科学版

研究生教学丛书

泛函分析

卢玉峰 编著

3

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书根据作者近几年为大连理工大学数学系硕士研究生所开泛函分析课程的讲义改编而成. 全书共 4 章, 包括泛函分析基础、局部凸空间、算子理论和算子代数初步、Banach 空间的微分学与拓扑度. 本书尽力以一个适当的基础知识为起点, 在整体内容上留给教师授课更多的自主空间, 留给学生学习更多的思考空间. 书中每章都给出了相应的参考书目供读者阅读, 并精心选配了大量习题作为练习和正文的补充.

本书适合普通高等院校数学系各专业研究生使用, 也可作为数学系本科生高年级的泛函分析教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析/卢玉峰编著. —北京: 科学出版社, 2008

(科学版研究生教学丛书)

ISBN 978-7-03-021223-8

Ⅰ.泛… Ⅱ.卢… Ⅲ. 泛函分析-研究生-教材 Ⅳ. O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 027418 号

责任编辑: 姚莉丽 / 责任校对: 陈玉凤
责任印制: 张克忠 / 封面设计: 陈 敬

科 学 出 版 社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 5 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2008 年 5 月第一次印刷 印张: 11
印数: 1—4 000 字数: 208 000

定价: 18.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

前　言

本书根据作者近几年为大连理工大学数学系硕士研究生所开泛函分析课程的讲义改编而成. 泛函分析课程是数学系所有专业 (包括基础数学、应用数学、计算数学、运筹学与控制论、概率论与数理统计、保险与精算)64 课时的必修基础课, 因此选材上尽量照顾到各个专业对泛函分析的需求. 但又由于学时有限, 尽量选取了各个专业所需泛函分析的公共内容, 专门化的内容留给专业课解决. 另外, 随着研究生规模越来越大, 研究生来源广泛, 数学基础不同, 各个学校本科的泛函分析教授内容不一, 所以教材应有一个适当的基础知识起点以满足所有学生的需要. 根据作者多年的教学经验和体会, 本书在整体内容处理上留给教师授课更多的自主空间, 留给学生学习更多的思考空间.

鉴于以上考虑, 全书共分为 4 章. 第 1 章作为泛函分析基础, 主要是对线性泛函分析基础理论的系统介绍, 供教学中灵活掌握, 其中抽象积分一节主要是为后面提供 Banach 空间例子作准备. 本科学过泛函分析的同学可以不读或略读此章, 没有学过泛函分析的同学可以详细阅读此章. 第 2 章是局部凸空间, 主要讲授 Hahn-Banach 定理的几何形式, 即凸集分离定理以及 Banach 空间的弱拓扑. 此章给出的凸集分离定理是比较一般的形式, 对各个专业的需求应该是足够的. 此外考虑到一些同学有可能没有学过拓扑学课程, 在 2.1 节对本书所需的拓扑学知识作了简单的介绍. 第 3 章是算子理论和算子代数初步, 主要介绍了算子谱的基本理论、共轭算子、正规算子、紧算子以及自半算子函数演算等基本算子理论和 Banach 代数初步. 第 4 章是 Banach 空间的微分学与拓扑度. 主要介绍 G- 微分和 F- 微分、隐函数定理、泛函极值以及 Brouwer 度和 Leray-Schauder 度, 最后给出了几个不动点定理. 书中在每一章给出了许多相应的参考书目, 供读者阅读. 作为任何专业的学生, 学过此教材的内容都可在此基础上继续学习所需泛函分析内容.

本书是作者多年教学和科研工作的结晶, 很多内容的处理是作者多年教学和科研中的体会和成果, 并经过教学过程证明是可行和成功的. 根据作者多年的教学和科研经验, 精心选配了大量的习题作为练习, 一些习题实际上是正文的补充, 对读者是非常好的泛函分析训练.

作者感谢大连理工大学应用数学系王仁宏先生和夏尊铨先生的鼓励, 感谢大连理工大学研究生院和数学系的支持和帮助.

卢玉峰
2007 年 3 月于大连理工大学

目　录

第 1 章　泛函分析基础

先介绍本书中用到的一些基本术语和记法.

X 是一集合. 如果 A 是 X 的子集, 记为 $A \subset X$. A 在 X 中的补集记为 $A^c = X \setminus A$, 即 $X \setminus A = \{x \in X \mid x \notin A\}$. 一般地, 如果 A 和 B 是 X 的子集, 则 $A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$. 有序对集 $\{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$ 称为 X 和 Y 的笛卡儿积, 记为 $X \times Y$.

一个从集合 X 到集合 Y 的映射 f(单值) 有时也称为函数, 即对每一个 $x \in X$, 有且只有一个 $y \in Y$ 使得 $y = f(x)$, 记为 $f: X \to Y$ 或 $X \xrightarrow{f} Y$ 或 $x \mapsto f(x)$. 若 $A \subset X$, 则 $f[A] = \{f(x) \mid x \in A\}$ 是 Y 的一个子集, 称为 A 的像; 若 $B \subset Y$, 则 $f^{-1}[B] = \{x \mid f(x) \in B\}$ 是 X 的子集, 称为 B 的原像. $f[X]$ 称为 f 的值域, 记为 $\mathrm{Ran}f$, X 称为 f 的定义域. 一个函数 f 称为单的 (或一对一, 或 1-1 的) 如果对每一个 $y \in \mathrm{Ran}f$, 有唯一一个 $x \in X$, 使得 $f(x) = y$. f 称为满的 (或到上的) 如果 $\mathrm{Ran}f = Y$. 如果 f 既单又满, 称它为双射. f 限制在定义域的一个子集 A 上记为 $f|_A$.

1.1 Zorn 引理

一个集合 X 上的关系是 $X \times X$ 的一个子集 R; 如果 $(x, y) \in R$, 称 x 与 y 是相关 (R 相关) 的, 记为 xRy.

定义 1.1.1　集合 X 上的一个关系 R 称为一个等价关系, 如果它满足:

(1) 自反性　如果 $x \in X$, 则 xRx;

(2) 对称性　如果 $x, y \in X$ 且 xRy, 则 yRx;

(3) 传递性　如果 $x, y, z \in X$ 且 xRy, yRz, 则 xRz.

等价关系通常用“$\sim$”表示. 对每一个 $x \in X$, 集合 $\{y \in X \mid yRx\}$ 称为 x 的等价类, 记为 $[x]$, x 称为代表元. 显然, 对任何 $y \in [x]$, $[y] = [x]$.

定理 1.1.1　设 R 是集合 X 上的一个等价关系, 则每一个 $x \in X$ 属于唯一的一个等价类.

因此, 给定了一个等价关系, 一个集合自然地分成一些两两互不相交的子集.

例 1.1.1　设 X 是课堂上所有同学的集合, 定义 X 上两个元素 x, y 等价当且仅当 x 与 y 在同一宿舍, 则这个关系是等价关系, 并且等价类是所有宿舍集合.

例 1.1.2 (整数模 3)　设 X 为整数集, $x \in X, y \in X$, 若 $x-y$ 是 3 的倍数, 则记 xRy. 这个等价关系把整数集分成了三个等价类:

$$[0]=\{\cdots,-6,-3,0,3,6,\cdots\},$$
$$[1]=\{\cdots,-5,-2,1,4,7,\cdots\},$$
$$[2]=\{\cdots,-4,-1,2,5,8,\cdots\}.$$

例 1.1.3 (实射影直线)　设 $\mathbb{R}$ 为实直线, X 是 $\mathbb{R}^2(=\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ 中非零向量构成的集合. $x,y \in X$, 若存在 $\alpha \in \mathbb{R}$, 使得 $x=\alpha y$, 则记 xRy. 等价类是通过原点的直线 (去掉 $(0,0)$).

定义 1.1.2　集合 X 上的一个关系 R 称为一个偏序, 如果它满足自反性, 传递性和反对称性 (即若 xRy, yRx, 则有 $x=y$).

若 R 是一个偏序, 用 $x \prec y$ 表示 xRy, 此时称 X 是偏序集.

例 1.1.4　设 X 是集合 Y 所有子集构成的集合, 通常记为 $X=2^Y$. 若 $A\subset B$, 定义 $A\prec B$, 则 $\prec$ 是 X 上一个偏序.

若 $\prec$ 是 X 上的一个偏序, 并满足对 X 中任意两个元素 x,y, 或者 $x\prec y$ 或 $y\prec x$, 则称 $\prec$ 是全序, X 称为全序集. 例如, $\mathbb{R}$ 在通常大小关系定义的序 $\leqslant$ 下是全序集.

设 X 是由 $\prec$ 确定的偏序集, $Y\subset X$. $p\in X$ 称为 Y 的上界, 若对所有 $y\in Y$, 有 $y\prec p$. 设 $m\in X$, 对任意 $x\in X$, 若 $m\prec x$, 则有 $x=m$, 称 m 为 X 的一个极大元. 类似的可以定义下界和极小元.

Zorn 引理　设 X 是非空偏序集, 若 X 中任一非空全序子集在 X 中均有上界, 则 X 有极大元.

Zorn 引理与下面的 Zermelo 选择公理是等价的. 参见文献 [1] 第 3 页.

Zermelo 选择公理　设 X 是非空集合, $\{A_\alpha\}$ 是 X 的一族两两互不相交的非空子集族, 则必有 X 的子集 B 使得 B 与任何 A_α 的交均是单点集.

本章中会有许多应用 Zorn 引理的例子.

1.2　度 量 空 间

定义 1.2.1　X 是一个集合, 如果有一个定义在 $X\times X$ 上的实值函数 $d(\cdot,\cdot)$, 满足对任意 $x,y,z\in X$, 有

(1) $d(x,y)\geqslant 0$, $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(2) $d(x,y)=d(y,x)$;

(3) 三角不等式　$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$,

则称 X 是一个度量 (距离) 空间. 函数 d 称为 X 上的一个度量 (或距离).

例 1.2.1 设 $X=\mathbb{R}^n$, 对任意 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n),\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)\in X$, 下面定义的 d 是度量:

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

例 1.2.2 设 X 是 $\mathbb{R}^2$ 中的单位圆周, 即 $X=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$, 记 $\boldsymbol{p}_1=(x_1,y_1),\boldsymbol{p}_2=(x_2,y_2)$, 则下列函数 d_1 是 X 上度量:

$$d_1(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

若定义 $d_2(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)=$ 点 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 间的弧长, 则 d_2 也是 X 上度量.

例 1.2.3 设 $X=C[0,1]$ 是 $[0,1]$ 上的实值连续函数全体, 下面定义的 d_1,d_2 均是 $C[0,1]$ 上的度量:

$$d_1(f,g)=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|,$$

$$d_2(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x.$$

有了度量的概念, 就可以描述序列的收敛.

定义 1.2.2 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是度量空间 $\langle X,d\rangle$ 中的一个序列, $x\in X$, 若当 $n\to\infty$ 时, $d(x,x_n)\to 0$, 则称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 x, 记为 $x_n\xrightarrow{d}x$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. 若 x_n 不收敛到 x, 记为 $x_n\overset{d}{\nrightarrow}x$.

易证, 若 $x_n\to x,y_n\to y$, 则 $d(x_n,y_n)\to d(x,y)$.

对例 1.2.2 成立, $d_1(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)\leqslant d_2(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)\leqslant\pi d_1(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)$, 记为 $d_1\leqslant d_2\leqslant\pi d_1$. 因此, $\boldsymbol{p}_n\xrightarrow{d_1}\boldsymbol{p}$ 当且仅当 $\boldsymbol{p}_n\xrightarrow{d_2}\boldsymbol{p}$. 在例 1.2.3 中, 两个不同度量诱导出不同的收敛序列. 因为 $d_2\leqslant d_1$, $f_n\xrightarrow{d_1}f$ 可推出 $f_n\xrightarrow{d_2}f$, 但反之不成立. 例如,

$$g_n(x)=\begin{cases}\text{连接}\left(\dfrac{1}{2n},1\right),\left(\dfrac{1}{2n+1},0\right)\text{的线段}, & x\in\left[\dfrac{1}{2n+1},\dfrac{1}{2n}\right],\\ \text{连接}\left(\dfrac{1}{2n},1\right),\left(\dfrac{1}{2n-1},0\right)\text{的线段}, & x\in\left[\dfrac{1}{2n},\dfrac{1}{2n-1}\right],\\ 0, & x\notin\left[\dfrac{1}{2n+1},\dfrac{1}{2n}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2n},\dfrac{1}{2n-1}\right],\end{cases}$$

则 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在度量 d_2 下收敛到零函数, 但在度量 d_1 下不收敛.

定义 1.2.3 度量空间 $\langle X,d\rangle$ 中的一个序列 $\{x_n\}$ 称为柯西 (Cauchy) 序列, 若对任意 $\varepsilon>0$, 都有正整数 N 使得 $n,m\geqslant N$ 时, 成立 $d(x_n,x_m)<\varepsilon$.

推论 1.2.1　任一收敛序列都是柯西序列.

再看例 1.2.3 中函数 $g_n(x)$. 容易看出, 当 $n \neq m$ 时, $d_1(g_n, g_m) = 1$. 因此, g_n 不是 $\langle C[0,1], d_1\rangle$ 中柯西序列, 因此不是一个收敛序列. 从而, 序列 $\{g_n\}$ 在 $\langle C[0,1], d_2\rangle$ 中收敛, 但在 $\langle C[0,1], d_1\rangle$ 中不收敛.

虽然每个收敛序列一定是柯西序列, 但有例子说明反之不一定成立, 建议读者自己举例.

定义 1.2.4　一个度量空间称为完备的, 若它的所有柯西序列都收敛.

例 1.2.4　实数集 $\mathbb{R}$ 是完备的, 但有理数集 $\mathbb{Q}$ 不是完备的.

例 1.2.5　$\langle C[0,1], d_1\rangle$ 完备, 但 $\langle C[0,1], d_2\rangle$ 不完备.

证明　设 $\{f_n\}$ 按度量 d_1 是柯西序列, 于是对任意给定点 $x \in [0,1]$, 当 $n, m \to \infty$ 时, 有 $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant d_1(f_n, f_m) \to 0$. 因此 $\{f_n(x)\}$ 是实数集的一个柯西序列. 因实数集是完备的, 对每个 $x \in [0,1]$, 存在 $f(x)$, 使得 $f_n(x) \to f(x)$. 任给 ε, 可找到 N, 使得 $n, m \geqslant N$ 时, 有 $d_1(f_n, f_m) < \varepsilon$. 从而 $n \geqslant N$,

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon.$$

因此 $f \in C[0,1]$, 且 $d_1(f, f_n) \to 0$, 所以在度量 d_1 下, $f_n \to f$.

下面给出 $\langle C[0,1], d_2\rangle$ 中的柯西序列不收敛的例子. 定义 $g_n(x)$ 如下:

$$g_n(x) = \begin{cases} 1, & \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \\ \text{线性}, & \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}, \\ -1, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}, \end{cases}$$

则 $g_n(x) \in C[0,1]$. 显然 $g_n(x)$ 逐点收敛到函数

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1, \\ 0, & x = \dfrac{1}{2}, \\ -1, & 0 \leqslant x < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

直接计算知道

$$d_2(g_n, g_m) \leqslant \frac{2}{n} + \frac{2}{m} \to 0.$$

但显然, $g_n(x)$ 在 $\langle C[0,1], d_2\rangle$ 中不收敛. ■

关于 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{Q}$ 的例 1.2.4 表明了该如何使一个不完备空间 X 变成完备的. 通过加入"柯西序列的所有可能极限"来扩大 X, 可得到完备空间 $\tilde{X}$. 这样初空间 X 将在较大空间 $\tilde{X}$ 内稠密.

定义 1.2.5 设 X 是度量空间, 称集合 $M \subset X$ 在 X 中稠密, 若每个 $x \in X$ 是 M 中序列的极限.

定义 1.2.6 从度量空间 $\langle X,d\rangle$ 到度量空间 $\langle Y,\rho\rangle$ 的映射 $f(x)$ 称为在点 x 连续, 若对任意 $x_n \overset{\langle X,d\rangle}{\to} x$, 有 $f(x_n) \overset{\langle Y,\rho\rangle}{\to} f(x)$. 若 $f(x)$ 在 $\langle X,d\rangle$ 上每一点连续, 称 $f(x)$ 在 $\langle X,d\rangle$ 上连续.

前面已经有例子表明, 在 $C[0,1]$ 中有序列 $f_n \overset{d_2}{\to} 0$, 但 $f_n \overset{d_1}{\not\to} 0$, 因此从 $\langle C[0,1], d_2\rangle$ 到 $\langle C[0,1],d_1\rangle$ 的恒等映射不是连续的, 但从 $\langle C[0,1],d_1\rangle$ 到 $\langle C[0,1],d_2\rangle$ 的恒等映射是连续的.

定义 1.2.7 称从 $\langle X,d\rangle$ 到 $\langle Y,\rho\rangle$ 的映射 h 为等距同构, 如果 h 是双射并且保持度量不变, 即任意 $x,y \in X$,

$$\rho(h(x),h(y)) = d(x,y).$$

若 $\langle X,d\rangle$ 和 $\langle Y,\rho\rangle$ 之间存在等距同构映射, 则称 $\langle X,d\rangle$ 和 $\langle Y,\rho\rangle$ 是等距同构.

所有等距同构空间作为度量空间实质上是一致的; 一个定理若仅与 $\langle X,d\rangle$ 的度量结构有关, 则它将在所有与该度量空间等距同构的空间中成立.

定理 1.2.1 设 $\langle X,d\rangle$ 是不完备度量空间, 则可以找到一个完备度量空间 $\widetilde{X}$, 使得 X 等距同构于 $\widetilde{X}$ 的一个稠子集.

证明概貌 考虑 X 中的柯西序列$\{x_n\}$ 若序列$\{x_n\},\{y_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = 0$, 则称序列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 等价. 设 $\widetilde{X}$ 是 X 中的柯西序列在该等价关系下得到的等价类族. 可以证明对任意两个柯西序列 $\{x_n\},\{y_n\}$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$ 存在, 而且仅依赖于 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 所在的等价类. 这个极限定义了 $\widetilde{X}$ 上的一个度量, 而且 $\widetilde{X}$ 是完备的. 最后, 将 x 对应于常数序列, 该序列中每个 x_n 都等于 x, 于是将 X 映射到 $\widetilde{X}$ 内. X 是 $\widetilde{X}$ 的稠子集, 该映射是等距映射. ■

定理 1.2.1 中, $\widetilde{X}$ 称为 X 的完备化空间. 有理数集 $\mathbb{Q}$ 的完备化空间是实数集 $\mathbb{R}$.

定义 1.2.8 设 $\langle X,d\rangle$ 是度量空间,

(1) 集合 $\{x|x \in X, d(x,x_0) < r\}$ 称为以点 x_0 为心, 以 r 为半径的开球, 记为 $B(x_0,r)$;

(2) 集合 $U \subset X$ 称为开的, 若对任意 $x \in U$, 存在 $r > 0$ 使得 $B(x,r) \subset U$;

(3) 集合 $V \subset X$ 称为 x 的邻域, 若存在 $r > 0$ 使得 $B(x,r) \subset V$;

(4) 设 $E \subset X$, 点 x 称为 E 的极限点 (聚点), 若对任意 $r > 0, B(x,r)\bigcap(E \setminus \{x\}) \neq \varnothing$. E 的极限点全体记为 E';

(5) 集合 $F \subset X$ 称为闭的, 若 F 包含它所有的极限点;

(6) 设 $G \subset X$, $x \in G$ 称为 G 的内点, 若 G 是 x 的邻域. G 的内点的全体记为 G°;

(7) 设 $E \subset X$, 称 $\bar{E} = E' \bigcup E$ 为集合 E 的闭包.

定理 1.2.2 设 $\langle X, d \rangle$ 是度量空间,

(1) 集合 U 是开集当且仅当 $X \setminus U$ 是闭集;

(2) $x_n \xrightarrow{d} x$ 当且仅当对 x 的任意邻域 V, 存在正整数 N 使得 $n \geqslant N$ 时, 有 $x_n \in V$;

(3) 一个集合所有内点构成的集合是开集;

(4) 一个集合的闭包是闭集;

(5) 一个集合是开的当且仅当它是它的每个点的邻域.

证明 只证明 (1) 和 (2), 其余证明留给读者.

(1) 假定 U 是 X 的子集, 记 $F = X \setminus U$. 如果 U 是开集, 一定有 $F' \subset F$. 事实上, 对任意 $x \in F'$, 若 $x \in U$, 则存在 $r > 0$, 使得 $B(x, r) \subset U$. 这与 $x \in F'$ 矛盾, 故有 $F' \subset F$. 反之, 若 $F' \subset F$, 则对任意 $x \in U$, 一定有 $x \notin F'$. 因此有 $r > 0$, 使得 $B(x, r) \bigcap (F \setminus \{x\}) = \varnothing$. 因此, $B(x, r) \bigcap F = \varnothing$, 即 $B(x, r) \subset U$, U 是开集.

(2) 若 $x_n \xrightarrow{d} x$, 则 $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$. 如果 V 是 x 邻域, 则存在 $r > 0$, 使得 $B(x, r) \subset V$. 从而存在 N, 当 $n \geqslant N$ 时, $x_n \in B(x, r) \subset V$. 反之, 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $V = B(x, \varepsilon)$. 由假定存在 N, 当 $n \geqslant N$ 时, $x_n \in V$, 即 $d(x_n, x) < \varepsilon$. ■

定理 1.2.3 从度量空间 $\langle X, \rho \rangle$ 到度量空间 $\langle Y, d \rangle$ 的映射 $f(x)$ 在 x_0 连续当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得 $f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$.

证明 利用反证法证明必要性. 假定存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对任意 $\delta > 0$, $f(B(x_0, \delta))$ 不含于 $B(f(x_0), \varepsilon_0)$. 因此存在点列 $\{x_n\} \subset X$ 使得对任意自然数 n, $\rho(x_n, x_0) < 1/n$ 并且 $d(f(x_n), f(x_0)) \geqslant \varepsilon_0$. 显然, $x_n \to x_0$ 但 $f(x_n) \nrightarrow f(x_0)$. 矛盾. 反之, 假设条件满足. 若 $x_n \to x_0$, 则存在正整数 N 使得 $n \geqslant N$ 时 $x_n \in B(x_0, \delta)$. 从而 $f(x_n) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$, 即 $f(x_n) \to f(x_0)$. ■

定理 1.2.4 从一个度量空间 X 到另一度量空间 Y 的映射 $f(x)$ 是连续的当且仅当对所有开集 $V \subset Y$, $f^{-1}[V]$ 是开集.

定理 1.2.4 的证明留给读者.

定义 1.2.9 设 $\mathscr{F}$ 是从度量空间 $\langle X, \rho \rangle$ 到度量空间 $\langle Y, d \rangle$ 的函数组成的函数族, 称 $\mathscr{F}$ 是等度连续族如果对任意给定 $x \in X$ 和 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, 只要 $\rho(x, x') < \delta$, 对所有的 $f \in \mathscr{F}$, 有 $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

称 $\mathscr{F}$ 是一致等度连续族如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 只要 $\rho(x, x') < \delta$, 对所有 $f \in \mathscr{F}$, 有 $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

定理 1.2.5 设 f_n 是一列从一个度量空间 $\langle X,\rho\rangle$ 到另一度量空间 $\langle Y,d\rangle$ 的等度连续函数列. 若对每个 x, $f_n(x)\to f(x)$, 则 f 连续.

证明 给定 ε 和 x, 选取 δ, 使得当 $\rho(x,x')<\delta$ 时, 对所有 n, 有 $d(f_n(x),f_n(x'))<\varepsilon/2$. 因为 d 连续, 有 $d(f(x),f(x'))=\lim\limits_{n\to\infty}d(f_n(x),f_n(x'))$. 所以当 $\rho(x,x')<\delta$ 时, 有 $d(f(x),f(x'))\leqslant\varepsilon/2<\varepsilon$. 由定理 1.2.3, $f(x)$ 在点 x 连续. ■

这个证明表明若 $\{f_{n,m}\}$ 是一等度连续族, 并对每个 m, $\lim\limits_{n\to\infty}f_{n,m}=f_m$ 存在, 则 $\{f_m\}$ 是一等度连续族.

定理 1.2.6 设 f_n 是由度量空间 $\langle X,\rho\rangle$ 到度量空间 $\langle Y,d\rangle$ 的等度连续函数族, 其中 Y 是完备的. 设 $D\subset X$ 是一稠子集, 若对所有 $x\in D$, $f_n(x)$ 收敛, 则对所有 $x\in X$, $f_n(x)$ 收敛.

证明 取定 $x\in X$, 往证 $\{f_n(x)\}$ 是柯西序列. 由等度连续性, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 只要 $\rho(x,y)<\delta$, 对任何自然数 n 有 $d(f_n(x),f_n(y))<\varepsilon/3$. 因为 D 在 X 中稠密, 存在 $x_0\in D$, 使得 $\rho(x,x_0)<\delta$. 由假定存在自然数 N 使得当 $m,n\geqslant N$ 时, $d(f_n(x_0),f_m(x_0))<\varepsilon/3$. 从而当 $m,n\geqslant N$ 时,

$$d(f_n(x),f_m(x))\leqslant d(f_n(x),f_n(x_0))+d(f_m(x),f_m(x_0))+d(f_n(x_0),f_m(x_0))<\varepsilon. \quad ■$$

上述定理表明稠子集上的逐点收敛结合等度连续性能推出处处逐点收敛. 特别地, 对 $[0,1]$ 上的函数列, 一致等度连续性和逐点收敛能推出一致收敛:.

定理 1.2.7 设 f_n 是 $[0,1]$ 上一致等度连续函数族, 若对每个 $x\in[0,1]$, $f_n(x)\to f(x)$, 则 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$.

证明 给定 ε, 取 δ, 使得当 $|x-y|<\delta$ 时, 对所有 n, 有 $|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon/3$. 取 $y_1,\cdots,y_m$, 使得 $[0,1]$ 内的每个点属于某个 y_i 的 δ 邻域. 因 $y_1,\cdots,y_m$ 是有限集, 可以找到 N, 使得当 $n>N$ 时, 有 $|f_n(y_i)-f(y_i)|<\varepsilon/3$, 其中, $i=1,2,\cdots,m$. 由此对 $x\in[0,1]$, $n\geqslant N$, $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. ■

引理 1.2.1(对角化技巧) 设 $f_n(m)$ 是定义在正整数集上的一列一致有界序列, 即存在常数 C 使得对所有 n,m, 有 $|f_n(m)|\leqslant C$, 则存在一个子序列 $\{f_{\hat{n}(i)}(m)\}_{i=1}^{\infty}$, 使得对每个固定值 m, 当 $i\to\infty$, $f_{\hat{n}(i)}(m)$ 收敛.

证明 考虑序列 $f_n(1)$. 它是有界数集, 于是可以找到子序列 $f_{n_1(i)}$, 使得 $f_{n_1(i)}(1)$ 收敛到某个数 $f_\infty(1)$. 现考虑序列 $f_{n_1(i)}(2)$, 可以找到子序列 $f_{n_2(i)}$, 当 $i\to\infty$ 时, 有 $f_{n_2(i)}(2)\to f_\infty(2)$. 利用归纳法依次进行下去, 可以找到一子序列 $f_{n_k(i)}$, 满足: ① $f_{n_k(i)}$ 是 $f_{n_{k-1}(i)}$ 的子序列; ② 当 $i\to\infty$ 时, $f_{n_k(i)}(k)\to f_\infty(k)$. 因此, 特别地, 对 $j=1,2,\cdots,k$, 当 $i\to\infty$ 时, $f_{n_k(i)}(j)\to f_\infty(j)$. 取对角序列, $\hat{n}(k)=n_k(k)$. 对任何 k, $f_{\hat{n}(k)},f_{\hat{n}(k+1)},\cdots$ 是 $f_{n_k(i)}$ 的子序列, 从而当 $i\to\infty$ 时, 有 $f_{\hat{n}(i)}(k)\to f_\infty(k)$. ■

由上面的收敛定理 (定理 1.2.6 和定理 1.2.7) 和对角化技巧引理可以得到下面的定理.

定理 1.2.8(Ascoli 定理)　设 f_n 是 $[0,1]$ 上一致有界、等度连续函数族, 则存在某一子序列 $f_{n(i)}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

证明　设 $q_1, q_2, \cdots$ 是 $[0,1]$ 中有理数. 因为 $\{f_n\}$ 一致有界, 则存在常数 C 对所有 m 和 n, $|f_n(q_m)| \leqslant C$. 由对角化技巧, 可以找到一子序列 $f_{n(i)}$, 使得对每个 m, 当 $i \to \infty$ 时, 有 $f_{n(i)}(q_m)$ 收敛. 由定理 1.2.6, $f_{n(i)}$ 处处逐点收敛. 由习题第 9 题和定理 1.2.7 知, 它们一致收敛. ■

1.3 赋范线性空间

定义 1.3.1　设 X 是 $\mathbb{R}$(或 $\mathbb{C}$) 上的线性空间, 如果有从 X 到 $\mathbb{R}$ 的函数 $\|\cdot\|$ 满足: $\forall v, w \in X, \alpha \in \mathbb{R}$ (或 $\mathbb{C}$) 成立

(1) $\|v\| \geqslant 0$, $\|v\| = 0$ 当且仅当 $v = 0$;

(2) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$;

(3) $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$,

则称 X 为赋范线性空间, $\|\cdot\|$ 为 X 上范数.

定义 1.3.2　称赋范线性空间 $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ 到赋范线性空间 $\langle Y, \|\cdot\|\rangle$ 的映射 T 是有界线性变换 (或有界线性算子), 若它满足:

(1) 对所有 $x, y \in X$, 以及 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (或 $\mathbb{C}$), 有 $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$;

(2) 存在 $C \geqslant 0$ 使得对所有 $x \in X$, 有 $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$.

所有满足条件 (2) 的常数 C 的最小值称为 T 的范数, 记为 $\|T\|$. 因此有

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

$\mathbb{R}^n$ 按范数 $\|(x_1, \cdots, x_n)\| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$ 成为赋范线性空间; $C[0,1]$ 按范数 $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$ 或 $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x$ 成为赋范线性空间.

容易证明, 在赋范线性空间上, $d(x, y) = \|x - y\|$ 定义了一个度量, 称为由范数诱导的度量. 因此赋范线性空间总是一个度量空间.

读者可以自己证明下列定理.

定理 1.3.1　设 T 是两个赋范线性空间之间的线性变换, 则下列条件等价:

(1) T 在某一点连续;

(2) T 在所有点都连续;

(3) T 有界;

(4) T 将有界集映为有界集.

定义 1.3.3 称赋范线性空间 $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ 是完备的, 若在范数诱导的度量下它是一个完备的度量空间.

例 1.3.1 $C[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上连续函数全体构成的集合, 其中, 度量

$$d_1(f,g) = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - g(x)|$$

是由范数 $\|f\|_\infty = d_1(f,0)$ 诱导的. $C[a,b]$ 是完备的赋范线性空间.

证明 见例 1.2.5.

若 $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ 是赋范线性空间, 由定理 1.2.1 知, 作为度量空间, X 有完备化空间. 利用 X 在 $\widetilde{X}$ 中稠密这一事实, 容易看到 $\widetilde{X}$ 可以很自然地成为一个赋范线性空间. 下面这个定理及其证明阐明了这些观点. ■

定理 1.3.2 设 T 是从赋范线性空间 $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ 到完备的赋范线性空间 $\langle Y, \|\cdot\|\rangle$ 的有界线性算子, 则 T 可以唯一地扩张成从 X 的完备化空间 $\widetilde{X}$ 到 $\langle Y, \|\cdot\|\rangle$ 的有界线性算子 $\tilde{T}$.

证明 设 $\widetilde{X}$ 是 X 的完备化. 对每个 $x \in \widetilde{X}$, 存在 X 中的序列 $\{x_n\}$ 使得, 当 $n \to \infty$ 时, 有 $x_n \to x$. 因 $\{x_n\}$ 收敛, 它是柯西序列, 任给 ε, 可以找到 N, 使得当 $n, m > N$ 时, 有 $\|x_n - x_m\| < \varepsilon/\|T\|$. 于是有 $\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leqslant \|T\|\|x_n - x_m\| \leqslant \varepsilon$, 这证明了 $\{Tx_n\}$ 是 Y 中的柯西序列. 因为 Y 是完备的, 存在 y, 使得 $Tx_n \to y$. 定义 $\widetilde{T}x = y$. 首先必须证明这个定义与序列 $\{x_n\}$ 选取无关. 若 $x_n \to x, x_n' \to x$, 则序列 $x_1, x_1', x_2, x_2', \cdots \to x$, 由上面的讨论知, 存在 $\hat{y}$, 使得 $Tx_1, Tx_1', \cdots \to \hat{y}$. 因此 $\lim Tx_n' = \hat{y} = \lim Tx_n$. 此外, 要证明 $\widetilde{T}$ 是有界. 因为

$$\|\widetilde{T}x\| = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n\| \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, C\|x_n\| = C\|x\|,$$

所以 $\widetilde{T}$ 有界. 线性性和唯一性留给读者证明. ■

1.4 抽 象 积 分

定义 1.4.1 (1) 设 $\mathfrak{M}$ 是集合 X 的子集构成的集合, 若 $\mathfrak{M}$ 满足

(i) $X \in \mathfrak{M}$;

(ii) 若 $A \in \mathfrak{M}$, 则 $A^c \in \mathfrak{M}$, 其中, A^c 表示 A 在 X 中的余 (补) 集;

(iii) 若 $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, 且对 $n = 1, 2, 3, \cdots$ 都有 $A_n \in \mathfrak{M}$, 则 $A \in \mathfrak{M}$,

则称 $\mathfrak{M}$ 为 X 中的 σ- 代数.

(2) 如果 $\mathfrak{M}$ 是 X 中的 σ- 代数, 则 $(X, \mathfrak{M})$ 称为可测空间, $\mathfrak{M}$ 中集合称为 X 中的可测集; 在 σ- 代数 $\mathfrak{M}$ 明确的情况下, 通常简记可测空间 $(X, \mathfrak{M})$ 为 X.

(3) 如果 X 是可测空间, $f: X \to Y, Y = \mathbb{C}$ (或 $\mathbb{R}$) 是一映射, 如果对 Y 中任意开集 V, $f^{-1}(V)$ 是可测集, 称 f 是可测函数.

设 $\mathfrak{M}$ 是集合 X 中的一个 σ- 代数. 由 σ- 代数定义的性质 (i)~(iii), 立即得到下面的事实:

(1) 由于 $\varnothing = X^{\mathrm{c}}$, 故由 (i) 和 (ii) 知 $\varnothing \in \mathfrak{M}$;

(2) 在 (iii) 中取 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing$, 则若对 $i = 1, \cdots, n$ 都有 $A_i \in \mathfrak{M}$, 则 $A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_n \in \mathfrak{M}$;

(3) 由于

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^{\mathrm{c}} \right)^{\mathrm{c}},$$

故 $\mathfrak{M}$ 在可数交下是闭的;

(4) 由于 $A \setminus B = B^{\mathrm{c}} \bigcap A$, 故若 $A, B \in \mathfrak{M}$, 必有 $A \setminus B \in \mathfrak{M}$.

例 1.4.1　设 $\mathfrak{M}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中 Lebesgue 可测集全体构成的集合, 则 $\mathfrak{M}$ 是一个 σ- 代数, 因此 $\mathbb{R}^n$ 是一个可测空间. $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 可测函数就是可测空间 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

下面的命题是容易证明的, 留给读者作为练习.

命题 1.4.1　设 X 是可测空间.

(1) 设 u 和 v 都是 X 上实可测函数, 若 $f = u + \mathrm{i}v$, 则 f 是 X 上复可测函数;

(2) 设 $f = u + \mathrm{i}v$ 是 X 上复可测函数, 则 u, v 和 $|f|$ 都是 X 上实可测函数;

(3) 设 f 和 g 都是 X 上复可测函数, 则 $f + g$ 和 fg 也是 X 上复可测函数;

(4) 若 E 是 X 中一个可测集,

$$\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E, \end{cases}$$

则 $\mathcal{X}_E$ 是一个可测函数. 称 $\mathcal{X}_E$ 为集合 E 的特征函数;

(5) 设 f 是 X 上复可测函数, 则必存在 X 上的复可测函数 α, 使得 $|\alpha| = 1$ 且 $f = \alpha |f|$.

σ- 代数是大量存在的.

定理 1.4.1　设 $\mathscr{F}$ 是 X 的子集构成的集合, 则必存在 X 中包含 $\mathscr{F}$ 的最小的 σ- 代数.

证明　设 Ω 是 X 内包含 $\mathscr{F}$ 的所有 σ- 代数 $\mathfrak{M}$ 族. 由于 X 的所有子集集合也是一个 σ- 代数, 故 Ω 不是空集. 设 $\mathfrak{M}^*$ 是所有 $\mathfrak{M} \in \Omega$ 的交集. 显然 $\mathscr{F} \in \mathfrak{M}^*$, 且 X 中包含 $\mathscr{F}$ 的每个 σ- 代数都包含 $\mathfrak{M}^*$. 为了完成证明, 只需证 $\mathfrak{M}^*$ 是一个 σ- 代数即可.

设对 $n=1,2,3,\cdots$ 有 $A_n \in \mathfrak{M}^*$ 和 $\mathfrak{M} \in \Omega$, 则 $A_n \in \mathfrak{M}$, 从而由 $\mathfrak{M}$ 是 σ- 代数得到 $\bigcup A_n \in \mathfrak{M}$. 由于对任意的 $\mathfrak{M} \in \Omega$ 都有 $\bigcup A_n \in \mathfrak{M}$, 得到 $\bigcup A_n \in \mathfrak{M}^*$. σ- 代数定义的其他两个性质类似可证. ■

定理 1.4.1 中的 $\mathfrak{M}^*$ 有时称为由 $\mathscr{F}$ 生成的 σ- 代数.

定理 1.4.2 设 $f_n : X \to [-\infty,\infty] (n=1,2,3,\cdots)$ 是可测的,

$$g=\sup_{n\geqslant 1} f_n, \quad h=\limsup_{n\to\infty} f_n,$$

则 g 和 h 都是可测的.

定理 1.4.2 的证明留给读者作为练习.

推论 1.4.1 (1) 复可测函数序列的逐点收敛极限是可测的;

(2) 若 f 和 g 都是可测的 (值域在 $[-\infty,\infty]$ 上), 则 $\max\{f,g\}$ 和 $\min\{f,g\}$ 都是可测的. 特别的, 函数

$$f^+=\max\{f,0\}, \quad f^-=\min\{-f,0\}$$

也都是可测的.

上面的函数 f^+ 和 f^- 分别称为函数 f 的正负部分. 显然有 $|f|=f^++f^-$ 和 $f=f^+-f^-$, f 可以看成两个非负函数的差.

定义 1.4.2 设 X 是可测空间, s 是 X 上的函数, 且其值域为 $[0,\infty)$ 上有限多个点, 则称函数 s 为简单函数.

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是简单函数 s 的不同取值, 令 $A_i=\{x : s(x)=\alpha_i\}$, 则有

$$s=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathcal{X}_{A_i},$$

这里 $\mathcal{X}_{A_i}$ 是 A_i 的特征函数.

显然 s 是可测函数的充要条件是每个集合 A_i 是可测集.

定理 1.4.3 设 $f : X \to [0,\infty]$ 是可测的, 则存在 X 上的简单可测函数 s_n 使得

(1) $0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant \cdots \leqslant f$;

(2) 对每个 $x \in X$, 当 $n\to\infty$ 时都有 $s_n(x)\to f(x)$.

证明 对 $n=1,2,3,\cdots$ 和 $1\leqslant i\leqslant n2^n$, 定义

$$E_{n,i}=f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}\right]\right), \quad F_n=f^{-1}([n,\infty]),$$

再取

$$s_n=\sum_{i=1}^{n2^n}\frac{i-1}{2^n}\mathcal{X}_{E_{n,i}}+n\mathcal{X}_{F_n}.$$

显然, $E_{n,i}$ 和 F_n 都是可测集. 容易看出函数 s_n 满足 (1). 若 x 满足 $f(x) < \infty$, 则当 n 足够大时有 $s_n(x) \geqslant f(x) - 2^{-n}$; 若 $f(x) = \infty$, 则 $s_n(x) = n$. 这就证明了 (2) 成立. ■

若 f 是有界函数, 则上面定理的构造产生了一个一致收敛序列 $\{s_n\}$.

定义 1.4.3 (1) 正测度是一个定义在 σ- 代数 $\mathfrak{M}$ 上, 值域在 $[0,\infty]$ 内, 满足可数可加性的函数 μ. 这就意味着若 $\{A_i\}$ 是 $\mathfrak{M}$ 中互不相交的可数集合, 则

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

为了避免奇异, 假设至少有一个 $A \in \mathfrak{M}$, 有 $\mu(A) < \infty$.

(2) 测度空间是具有定义在可测集的 σ- 代数上的正测度的可测空间.

(3) 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是测度空间, 如果 $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n, X_n \in \mathfrak{M}$, 并且 $\mu(X_n) < \infty, n = 1, \cdots$, 称 μ 是 σ- 有限测度, 同时称 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是 σ- 有限的测度空间.

(4) 复测度是定义在 σ- 代数上满足可数可加性的复值函数.

例 1.4.2 比较有趣味的测度空间的构造不是很容易, 但简单的例子还是可以立即得到:

(1) $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度就是可测空间 $\mathbb{R}^n$ 上的正测度, 并且是 σ- 有限的测度.

(2) 设 X 是任意集合, 对任意的 $E \subset X$. 若 E 是无限点集, 则定义 $\mu(E) = \infty$; 若 E 是有限点集, 则定义 $\mu(E)$ 为 E 中点的数目. μ 称为 X 上的计数测度.

(3) 固定 $x_0 \in X$, 对任意的 $E \subset X$, 若 $x_0 \in E$ 则定义 $\mu(E) = 1$, 若 $x_0 \notin E$, 则定义 $\mu(E) = 0$. 这个测度 μ 被称为 x_0 的集中质量测度.

定理 1.4.4 设 μ 是 σ- 代数 $\mathfrak{M}$ 上的一个正测度, 则

(1) $\mu(\varnothing) = 0$;

(2) 若 $A_1, \cdots, A_n$ 是 $\mathfrak{M}$ 中互不相交的集合, 则

$$\mu(A_1 \bigcup \cdots \bigcup A_n) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n);$$

(3) 设 $A, B \in \mathfrak{M}$, 若 $A \subset B$, 则 $\mu(A) \leqslant \mu(B)$;

(4) 设 $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \mathfrak{M}$ 且

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots,$$

则当 $n \to \infty$ 时, 有 $\mu(A_n) \to \mu(A)$;

(5) 设 $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \mathfrak{M}$,

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots,$$