

工程硕士学位课教材系列—3

工程信号处理与设备诊断

上海交通大学机械与动力工程学院组织编写

佟德纯 姚宝恒 编著

 科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书主要阐述信号处理的基本理论及其在设备诊断中的应用. 内容包括: 数学变换 (傅里叶变换、拉普拉斯变换、Z 变换以及 FFT、Hilbert 变换等); 相关与谱分析 (相关理论、频谱分析及幅值统计); 系统动态特性描述与识别 (互谱理论、频响函数与相干分析); 倒谱分析、细化技术以及小波理论和时频分析.

本书可作为高等院校工程类专业的本科生、研究生及工程硕士班的教材或教学参考书, 也可作为机械、冶金、石化、航天、航空、舰船、土木、桥梁、汽车等专业的工程技术人员和科研人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

工程信号处理与设备诊断/佟德纯, 姚宝恒编著. —北京: 科学出版社, 2008
(工程硕士学位课教材系列 3)

ISBN 978-7-03-021277-1

I. 工… II. ①佟… ②姚… III. ①信号处理 ②信号设备-故障诊断
IV. TN911.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 030793 号

责任编辑: 吕 虹 赵彦超 / 责任校对: 陈玉凤

责任印制: 赵德静 / 封面设计: 王 浩

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 4 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2008 年 4 月第一次印刷 印张: 15 3/4

印数: 1—3 000 字数: 297 000

定价: 58.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换 (新欣))

前 言

物体的运动有各种形式和状态, 自古以来人们就想方设法探讨物体的运动规律. 但是, 由于受到主观和客观条件的限制, 人们的认识往往只能达到只知其一不知其二的粗浅程度. 随着科学技术的发展, 当今社会已进入电子计算机的时代. 在科学技术的开发和研究工作中, 由于先进的快速电子运算技术与振动、冲击、噪声学科相结合, 以及快速傅里叶变换 (FFT) 和超大规模集成电路 (VLSI) 的问世, 形成了一门新兴的电子数字运算应用技术——工程信号处理. 它的出现和发展极大地丰富和完善了振动、冲击、噪声学科的研究内容, 提高了振动、冲击、噪声反映运动物体动态特性和变化过程的能力. 因此, 工程信号处理技术被广泛应用于机械、航天、舰船、石化、钢铁、建筑、地质、环保以及生物、医学工程等领域, 发挥了重要作用.

机械设备的各种状态和运转过程通常以其“二次效应”反映出来, 典型的二次效应有振动、噪声、温度、压力和应变等. 通过电测手段可将这些物理量测取记录下来, 此类工程中客观产生的信号称为工程信号, 简称信号. 信号中蕴含着反映物理系统状态与特征的有用信息, 因此, 它是人们认识客观事物内在规律、研究事物之间相互关系以及预报发展趋势的依据.

对于工程的实测信号, 虽然可以直接判读获得信息, 但这往往是有限的, 不能满足需要. 因此, 有必要对测得的信号进行一定的加工和处理, 以达到去伪存真和提取更多有用信息的目的. 信号处理主要包括采集、变换和识别三个既独立又相互联系的过程, 如图 0-1 所示.

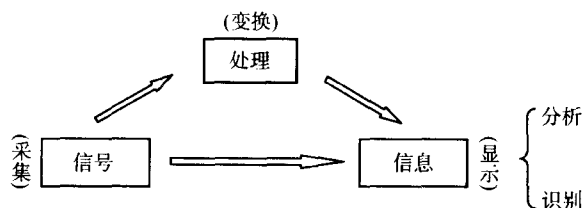


图 0-1 信号处理

作为一门新兴学科, 工程信号处理仅有几十年的历史, 但它的发展速度却是惊人的. 17 世纪末到 18 世纪初, 法国数学家傅里叶 (Fourier) 创立的傅里叶变换理论是当今数字谱分析的出发点. 早年俄国数学家科尔莫戈罗夫 (Kolmogorov) 研究

随机变量, 从概率统计理论上奠定了随机信号处理的研究工作基础. 1940 年维纳 (Wiener) 和辛钦 (Khinchine) 两位学者找到了自相关函数与功率谱密度函数之间的变换关系, 为用傅里叶变换处理随机信号提供了理论根据. 香农 (Shannon) 等学者进行的采样误差的研究, 提出了采样误差理论, 为信号处理技术从理论走向实用化开辟了道路. 应该着重指出, 1965 年美国库利 (Cooley) 和图基 (Tukey) 提出的一种离散傅里叶变换 (DFT) 的快速算法, 即快速傅里叶变换 (FFT), 使运算速度大大提高, 从而促进了信号处理技术的飞速发展.

近十几年来, 随着电子计算技术的迅速发展, 特别是大规模集成电路 (LSI) 和超大规模集成电路 (VLSI) 的出现, 以及由此而开发的微处理系统, 诞生了信号处理专业. 目前信号处理技术已经形成一门具有系统理论和先进硬件支持的新兴学科, 它与其他专业理论和技术相结合, 又派生出许多新的技术分支, 例如:

- (1) 旋转机械的特征分析;
- (2) 机械设备故障诊断与预报技术;
- (3) 结构模态分析与综合;
- (4) 声强测量与噪声控制;
- (5) 生物信号处理;
- (6) 语音分析与识别.

信号的数字处理技术中以工程应用为重点的一个分支——工程信号处理, 特别是随着非平稳信号处理工具的出现, 将会有更为广阔的发展前景. 同时作为一种方法和手段, 必将促进其他学科的变革和发展.

目前有关信号处理方面的书籍, 特别是译著已经出版了不少, 但多数是以无线电类专业为背景; 而以机械工程类专业为背景, 以实测的振动噪声信号为主要对象, 重点解决工程应用方面的专著, 至今仍很少见. 作者多年从事这方面的教学和科研工作, 深深体会到这方面需求的迫切性. 为此, 编著了这本《工程信号处理与设备诊断》, 力图使信号处理这门新技术能满足广大工程技术人员的要求, 在广泛的科学技术领域和工业部门中取得应用成果.

本书是以第一作者给研究生讲课的讲义《工程信号处理及应用》为基础, 增加了非平稳信号处理的时频分析技术和设备诊断应用的成果编著而成的, 以工程信号处理的理论与方法为主要内容, 包括:

- (1) 信号处理的基本理论, 其中包括序言、数学变换和快速傅里叶变换;
- (2) 相关与谱分析, 其中包括信号幅值统计、相关分析和频谱分析;
- (3) 系统的动态特性, 其中包括互谱与声强测量、系统频响函数和相干分析;
- (4) 信号处理新技术, 其中包括倒谱分析、细化技术与边带识别;
- (5) 非平稳信号处理的时频分析方法;
- (6) 附录, 其中包括名词和术语解释.

对作者来说, 编著本书是一种尝试, 限于水平和时间, 书中难免有不足之处, 热忱希望广大读者给予批评指正.

佟德纯 姚宝恒
于上海交通大学

Apr 16/08

目 录

前言

第 1 章 数学变换	1
1.1 傅里叶变换	1
1.1.1 傅里叶级数	1
1.1.2 傅里叶积分	5
1.1.3 傅里叶变换的性质和傅里叶变换表	6
1.2 拉普拉斯变换	19
1.2.1 拉普拉斯变换的概念	19
1.2.2 拉普拉斯变换的性质与周期函数的拉普拉斯变换	21
1.2.3 拉普拉斯变换的应用	23
1.3 Z 变换	25
1.3.1 离散时间序列与 Z 变换	25
1.3.2 Z 变换的性质	26
1.3.3 Z 反变换	28
1.3.4 离散系统特性的描述	29
1.4 希尔伯特变换	30
1.4.1 希尔伯特变换的定义	30
1.4.2 希尔伯特变换的性质	31
1.4.3 希尔伯特变换表	33
第 2 章 快速傅里叶变换	35
2.1 信号的分类与描述	35
2.2 信号的数字化	38
2.2.1 采样与采样定理	39
2.2.2 叠混误差	40
2.2.3 量化与量化误差	42
2.3 离散傅里叶变换 (DFT)	44
2.3.1 DFT 计算表达式	44
2.3.2 离散逆傅里叶变换 (IDFT)	45

2.3.3	DFT 的主要性质	46
2.4	傅里叶变换与离散傅里叶变换	48
2.4.1	连续时间函数与连续频率函数	48
2.4.2	连续时间函数和离散频率函数	48
2.4.3	离散时间序列与连续频率函数	49
2.4.4	离散时间函数与离散频率函数	49
2.5	快速傅里叶变换	51
2.5.1	DFT 运算特点	51
2.5.2	DFT 的快速算法	52
2.5.3	FFT 的基本算法	53
2.5.4	FFT 的实现	58
2.6	泄漏与加窗	59
2.6.1	用矩形窗截取	59
2.6.2	加窗处理	62
2.7	窗函数	62
第 3 章	信号的幅值统计与应用	68
3.1	载荷信号的特征参数	68
3.1.1	载荷信号的峰值和谷值	68
3.1.2	载荷信号幅值的平均值、方差和标准差	68
3.1.3	载荷信号的有效值	70
3.2	载荷信号的分布特性	71
3.2.1	概率密度函数与概率分布函数	71
3.2.2	偏态参数与峰态参数	72
3.2.3	载荷信号的幅值直方图与累计频次图	73
3.3	载荷信号幅值的计数法	75
3.3.1	峰值计数法	75
3.3.2	振程计数法	77
3.3.3	雨流计数法	79
3.4	各种计数法的评价和选用	81
3.4.1	同一复合周期波形的 4 种计数法结果的比较	82
3.4.2	同一随机信号的 4 种计数方法的结果比较	82
3.4.3	计数法的评价和选用	85
3.5	幅值直方图与寿命预估	85
3.5.1	求概率分布函数	85

3.5.2 寿命预估	86
第 4 章 相关分析及应用	88
4.1 概述	88
4.2 相关函数	89
4.3 互相关分析	93
4.4 相关函数的计算	96
4.5 相关测速和定位	99
4.6 传递路径识别与“贡献量”测定	103
4.6.1 多路非频变传递路径的识别	103
4.6.2 振动噪声源的测定	105
4.7 相关分析与同频检测	106
第 5 章 频谱分析及应用	109
5.1 频率分析	109
5.2 功率谱分析	112
5.2.1 傅里叶谱函数	112
5.2.2 功率谱密度函数	113
5.2.3 谱分析中的基本量及其单位	116
5.3 信号的相位谱	117
5.4 谱估计的精度	118
5.5 旋转机械的特征分析	122
5.6 载荷谱与随机环境模拟	128
5.7 工程应用实例	130
第 6 章 互谱理论与声强测量	133
6.1 互谱密度函数	133
6.2 声波的能量声强定义	137
6.3 声强的互谱表达式	138
6.4 声强测量的工程应用	141
6.5 声强测量仪器与系统	146
第 7 章 频响函数与相干分析	150
7.1 线性系统的描述	150
7.2 线性系统的相关函数和功率谱	152
7.3 系统的频率响应与相干函数	154
7.4 频响函数的计算	157
7.5 频响函数的测量	163
7.6 频响函数的应用	166

7.7 系统的相干分析·····	168
7.8 系统的偏相干分析·····	171
第 8 章 倒谱分析及应用 ·····	174
8.1 倒谱的数学模型·····	174
8.2 复倒谱的建立与相位展开·····	176
8.3 倒谱解卷积与倒频滤波·····	180
8.4 倒谱在计算机上的实现·····	186
8.5 工程应用实例·····	188
8.6 典型信号的倒谱·····	194
第 9 章 细化技术与边带识别 ·····	200
9.1 概述·····	200
9.2 细化幅值谱·····	201
9.3 细化相位谱·····	204
9.4 相位补偿 Zoom-FFT·····	207
9.5 级联 Zoom-FFT·····	209
9.6 故障边带及其识别方法·····	211
9.6.1 调制边带结构·····	211
9.6.2 频带的识别·····	215
第 10 章 非平稳信号处理 ·····	220
10.1 傅里叶变换和加窗傅里叶变换·····	220
10.2 时-频分布·····	222
10.3 小波变换·····	223
10.3.1 小波变换定义·····	223
10.3.2 小波基函数及选择原则·····	225
10.3.3 小波分解与重构算法·····	227
10.4 循环平稳信号处理方法·····	229
参考文献 ·····	231
附录 专业名词术语中英对照与解释 ·····	232

第1章 数学变换

信号包含着信息, 这种信息通常反映一个物理系统的状态和特征. 一般实测的信号是一个时间历程波形, 或者说是以时间为独立变量的时间函数. 在每个科学技术领域, 为了提取信息, 都必须对时域信号进行变换, 使之从一种形式变换成更易于分析识别的形式. 在某种意义上这种新的信号形式比原始信号更合乎提取信息的要求.

上述变换的理论依据是数学上的变换原理, 为此, 本章作为信号处理的数学基础介绍几种常用的数学变换.

1.1 傅里叶变换

1.1.1 傅里叶级数

1. 周期函数与三角函数

弹簧质量系统的简谐振动、内燃机活塞的往复运动等都是周而复始的运动, 这种运动叫做周期运动, 它反映在数学上就是周期函数的概念. 对于函数 $f(t)$, 若存在着不为零的常数 T , 对于时间 t 的任何值都有

$$f(t+T) = f(t), \quad (1-1)$$

则称 $f(t)$ 为周期函数, 而满足 (1-1) 式的最小正数 T 称为 $f(t)$ 的周期.

正弦函数是一种常见的描述简谐振动的周期函数. 如

$$y(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

是一个以 $2\pi/\omega$ 为周期的正弦函数. 其中, y 表示动点的位置; t 表示时间; A 为振幅; ϕ 为相角; ω 为角频率, 即 $\omega = 2\pi f$, f 为频率.

除正弦周期函数之外, 还有非正弦周期函数, 它反映复杂的周期运动. 非正弦周期函数可以分解成若干三角函数之和. 也就是说, 一个比较复杂的周期运动可以看成许多不同频率的简谐运动的叠加.

2. 周期函数的傅里叶级数展开

任何一个周期为 T 的周期函数 $f(t)$, 如果在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 上满足 Dirichlet 条件,

则可展开为如下的傅里叶级数, 即

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \phi_n) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \end{aligned} \quad (1-2)$$

其中

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi/T; \\ a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt; \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt. \end{aligned}$$

以上展开式叫做周期函数 $f(t)$ 的傅里叶级数. 其中, a_0, a_n, b_n 为傅里叶系数. 在信号处理中, 这种展开又叫做频率分析, 其中常数 $a_0/2$ 表示信号的静态部分, 称为直流分量, 而

$$\begin{aligned} &a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t, \\ &a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t, \\ &\dots\dots\dots \\ &a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t, \end{aligned}$$

依次叫做一次谐波, 二次谐波, $\dots\dots\dots$, n 次谐波等.

3. 傅里叶级数的复数形式

根据欧拉公式, 即

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}), \\ \sin \theta &= \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta}) \\ &= -\frac{j}{2}(e^{j\theta} - e^{-j\theta}). \end{aligned}$$

可将 (1-2) 式写成

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2}(e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}) - \frac{jb_n}{2}(e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}) \right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega t} \right). \quad (1-3)$$

若令

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \\ c_n &= \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega t} dt, \\ c_{-n} &= \frac{a_n + jb_n}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{jn\omega t} dt. \end{aligned}$$

则有

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jn\omega t} + c_{-n} e^{-jn\omega t}), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1-4)$$

把 c_0 , c_n 和 c_{-n} 用统一的 c_n 来表示, 即

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1-5)$$

得到

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega t} dt \right] e^{jn\omega t}, \end{aligned} \quad (1-6)$$

这就是傅里叶级数的复指数形式。

傅里叶级数的以上两种形式在本质上相同, 但是在应用上复数形式比较方便. 系数 c_n 和 c_{-n} 的模直接反映了 n 次谐波振幅的大小. 因为 n 次谐波

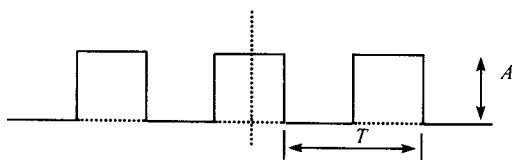
$$a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t = A_n \sin(n\omega t + \phi_n),$$

其中, 振幅 $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$; 相角 $\phi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n}$, 而且复数形式中, n 次谐波是指

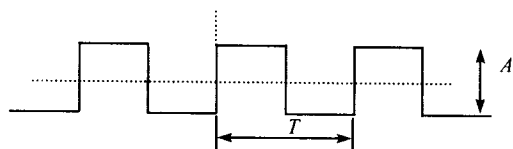
$c_n e^{jn\omega t} + c_{-n} e^{-jn\omega t}$, 其中 $c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$, $c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$, 所以有

$$|c_n| = |c_{-n}| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{A_n}{2}. \quad (1-7)$$

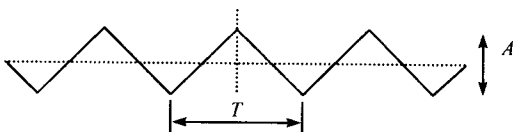
4. 若干图示函数(信号)的傅里叶级数表(图 1-1)



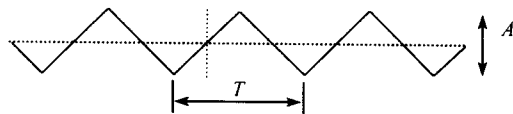
$$\frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left(\cos \omega t - \frac{\cos 3\omega t}{3} + \frac{\cos 5\omega t}{5} - \dots \right)$$



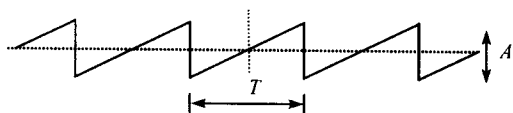
$$\frac{2A}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right)$$



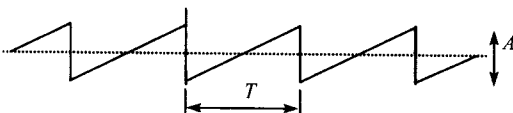
$$\frac{4A}{\pi^2} \left(\cos \omega t + \frac{\cos 3\omega t}{3^2} + \frac{\cos 5\omega t}{5^2} + \dots \right)$$



$$\frac{4A}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{\sin 3\omega t}{3^2} + \frac{\sin 5\omega t}{5^2} - \dots \right)$$



$$\frac{A}{\pi} \left(\sin \omega t - \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} - \dots \right)$$



$$-\frac{A}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \dots \right)$$

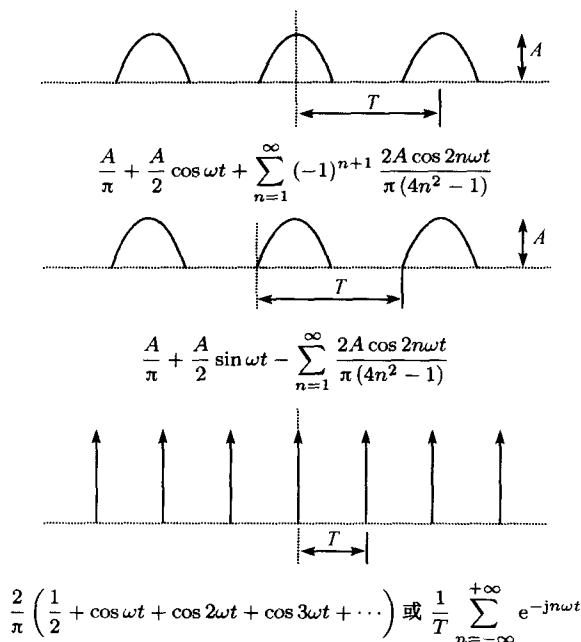


图 1-1 常见周期函数的傅里叶级数表

1.1.2 傅里叶积分

傅里叶级数是对周期信号进行频率分析的有效工具, 它以角频率 $n\omega$ ($n = 1, 2, \dots$) 为横坐标, 分别以振幅 A_n 和相角 ϕ_n 为纵坐标作图, 形成幅频图和相频图, 从而可以对各次谐波分量加以研究。

由于振幅和相角值仅在 $n\omega$ 点上存在, 所以由傅里叶级数展开式形成离散频谱。位于 $n\omega$ 点的纵坐标值表示第 n 次谐波的振幅或相角, 该谐波的频率是基波频率 ω 的 n 倍, 相邻谐波之间的间隔为 ω ($\omega = 2\pi/T$)。图 1-2 所示的周期性矩形波, 宽度 τ 保持不变, 而周期 T 增加时, ω 必然缩小, 离散谱线加密。如果 $T \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow 0$ 时, 离散的频谱就变成了连续频谱。

那么如何对单个脉冲信号进行频谱分析? 如何将它作出类似傅里叶级数的展开呢?

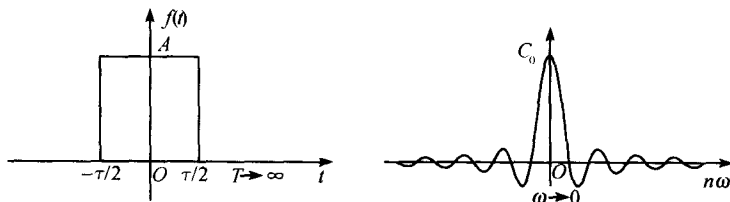


图 1-2 矩形波的谱图

根据上述分析可知, 任何一个非周期函数 $f(t)$ 都可看作是由周期为 T 的函数当 $T \rightarrow \infty$ 时转化而来的. 由傅里叶级数的复数形式可知

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t},$$

其中

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(\tau) e^{-jn\omega\tau} d\tau.$$

得

$$f_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f_T(\tau) e^{-jn\omega\tau} d\tau \right] e^{jn\omega t}.$$

令 $T \rightarrow \infty$, 就可看作为 $f(t)$ 的展开式, 即

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f_T(\tau) e^{-jn\omega\tau} d\tau \right] e^{jn\omega t}.$$

令 $\omega_n = n\omega$, $\Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1} = \frac{2\pi}{T}$, 在 $T \rightarrow \infty$, $\Delta\omega \rightarrow 0$ 的条件下, 积分式 $\int_{-T/2}^{T/2} f_T(\tau) e^{-jn\omega\tau} d\tau$ 的积分上、下限变成 $-\infty$ 和 $+\infty$, $f_T(\tau)$ 变成 $f(\tau)$. 离散的频率分布 $\{\omega_n\}$ 在整个 ω 轴上密布, 变成连续的分布 $\{\omega\}$; 和式又是无限累加的, 因此可以把这一和式看成积分, 即

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega. \quad (1-8)$$

这就是 $f(t)$ 的展开式, 称为傅里叶积分公式. 傅里叶积分存在的条件是函数 $f(t)$ 分段连续, 且在区间上绝对可积.

1.1.3 傅里叶变换的性质和傅里叶变换表

1. 傅里叶正变换

(1-8) 式中, $f(t)$ 是定义在 $(-\infty, \infty)$ 上绝对可积的函数, 无穷积分

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1-9)$$

叫做 $f(t)$ 的傅里叶变换, 常记为 $F(\omega) = F[f(t)]$, $F(\omega)$ 称为 $f(t)$ 的像函数, 是实变量的复值函数; $f(t)$ 称为 $F(\omega)$ 的原函数, 是实变函数.

工程上习惯使用频率 f 为自变量, 因为 $\omega = 2\pi f$, 上述傅里叶变换公式可以写成另一种常用形式, 即

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j2\pi ft} dt. \quad (1-10)$$

2. 傅里叶逆变换

设 $F(\omega)$ 是 ω 的实变量的复值函数, 则无穷积分

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (1-11)$$

称为逆傅里叶变换. (1-11) 式也可以写成

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)e^{j\omega t} df. \quad (1-12)$$

(1-11) 式和 (1-12) 式常记为

$$f(t) = F^{-1}[F(\omega)] \text{ 或 } f(t) = F^{-1}[F(f)].$$

在频率分析中称 $F(\omega)$ 为 $f(t)$ 的谱函数, 又叫做给定的非周期函数 $f(t)$ 的谱特性或谱密度函数. 由于 $F(\omega)$ 是复值函数, 所以具有幅频特性和相频特性.

3. 傅里叶变换的基本性质

通过对变换性质和变换表的讨论, 对原时间函数 (信号) 与其变换之间的关系以及作用在原函数上的各种算子效应的研究很有实用意义.

1) 线性性质

设 a, b 是常数, 若 $F_1(\omega) = F[f_1(t)]$, $F_2(\omega) = F[f_2(t)]$, 则

$$\begin{aligned} F[af_1(t) + bf_2(t)] &= aF[f_1(t)] + bF[f_2(t)] \\ &= aF_1(\omega) + bF_2(\omega). \end{aligned} \quad (1-13)$$

同理有

$$F^{-1}[aF_1(\omega) + bF_2(\omega)] = aF^{-1}[F_1(\omega)] + bF^{-1}[F_2(\omega)].$$

该性质表明, 傅里叶变换完全适用于线性系统分析, 时域上的叠加对应于频域上的叠加.

2) 比例伸缩性质 (相似性质)

设 a 为实常数, 若 $F(\omega) = F[f(t)]$, 有

时间尺度变化:

$$F[f(at)] = \frac{1}{a} F\left[\frac{\omega}{a}\right].$$

频率尺度变化:

$$F^{-1}[F(a\omega)] = \frac{1}{a} f\left[\frac{t}{a}\right].$$

3) 平移性质

若将时间函数 $f(t)$ 沿时间轴平移 $\pm t_0$, 则变换 $F(\omega)$ 需乘以 $e^{\pm j\omega t_0}$, 反之, 若对时间函数 $f(t)$ 乘以 $e^{\pm j\omega t_0}$, 则其变换 $F(\omega)$ 平移于 $\mp \omega_0$, 称为复调制, 即若 $F(\omega) = F[f(t)]$, 则有

$$\begin{aligned} F[f(t \pm t_0)] &= e^{\pm j\omega t_0} F[f(t)] = e^{\pm j\omega t_0} F(\omega), \\ F[e^{\pm j\omega t_0} f(t)] &= F(\omega \mp \omega_0). \end{aligned}$$

信号处理中的细化技术多采用上述复调制性质.

4) 对称性质

如果 $f(t)$ 是偶函数, 则 $F(\omega)$ 也是偶函数; 如果 $f(t)$ 是奇函数, 则 $F(\omega)$ 也是奇函数.

5) 函数曲线下的面积

函数 $f(t)$ 曲线下的面积等于变换 $F(\omega)$ 在零点处的数值, 即有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = F(0). \quad (1-14)$$

反过来, 函数在零点处的值 $f(0)$ 等于 $1/2\pi$ 乘上变换 $F(\omega)$ 曲线下的面积, 即有

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) d\omega. \quad (1-15)$$

虽然这两个面积是不相等的, 但其模的平方下的面积由帕塞瓦尔定理联系起来, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (1-16)$$

6) 乘积与卷积

两个函数之积的傅里叶变换等于这两个函数傅里叶变换的卷积. 反之, 两个函数卷积的傅里叶变换等于两个单独函数的傅里叶变换的乘积, 即若 $F(\omega) = F[f(t)]$ 和 $G(\omega) = F[g(t)]$, 则

$$F[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi} \{F(\omega) * G(\omega)\}, \quad (1-17)$$

$$F[\{f(t) * g(t)\}] = F(\omega)G(\omega). \quad (1-18)$$

从已知的简单函数出发, 通过 (1-17) 式和 (1-18) 式去建立复合函数的变换是很有用的. 例如, 倒谱分析提取目标信号就是利用上述原理.