段子燮 何魯 編著

# 微分學

全一冊

中華書局印行

# 序

吾國自有理科大學以來算學一科所用之書多爲英文原本其間雖不乏良箸然多與吾國學生程度不合且各年採用之書又不能銜接以致學生畢業以後僅得片段之知識而無澈底之了解吾人教學之餘恒思有以補其闕失因編成微分學一書以供吾國大學一年級學生之用凡讀過大代數及解析幾何者卽不致有困難本書製曲綫法一章尤爲詳盡一者可以引起讀者興趣一者可爲習高等解析幾何及高等分析者之充分預備子燮前在成都高等師範時所用講義卽爲此書藍本繼在南京東南大學每年講授皆有增加付梓以前經魯討訂次序遂成此書子燮等自惟譾陋取材遣辭未盡美善所望讀者隨時指正不勝大

幸秦君大鈞慨任校讐尤所感謝

中華民國十六年 段子燮 何魯 同識於南京

# 微分學目次

## 上編

## 微分

## 第十二章　變數代換(98—103)



# 下編

# 微分應用

## 第一章　製曲線法總論(104—108)



## 第二章　於正經緯制之製曲線法(108—127)

# 微分學

## 上　編

# 微　分

## 第一章　應數

### 第一節　定義

如有一數 $x$,吾人能任與以何值者,則稱**變數**;如有兩數 $x$ 與 $y$,凡任與 $x$ 一數值,$y$ 即得一確定之數值,則 $y$ 名爲 $x$ 之**應數**,或稱**函數**,$x$ 又稱**獨立變數**.

在幾何學及物理學上,例題甚多,如圓面積爲其半徑之應數:半徑定,圓面積亦定;半徑不定,其面積亦不定.若以 $y$ 代面積,$x$ 代半徑,依幾何理得

$$y=\pi x^2,$$

以符號表之有

$$y=f(x),$$

讀若 $y$ 等於 $x$ 之應數;反之,亦可謂圓之半徑爲其面積之應數,蓋上式可書爲

$$x=\sqrt{\frac{y}{\pi}}.$$

由此可知,變數與應數可互相更換,又如鐵條之漲縮為熱度之應數,即

$$L_t = L_o(1+\alpha t).$$

$L_o$ 為鐵條在零度時之長,$L_t$ 為在 $t$ 度之長,$\alpha$ 為漲率.

## 第二節 應數分類

在普通數學上,應數可分兩類:一為**代數應數**;二為**超然應數**,玆分列如下:——

(一) 代數應數:

(a)多項式應數

$$y = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + \cdots + l.$$

(b)乘式應數

$$y = (ax^m + bx^{m-1} + \cdots)(\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \cdots).$$

(c)分數式應數

$$y = \frac{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \cdots}{\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \cdots}.$$

(d)無理式應數

$$y = \sqrt[p]{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \cdots}.$$

($m, n, p$ 均為整數, $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma$ 等為任意數)

(二) 超然應數:

(e)指數應數

$$y = a^x \qquad y = e^x$$

(f)對數應數

$y = lo_{J_a}x$;　$y\ Lx$.

(*g*)圓應數,反圓應數

$y = \sin x$;　$y = \mathrm{arc}\,\sin x$.

$y = \cos x$　$y = \mathrm{arc}\,\cos x$.

$y = \tan x$;　$y = \mathrm{arc}\,\tan x$.

$y = \cot$ ;　$y = \mathrm{arc}\,\cot x$.

..............　......................

(*h*)雙曲線應數,反雙曲線應數

$y = \sinh x$;　$y = \mathrm{arc}\,\sinh x$.

$y = \cosh x$;　$y = \mathrm{arc}\,\cosh x$.

$y = \tanh x$;　$y = \mathrm{arc}\,\tanh x$.

..............　......................

## 第三節　單性應數

有一應數$y=f(x)$,若 $x$ 在 $a, b$ 間隔內任得一數值 $\alpha$, $y$ 亦隨之僅有一確定之數值,則 $y$ 爲**單性應數**.例如

$$y = x^3 + 1,\quad y = \sin x,$$

任與 $x$ 以何數值,$y$ 祗有一數值應之,此時無論 $x$ 在何間隔內,$y$ 均爲單性應數.

## 第四節　複性應數

設於 $a, b$ 間隔內,任與 $x$ 以一數值,$y$ 可有若干數值應之,則 $y$ 爲**複性應數**.例如

$$y^2=1-x^2,$$

當$x$在$-1$與$+1$間隔內,任與一數值$x_0$,$y$必有同值異號之兩數值應之,卽

$$y=\sqrt{1-x_0{}^2},\quad y=-\sqrt{1-x_0{}^2},$$

是以$y$非$x$之單性應數.又如

$$y=arc\ sin x,$$

若與$x$一數值,同時$y$可得無窮數值,例如命

$$x=\frac{1}{2},$$

卽有 $$y=\frac{\pi}{6},\quad y=\pi-\frac{\pi}{6},\ldots\ldots$$

在此式中若欲$y$爲單性應數,必先指明$x$當在$-\frac{\pi}{2}$與$\frac{\pi}{2}$之間,或在其他同幅間隔之間亦可.

## 第五節　連應數

凡應數之增量與其自變數增量同時趨進於零者,謂之**連應數**.如有應數 $y=f(x)$, 若與$x$一增量$\Delta x$,$y$亦得一增量$\Delta y$,卽

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x),$$

或 $$\Delta y=f(x+\Delta x)-y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

如當$\Delta x$趨進於零時,$\Delta y$亦爲零,則$f(x)$名爲連應數.

## 第六節　連應數之域

應數有無論何時均爲連應數者,有祗在某間隔內始爲連應數者,此某間隔謂之連應數域.例如$y=sinx$,無論何時均爲連應數,但如$y=\frac{1}{x^2-1}$,必$x$不爲$+1$又不爲$-1$時,方爲連應數.因當$x$將等於$+1$或$-1$時,$x$之增量趨進於零,$y$之增量反等於無窮大.故若欲應數$\frac{1}{x^2-1}$爲連應數,必$x$在$+1$與$-1$二數之間或外.又如應數

$$y=\frac{a^{\frac{1}{x}}+2}{a^{\frac{1}{x}}+1},$$

當$x$由正數趨進於零時,其限爲1;由負數趨進於零時,其限爲2;同一爲零,而所得之數值不同,故欲$y$爲連應數,必除去$x=0$外方可.

# 第二章 紀變數

## 第一節 定義

如有一應數$y=f(x)$,若與$x$任一增量$\Delta x$,$y$亦得一增量$\Delta y$,即

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

若$\Delta y$能與$\Delta x$同時趨進於零,則此應數

卽爲連應數.然當 $\Delta x$ 趨進於零時,此兩增量之比率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

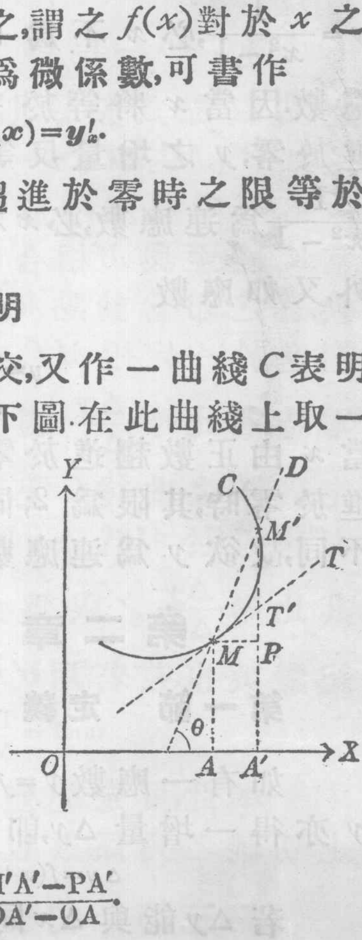
可不爲零,又不爲無窮大,而趨進於一定限.此定限可以 $f'(x)$ 或 $y'_x$ 記之,謂之 $f(x)$ 對於 $x$ 之紀變數,簡稱紀數,或稱爲微係數,可書作

$$\lim_{x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'_x(x)=y'_x.$$

讀若 $\Delta y$ 比 $\Delta x$, 當 $\Delta x$ 趨進於零時之限等於 $f'_x(x)$ 或 $y'_x$.

## 第二節　幾何說明

作 $OX$, $OY$ 兩軸正交,又作一曲綫 $C$ 表明應數 $y=f(x)$ 之變跡,如下圖.在此曲綫上取一點 $M$, 設 $x$, $y$ 爲其經緯量.復在 $M$ 隣近取一點 $M'$,用 $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ 代其經緯量.畫一割綫 $D$, 經過 $M$,$M'$ 二點.命 $\theta$ 代 $D$ 與 $OX$ 軸所成之角,於是有




$$\theta=\angle M'MP.$$

準三角定義得

$$\tan\theta=\frac{M'P}{MP}=\frac{M'A'-PA'}{OA'-OA}.$$

因
$$M'A'=y+\Delta y,\ PA'=y,$$
$$OA'=x+\Delta x,\ OA=x,$$
故
$$tan\theta=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$謂之割綫$D$之角繫數.今設$M$點爲定點,$M'$點爲動點,則當$M'$在曲綫上任意變遷如$M'_1,M'_2,M'_3,$............等時,割綫$MM'$,亦卽以$M$爲樞,任意變遷成$MM'_1,MM'_2,$............等直綫.當$M'$變至與$M$相合時,割綫$MM'$卽變成$MT$綫;換言之,卽當動點$M'$趨進於$M$點時,割綫$MM'$趨進於一定限$MT$,亦卽當$\Delta x$與$\Delta y$趨進於零時,其比率$\frac{\Delta y}{\Delta x}$趨進於一定限也.此定限依定義謂之曲綫$C$上$M$點切綫之角係數.又當$M'$趨進於$M$時,$\Delta x$與$\Delta y$趨進於零,依前所述,其比率$\frac{\Delta y}{\Delta x}$之限爲$y'$或$f'(x)$,卽應數$f(x)$之紀變數也.茲若用$\theta'$代$TMP$角,卽得
$$tan\theta'=\frac{T'P}{MP}=f'(x)=y'_x.$$

準此,可定紀變數者曲綫$y=f(x)$之$M$點上切綫之角係數也.

## 第三節　紀變數求法

例如有應數

$$y=ax^2+bx+c,$$

依前節所論應有

$$y+\Delta y=a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c,$$

卽
$$\Delta y=a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c-y$$
$$=a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c-(ax^2+bx+c),$$

簡之得
$$\Delta y=2ax(\Delta x)+a(\Delta x)^2+b(\Delta x),$$

$\Delta y$與$\Delta x$之比率爲

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2ax+b+a\Delta x.$$

當$\Delta x$趨進於零時,其比率$\frac{\Delta y}{\Delta x}$趨進於一定限$y'$,卽得
$$y'=2ax+b+a\cdot 0,$$

卽
$$y'=2ax+b.$$

茲分述各類求法如次:

(一) 單項式應數之紀變數. 設有應數

$$y=ax^m,$$

依上法得
$$\Delta y=a(x+\Delta x)^m-ax^m$$
$$=a[(x+\Delta x)^m-x^m],$$

準二項式解法得

$$\Delta y=a\left[\frac{m}{1}x^{m-1}(\Delta x)+\frac{m(m-1)}{2!}x^{m-2}(\Delta x)^2\right.$$
$$\left.+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^{m-3}(\Delta x)^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\right],$$

以$\Delta x$除兩端得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a\left[\frac{m}{1}x^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2!}x^{m-1}(\Delta x)+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^{m-3}(\Delta x)^2+\cdots\cdots\right].$$

當 $\Delta x$ 趨進於零時,左端趨進於 $y$, 其右端除第一數 $mx^{m-1}$ 異於零外,以下皆爲零,而有

$$y'=max^{m-1}.$$

卽得公式

$$(1)\begin{cases} y=ax^m, \\ y'=max^{m-1}. \end{cases}$$

於是欲求代數應數單項之紀變數,須將其指數乘其係數,再由其指數減 1.

由此易知常數之紀變數爲零,蓋因如有一常數 $a$, 吾人可將此常數視作 $ax^0$, 依上定理求得其其紀數 $0\cdot ax^{-1}$, 此數應爲零也.

(二) 應數和之紀變數. 假如有多項式連應數如

$$y=ax^m+bx^n+cx^p+dx^q+\cdots\cdots,$$

可命

$$y_1=ax^m,$$
$$y_2=bx^n,$$
$$y_3=cx^p,$$
$$y_4=dx^q,$$
$$\cdots\ \cdots$$

前式卽爲 $y=y_1+y_2+y_3+y_4+\cdots\cdots$.

依(一)所得定理有

$$
\begin{aligned}
y_1' &= max^{m-1},\\
y_2' &= nbx^{n-1},\\
y_3' &= pcx^{p-1},\\
y_4' &= qdx^{q-1},
\end{aligned}
$$

即得
$$y' = y_1' + y_2' + y_3' + y_4' + \cdots\cdots\cdots\cdots.$$

即得公式

$$
(2)\begin{cases} y = ax^m + bx^n + cx^p + dx^q + \cdots, \\ y' = max^{m-1} + nbx^{n-1} + pcx^{p-1} + qdx^{p-1} + \cdots \end{cases}
$$

故知凡多項式之紀變數,等於其各單項之紀變數之和.例如

$$y = x^4 + 3x^3 + x^2 + 1$$

之紀變數為

$$y' = 4x^3 + 9x^2 + 2x.$$

(三)　應數乘積之紀變數.　如有連應數

$$y = (ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \cdots)(\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \cdots),$$

可命

$$
\begin{aligned}
ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \cdots &= u,\\
\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \cdots &= v,
\end{aligned}
$$

則

$$y = uv,$$

$uv$ 應為 $x$ 之連應數.若與 $x$ 任一增量 $\Delta x$, 則 $u$ 與 $v$ 亦各得一增量 $\Delta u$ 及 $\Delta v$, $y$ 亦因之得一增量 $\Delta y$, 應有

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v),$$

即

$$
\begin{aligned}
\Delta y &= (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv\\
&= u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v.
\end{aligned}
$$