4(4 + \Delta x)} = -\frac{1}{16}.
 \end{aligned}$$

$\therefore$ 所求切线的斜率为 $-\frac{1}{16}$.

$\therefore$ 所求切线的方程为 $y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{16}(x - 4)$, 即 $x + 16y - 8 = 0$.

点拨:先求出点 P 处切线的斜率,再利用点斜式求出切线方程.

题型3 求切点坐标

例3 已知曲线 $y = x^2 + 6$ 的切线分别符合下列条件,求切点.

(1) 平行于直线 $y = 4x - 3$;

(2) 垂直于直线 $2x - y + 5 = 0$.

分析:根据导数的几何意义,求出切线的斜率,然后利用两直线平行、垂直的条件求出切点坐标.

解:设切点坐标为 (x_0, y_0) .

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + 6 - (x^2 + 6)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

∴ 过 (x_0, y_0) 的切线的斜率为 $2x_0$.

(1) ∵ 切线与直线 $y = 4x - 3$ 平行, ∴ $2x_0 = 4, x_0 = 2, y_0 = x_0^2 + 6 = 10$, 即过曲线 $y = x^2 + 6$ 上点 $(2, 10)$ 的切线与直线 $y = 4x - 3$ 平行.

(2) ∵ 切线与直线 $2x - y + 5 = 0$ 垂直, ∴ $2x_0 \cdot 2 = -1$, 得 $x_0 = -\frac{1}{4}, y_0 = \frac{97}{16}$, 即过曲线 $y = x^2 + 6$ 上点 $(-\frac{1}{4}, \frac{97}{16})$ 的切线与直线 $2x - y + 5 = 0$ 垂直.

点拨: 两平行直线、垂直直线的斜率关系经常用到.

题型4 导数的应用

例4 已知曲线 $C: y = x^3$:

(1) 求曲线 C 上横坐标为 1 的点处的切线方程;

(2) 第(1)小题中的切线与曲线 C 是否还有其他公共点?

分析: (1) 求出 $y = x^3$ 在 $x = 1$ 处的导数值和切点坐标, 再用点斜式写出切线方程. (2) 只要联立切线方程和曲线方程求解即可.

解: (1) ∵ $x = 1$ 时, $y = 1^3 = 1$, ∴ 切点坐标为 $(1, 1)$.

又 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1 + \Delta x)^3 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3 + 3\Delta x + (\Delta x)^2] = 3$, 即切线的斜率为 3.

∴ 所求的切线方程为 $y - 1 = 3(x - 1)$, 即 $y = 3x - 2$.

(2) 由 $\begin{cases} y = 3x - 2, \\ y = x^3, \end{cases}$ 得 $x^3 - 3x + 2 = 0$,

即 $(x - 1)(x^2 + x - 2) = 0$, 得 $x = 1$ 或 $x = -2$.

∴ 切线与曲线 C 还有一个交点 $(-2, -8)$.

点拨: 曲线的切线与曲线的公共点可以有多个.

例5 已知直线 l_1 为曲线 $y = x^2 + x - 2$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线, l_2 为该曲线的另一条切线, 且 $l_1 \perp l_2$.

(1) 求直线 l_2 的方程;

(2) 求直线 l_1, l_2 和 x 轴所围成的三角形的面积.

分析: 由 $l_1 \perp l_2$ 可得出斜率 k_2 , 求出 l_1, l_2 和 x 轴两两相交的交点坐标再求面积.

解: (1) $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) - 2 - (x^2 + x - 2)}{\Delta x}$
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x + 1) = 2x + 1,$

$\therefore f'(1) = 3, \therefore$ 直线 l_1 的方程为 $y = 3(x - 1)$.

设 l_2 过曲线 $y = x^2 + x - 2$ 上的点 $B(b, b^2 + b - 2)$,

则过 B 点的切线的斜率为 $f'(b) = 2b + 1$,

直线 l_2 的方程为 $y - (b^2 + b - 2) = (2b + 1)(x - b)$, 即 $y = (2b + 1)x - b^2 - 2$.

$\therefore l_1 \perp l_2, \therefore 3(2b + 1) = -1$, 得 $b = -\frac{2}{3}$.

$\therefore$ 直线 l_2 的方程为 $y = -\frac{1}{3}x - \frac{22}{9}$.

$$(2) \text{ 解方程组 } \begin{cases} y = 3x - 3, \\ y = -\frac{1}{3}x - \frac{22}{9}, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = \frac{1}{6}, \\ y = -\frac{5}{2}. \end{cases}$$

又直线 l_1, l_2 与 x 轴的交点坐标分别为 $(1, 0), (-\frac{22}{3}, 0)$,

$\therefore$ 所求三角形面积为 $S = \frac{1}{2} \times \left| -\frac{5}{2} \right| \cdot \left| 1 + \frac{22}{3} \right| = \frac{125}{12}$.

点拨: 本题是一个导数综合题目, 涉及导数的定义、几何意义、求切线方程的步骤、垂直条件的应用等.

二、综合创新探究

例 6 设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 求下列各极限的值.

$$(1) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) \text{ 若 } f'(x_0) = -2, \text{ 则 } \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f\left(x_0 - \frac{1}{2}k\right) - f(x_0)}{k} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

分析: 结合导数的定义求解.

$$(1) \text{ 原式 } = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-(-\Delta x)} = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x} = -f'(x_0).$$

$$(2) \text{ 原式 } = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0 - h)}{2h}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \right]$$

$$= \frac{1}{2} [f'(x_0) + f'(x_0)] = f'(x_0).$$

$$\begin{aligned} (3) \text{原式} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \frac{1}{2}k) - f(x_0)}{-\frac{1}{2}k} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}f'(x_0) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-2) = 1. \end{aligned}$$

解: (1) $-f'(x_0)$; (2) $f'(x_0)$; (3) 1.

点拨: 在导数定义中, 增量 Δx 的形式多种多样的, 不论 Δx 选哪种形式, Δy 也必须选相应的形式, 利用函数 $f(x)$ 在点处可导的条件可以将已知极限式恒等变形, 转化为导数定义的结构形式.

例 7 设有一吊桥, 其铁链连成一抛物线型, 两端悬于相距 200 m 的支柱上, 铁链的最低点在悬点下 40 m 处, 求铁链在悬点处与支柱所成角的正切值.

分析: 以两悬点的连线为 x 轴, 悬点间线段的中垂线为 y 轴建立直角坐标系, 如图 1-1-2, 求出铁链所在抛物线的方程, 再由铁链在悬点处与 x 轴的夹角的正切值即悬点处的切线的斜率可以得解.

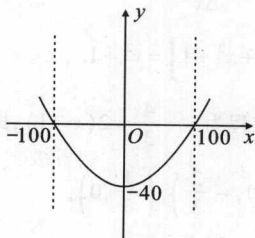


图 1-1-2

解: 设抛物线方程为 $y = ax^2 - 40$, $\because$ 过点 $(100, 0)$,

$$\therefore 0 = a \times 100^2 - 40, \therefore a = \frac{1}{250},$$

$$\text{即抛物线方程为 } y = \frac{1}{250}x^2 - 40.$$

铁链在悬点处与 x 轴的夹角 θ 满足

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{250}(100 + \Delta x)^2 - 40 - \frac{1}{250} \times 100^2 + 40}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{200}{250}\Delta x + \frac{1}{250}(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{250}\Delta x \right) = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

$$\text{又铁链与支柱所成角为 } \frac{\pi}{2} - \theta, \tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{5}{4}.$$