21 SHIJI 世纪高职高专数学教材

高等应用数学
学习辅导
（下册）

主　编　朱弘毅
副主编　赵斯泓　陈宝冲
黄丽萍　俞国胜

GAODENG YINGYONG SHUXUE XUEXI FUDAO

立信会计出版社
LIXIN KUAIJI CHUBANSHE

21世纪高职高专数学教材

高等应用数学学习辅导

（下册）

主　编　朱弘毅
副主编　赵斯泓　陈宝冲
　　　　黄丽萍　俞国胜

立信会计出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等应用数学学习辅导. 下册/朱弘毅主编. —上海:立信会计出版社,2007.10

· 21 世纪高职高专数学教材

ISBN 978-7-5429-1927-4

Ⅰ.高… Ⅱ.朱… Ⅲ. 应用数学-高等学校:技术学校-教学参考资料 Ⅳ.029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 161519 号

高等应用数学学习辅导(下册)

出版发行	立信会计出版社
地　　址	上海市中山西路 2230 号
邮政编码	200235
电　　话	(021)64411389
传　　真	(021)64411325
网　　址	www.lixinaph.com　　E-mail　lxaph@sh163.net
网上书店	www.lixinbook.com　　Tel:(021)64411071
经　　销	各地新华书店

印　　刷	立信会计常熟市印刷联营厂
开　　本	890 毫米×1240 毫米　1/32
印　　张	6.375
字　　数	171 千字
版　　次	2007 年 10 月第 1 版
印　　次	2007 年 10 月第 1 次
印　　数	1—3 000
书　　号	ISBN 978-7-5429-1927-4/O·0012
定　　价	11.00 元

如有印订差错　请与本社联系调换

前　言

《高等应用数学学习辅导》是《高等应用数学》(上海高校《高等应用数学》编写组编,立信会计出版社出版)配套的学习辅导书,分上、下两册。

高等数学是高职高专的一门基础课,对于刚跨进高等学府的大学生来说,该课程不同于中学数学,某些概念难以透彻理解、运算技巧不易掌握、理论性比中学强。针对这门课程的难度和特点,编者希望借助于学习辅导书做好难度的转化工作,这样,一方面有利于学生掌握知识,提高分析问题、解决问题的能力;另一方面高等学校的教师讲授的格调不同于中学教师,而且授课的进度较中学快,学习方法上学生正处于从中学类型向大学类型转变,在这种情况下,他们迫切需要一个辅导老师,帮助他们解决学习中的疑难问题,这也是我们编写这本书的目的。

《高等应用数学学习辅导》各章与相应的教材同步,每章由内容提要、例题分析、习题选解和测试题及其解答四节组成。例题分析和习题选解中的题目都是较典型的题目,测试题既考虑到知识的覆盖面,又注意到突出重点,有利于对该章学习的总结检查。上册提供高等数学模拟试题两套,下册提供线性代数、概率统计模拟试题各两套。为有利于学生自我检查,这些试题都给出详细的解题过程。

《高等应用数学学习辅导》由朱弘毅任主编、赵斯泓、陈宝冲、黄丽萍、俞国胜任下册副主编。参加编写的有(按姓氏笔画为序)车荣强、田丽、朱弘毅、苏海容、陈宝冲、张福康、赵斯泓、俞国胜、陶明诚、黄丽萍、

诸建平。本书的出版得到了立信会计出版社孙时平社长、蔡莉萍编辑的支持和帮助，在此表示衷心感谢。

限于编者的水平、书中不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

朱弘毅于香歌丽园

2007 年秋

目　录

第八章 矩 阵

第一节 内容提要

1. 矩阵的概念

由 $m\times n$ 个实数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排列成一个 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵,简称 $m\times n$ 矩阵,其中 a_{ij} 的下标表示该数在第 i 行第 j 列交叉位置上的元素。一般用大写字母 A、B、C,…表示矩阵。A 是 m 行 n 列矩阵,可用 $A_{m\times n}$ 表示,或用 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 表示。

$n\times n$ 矩阵 A 称为 n 阶方阵,可记为 A_n

具有相同行数和相同列数的矩阵,称之为同型矩阵。

如果同型矩阵,$A=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 在对应位置上的元素都相等,即

$$a_{ij}=b_{ij},(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$$

则称矩阵 A 和矩阵 B 相等,记作 $A=B$。

所有元素都为零的矩阵称之为零矩阵,m 行 n 列的零矩阵记作 $O_{m\times n}$,简记为 O。

主对角线上的元素均为 1,其余元素都为零的 n 阶方阵,称作单位矩阵,记作 E 或 E_n。

2. 矩阵的加法

设矩阵 A,B 是 $m\times n$ 的同型矩阵,即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

将它们对应位置元素相加,所得的 $m\times n$ 矩阵称为矩阵 A,B 的和,记作 $A+B$,即

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵的加法具有下列运算性质(其中 A,B,C,O 为同型矩阵):

(1) 交换律:$A+B=B+A$。

(2) 结合律:$(A+B)+C=A+(B+C)$。

(3) $A+O=A$。

3. 数乘矩阵与矩阵的减法

设 k 为实数,矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,则称 $(ka_{ij})_{m\times n}$ 为数 k 与矩阵 A 的乘积,记作 kA 或 Ak,即

$$kA=Ak=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}。$$

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,则称矩阵 $(-a_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 A 的负矩阵,记作 $-A$,$-A=(-1)A$。

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,$B=(b_{ij})_{m\times n}$ 是两个同型矩阵,称 $A+(-B)$ 为两矩阵的减法,记作 $A-B$,即

$$A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}。$$

由定义，数与矩阵的乘法运算具有如下运算性质：(设 A,B,O 是同型矩阵，k,l 是实数)：

(1) $k(A+B)=kA+kB$。

(2) $(k+l)A=kA+lA$。

(3) $(kl)A=k(lA)$。

(4) $1A=A,A-A=0$

4. 矩阵的乘法

设 $A=(a_{ik})$是一个 $m\times s$ 矩阵，$B=(b_{kj})$是一个 $s\times n$ 矩阵，则由元素

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$
$$(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

所构成的 m 行 n 列矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$ 称为 A 与 B 的乘积，记作 AB，即 $C=AB$。

注意：A 与 B 相乘，只有当矩阵 A 的列数与矩阵 B 的行数相等时，才能定义乘积 AB。矩阵乘法不满足交换律。

矩阵乘法具有如下性质：

(1) $A(B+C)=AB+AC$；$(B+C)A=BA+CA$。

(2) $(AB)C=A(BC)$。

(3) $A_{m\times n}E_n=E_mA_{m\times n}=A_{m\times n}$。

(4) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$，其中 k 是一个实数。

设 A 是 n 阶矩阵，k 是自然数，k 个矩阵 A 相乘称为方阵 A 的 k 次幂，记作 A^k。

方阵的幂具有如下性质：

$$A^kA^l=A^{k+l}\quad (A^k)^l=A^{kl}$$

5. 矩阵的转置

将 A 的行和列对应互换所得的 $n\times m$ 矩阵称为 A 的**转置矩阵**，记作 A^T，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}；\text{则 } A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}。$$

矩阵的转置具有如下运算性质：

(1) $(A^T)^T=A$。

(2) $(A+B)^T=A^T+B^T$。

(3) $(kA)^T=k(A^T)$。(k 是实数)

(4) $(AB)^T=B^TA^T$。

6. 矩阵的初等行(列)变换是指下列三种变换

(1) 互换矩阵中两行(列)的位置(互换矩阵中第 i 行和第 j 行，记为 $r_i\leftrightarrow r_j$；互换矩阵中第 i 列和第 j 列，记为 $c_i\leftrightarrow c_j$)。

(2) 用一个非零数 k 乘矩阵的某一行(列)(用一个非零数 k 乘矩阵的第 i 行，记作 kr_i；用一个非零数 k 乘矩阵的第 i 列，记为 kc_i)。

(3) 把矩阵的某一行(列)的元素都乘以数 k 加到另一行(列)对应元素(第 i 行的元素的 k 倍加到第 j 行对应元素，记为 kr_i+r_j；第 i 列的元素的 k 倍加到第 j 列对应元素，记为 kc_i+c_j)。

矩阵的初等行变换与矩阵的初等列变换统称为**矩阵的初等变换**，矩阵 A 经过初等变换化为矩阵 B，用符号 $A\to B$ 表示。

如果矩阵的零行(元素全为零的行称为零行，反之称为非零行)全部位于非零行的下方，且各个非零行左起的第一个非零元素(称为首非零元)的列标严格增大，则称此矩阵为行阶梯形矩阵。如果行阶梯形的首非零元均为“1”，且首非零元所在列中除其首非零元外其余元素均为0，则称此行阶梯形矩阵为行最简阶梯形矩阵。

矩阵 A 经过若干次初等行变换化为行阶梯形矩阵 B，行阶梯形矩阵 B 中非零行的行数称为矩阵 A 的秩，记作 $R(A)$。规定零矩阵的秩为 0。

任意非行阶梯形矩阵通过若干初等行变换都能化为行阶梯形矩阵，行最简阶梯形矩阵。

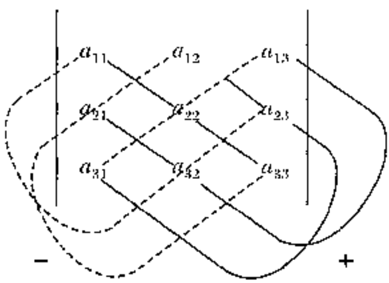
7. 行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

三阶行列式所表示的 6 项代数和，可用下面画线的方法记忆。图中实线联结的 3 个元素的乘积是代数和中的正项；虚线联结的 3 个元素的乘积是代数和中的负项。此法称为对角线法。



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

其中 $A_{11},A_{12},\cdots,A_{1n}$分别是$a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}$对应的代数余子式。

8. 行列式的性质

(1) 行列式 D 与它的转置行列式 D^T 相等,即 $D=D^T$。

(2) 任意交换行列式的两行(或两列),行列式变号。

我们用 $r_i(c_i)$表示行列式的第 i 行(列)的元素,并用 $r_i \leftrightarrow r_j$($c_i \leftrightarrow c_j$)表示交换行列式的第 i 行(列)与第 j 行(列)。

(3) 如果行列式 D 中的两行(或两列)的元素对应相等,则 $D=0$。

(4) 行列式 D 等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和,即

$$\begin{aligned} D = &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n) \\ &= a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,2,\cdots,n) \end{aligned}$$

上式分别称为行列式按 i 行展开[记作 $r(i)$]和按 j 列展开[记作$c(j)$]。

(5) 行列式某行(或某列)元素有公因子 k,则 k 可提到行列式符号外面。

(6) 行列式中某行(或某列)元素全为零,则行列式的值为零。

(7) 行列式 D 中若有两行(或两列)对应元素成比例,则行列式 $D=0$。

(8) 行列式某行(或某列)的所有元素乘以常数 k 后加于另一行(或另一列)对应的元素上,行列式的值不变。

我们用记号 kr_i+r_j 来表示第 i 行所有元素乘以常数 k 后加于第 j 行对应的元素，用记号 kc_i+c_j 表示第 i 列所有元素乘以常数 k 后加于第 j 列对应的元素。

9. 方阵的行列式

由 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的元素按原来次序组成的 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为方阵 A 的行列式，记为 $|A|$ 或 $\det(A)$。

方阵的行列式具有如下性质。

(1) $|\lambda A|=\lambda^n|A|$。

(2) A、B 为 n 阶方阵时，$|AB|=|A||B|$。

10. 逆矩阵

设 A 是 n 阶方阵，如果存在 n 阶方阵 B，使得

$$AB=BA=E$$

则称矩阵 B 是矩阵 A 的逆矩阵，记为 A^{-1}；并称 A 是可逆矩阵，(或 A 是可逆的)。

逆矩阵具有如下性质：

(1) 如果 n 阶方阵 A 是可逆矩阵，则 A^{-1} 也是可逆矩阵，且 $(A^{-1})^{-1}=A$。

(2) 如果 n 阶方阵 A、B 都是可逆矩阵，则 AB 也是可逆矩阵，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

(3) 如果 n 阶方阵 A 是可逆矩阵，则 A^T 也是可逆矩阵，且 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$。

n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是可逆矩阵的充分必要条件是 A 的行列式 $|A|\neq 0$。当 A 是可逆矩阵时，

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

其中,A^* 称为 A 的伴随矩阵,它是 $|A|$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 构成的方阵。即

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

11. 解线性方程组

对于 n 个未知数 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

即

$$AX=B$$

其中,$A=(a_{ij})_n$,$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$,$B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$。

解法一(克莱姆法则) 如果系数行列式 $D=|A|\neq0$,则线性方程组有解且仅有唯一解:

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中,D_j 是将行列式 D 中第 j 列元素换为 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 所得的 n 阶行列式($j=1,2,\cdots,n$)。

解法二 如果 $D\neq0$,于是 A^{-1} 存在,则解 $X=A^{-1}B$。

第二节 例题分析

【例 1】 设 $A=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x-y & x-y \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3y-3z & 1 \\ -2 & 6-z \end{pmatrix}$。

若 $A=B$，求 x,y,z 的值。

分析 根据矩阵 A 与 B 相等的定义，A 与 B 对应的元素应该相等，由此得方程组，求得 x,y,z 的值。

解 由 $A=B$，得方程组

$$\begin{cases} x=3y-3z \\ 2x-y=-2 \\ x-y=6-z \end{cases}$$

解方程组，得解 $x=9,y=20,z=17$。

【例 1】 已知 $\begin{pmatrix} 1 & y \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & x \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & w \\ z & 2 \end{pmatrix}$，求 z,y,z,w。

分析 首先根据矩阵乘法计算 $\begin{pmatrix} 1 & y \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & x \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$，得 $\begin{pmatrix} 2+3y & x+2y \\ 2 & 4-2x \end{pmatrix}$。

然后由 $\begin{pmatrix} 2+3y & x+2y \\ 2 & 4-2x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & w \\ z & 2 \end{pmatrix}$，求 x,y,z,w。

解 因为 $\begin{pmatrix} 1 & y \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & x \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+3y & x+2y \\ 2 & 4-2x \end{pmatrix}$

所以 $\begin{pmatrix} 2+3y & x+2y \\ 2 & 4-2x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & w \\ z & 2 \end{pmatrix}$

得方程组

$$\begin{cases} 2+3y=-4 \\ x+2y=w \\ 2=z \\ 4-2x=2 \end{cases}$$

解方程组，得解 $x=1,y=-2,z=2,w=-3$。

【例 3】 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$，求 AB,BA

$-A^TB^T$。

分析　根据矩阵的乘法，转置和减法的定义进行计算。

解　$AB=\begin{pmatrix}5&1&0&3\\2&4&5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2\\-2&4\\1&3\\1&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21&-1\\8&20\end{pmatrix}$

$$BA=\begin{pmatrix}4&2\\-2&4\\1&3\\1&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&1&0&3\\2&4&5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24&12&10&18\\-2&14&20&6\\11&13&15&12\\-5&-19&-25&-12\end{pmatrix}$$

$$BA-A^TB^T=BA-(BA)^T=\begin{pmatrix}24&12&10&18\\-2&14&20&6\\11&13&15&12\\-5&-19&-25&-12\end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix}24&-2&11&-5\\12&14&13&-19\\10&20&15&-25\\18&6&12&-12\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&14&-1&23\\-14&0&7&25\\1&-7&0&37\\-23&-25&-37&0\end{pmatrix}$$

【例 4】　设 $A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，求 A^n（n 是正整数）。

分析　首先计算 A^2、A^3，从中找出规律，得 A^n。