

段 子 變 何 魯 編 著

微 分 學

全 一 冊

中 華 書 局 印 行

序

吾國自有理科大學以來算學一科所用之書多爲英文原本其間雖不乏良箸然多與吾國學生程度不合且各年採用之書又不能銜接以致學生畢業以後僅得片段之知識而無澈底之了解吾人教學之餘恒思有以補其闕失因編成微分學一書以供吾國大學一年級學生之用凡讀過大代數及解析幾何者卽不致有困難本書製曲綫法一章尤爲詳盡一者可以引起讀者興趣一者可爲習高等解析幾何及高等分析者之充分預備子燮前在成都高等師範時所用講義卽爲此書藍本繼在南京東南大學每年講授皆有增加付梓以前經魯討訂次序遂成此書子燮等自惟謏陋取材遣辭未盡美善所望讀者隨時指正不勝大

謝所尤警校任慨鈞大君秦幸

南京於識同魯變子何段
中華民國十六年

微分學目次

上 編

微 分

第一章 應數(1—5)

- | | | | |
|-----|------|-----|-------|
| 第一節 | 定義 | 第二節 | 應數分類 |
| 第三節 | 單性應數 | 第四節 | 複性應數 |
| 第五節 | 連應數 | 第六節 | 連應數之域 |

第二章 紀變數(5—25)

- | | | | |
|-----|-----------|-----|------|
| 第一節 | 定義 | 第二節 | 幾何說明 |
| 第三節 | 紀變數求法 | | |
| 第四節 | 超然應數之紀數求法 | | |

第三章 樂爾氏定理及有限增量(25—29)

- | | | | |
|-----|-------|-----|--------|
| 第一節 | 樂爾氏定理 | 第二節 | 有限增量定理 |
|-----|-------|-----|--------|

第四章 高次紀數(29—36)

- | | | | |
|-----|-------|-----|----|
| 第一節 | 定義 | 第二節 | 例題 |
| 第三節 | 來本氏公式 | | |

第五章 戴氏公式及應數展開(36—46)

- | | | | |
|-----|--------|-----|------|
| 第一節 | 戴氏公式 | 第二節 | 應數展開 |
| 第三節 | 尤拉氏之公式 | | |

第六章 不定式之求限法(46—58)

第一節 用馬氏公式展開法

第二節 阿比太爾氏求法

第七章 無窮小(58—66)

第一節 定義

第二節 比率及例解

第三節 等主量無窮小

第四節 結論

第八章 應數含有多數自變數之偏紀數(66—70)

第一節 定義

第二節 例題

第三節 複應數之紀數

第九章 高級偏紀數(70—80)

第一節 定義

第二節 關於高級偏紀數之定理

第三節 純式及尤拉氏定理

第四節 應數含有多數自變數之戴氏公式

第十章 渾應數紀數求法(80—84)

第一節 渾應數含有二自變數之紀數

第二節 渾應數含有多數自變數之紀數

第十一章 微分(84—98)

第一節 一次微分

第二節 渾應數之微分

第三節 應數之應數之微分

- 第四節 複應數之微分 第五節 高次微分
 第六節 應數之應數之高次微分
 第七節 複應數之高次微分
 第八節 渾應數之高次微分
 第九節 全微分 第十節 高次全微分
 第十一節 複應數之全微分

第十二章 變數代換(98—103)

- 第一節 定義 第二節 例題

下 編

微 分 應 用

第一章 製曲線法總論(104—108)

- 第一節 通論 第二節 曲線上之要點
 第三節 曲線之界限

第二章 於正經緯制之製曲線 法(108—127)

- 第一節 對稱軸及對稱點 第二節 切線之角係數
 第三節 極大極小與反曲點之判別
 第四節 曲線之凹凸形及反曲點
 第五節 幾近線
 第六節 改 $f(x, y) = 0$ 方程為 $x = f(t)$, $y = g(t)$ 式或為極經

緯式法

第三章 於極經緯制曲線 $\rho = f(\omega)$ 之製法 (127—135)

- 第一節 對稱軸及對稱點之觀察
 第二節 求切線與線徑間角之切線方程
 第三節 求幾近線 第四節 無極線枝之位置

第四章 曲線之類別與解法及例題 (135—184)

- 第一節 第一類 $y = f(x)$
 第二節 第二類 $x = f(x), y = f(t)$
 第三節 第三類 方程為 $f(x, y) = 0$
 第四節 第四類 可將 $f(x, y) = 0$ 變成為 $x = f(t), y = g(t)$ 者
 第五節 第五類 用輔助曲線及幾近曲線法
 第六節 第六類 高次應數之曲線製法
 第七節 第七類 製極經緯曲線 $\rho = f(\omega)$

第五章 關於平面曲線之各項應用 (184—204)

- 第一節 切線方程式 第二節 切線之方向餘弦
 第三節 正線方程式 第四節 次切線及次正線
 第五節 曲線族之包線
 第六節 平面曲線之曲率及曲率徑
 第七節 於正經緯之曲率及曲率徑
 第八節 曲率徑之中心 第九節 極經緯之曲率徑

微分學

上 編

微 分

第一章 應數

第一節 定義

如有一數 x , 吾人能任與以何值者, 則稱變數; 如有兩數 x 與 y , 凡任與 x 一數值, y 即得一確定之數值, 則 y 名爲 x 之應數, 或稱函數, x 又稱獨立變數。

在幾何學及物理學上, 例題甚多, 如圓面積爲其半徑之應數: 半徑定, 圓面積亦定; 半徑不定, 其面積亦不定。若以 y 代面積, x 代半徑, 依幾何理得

$$y = \pi x^2,$$

以符號表之有 $y = f(x)$,

讀若 y 等於 x 之應數; 反之, 亦可謂圓之半徑爲其面積之應數, 蓋上式可書爲

$$x = \sqrt{\frac{y}{\pi}}.$$

由此可知，變數與應數可互相更換，又如鐵條之漲縮為熱度之應數，即

$$L_t = L_0(1 + \alpha t).$$

L_0 為鐵條在零度時之長， L_t 為在 t 度之長， α 為漲率。

第二節 應數分類

在普通數學上，應數可分兩類：一為代數應數；二為超然應數，茲分列如下：——

(一) 代數應數：

(a) 多項式應數

$$y = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + \dots + l.$$

(b) 乘式應數

$$y = (ax^m + bx^{m-1} + \dots)(\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \dots).$$

(c) 分數式應數

$$y = \frac{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots}{\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \dots}.$$

(d) 無理式應數

$$y = \sqrt[p]{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots}.$$

(m, n, p 均為整數， $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma$ 等為任意數)

(二) 超然應數：

(e) 指數應數

$$y = a^x \quad y = e^x$$

(f) 對數應數

$$y = \log_a x; \quad y = Lx.$$

(g) 圓應數, 反圓應數

$$y = \sin x; \quad y = \arcsin x.$$

$$y = \cos x; \quad y = \arccos x.$$

$$y = \tan x; \quad y = \arctan x.$$

$$y = \cot x; \quad y = \operatorname{arccot} x.$$

.....

(h) 雙曲線應數, 反雙曲線應數

$$y = \sinh x; \quad y = \operatorname{arsinh} x.$$

$$y = \cosh x; \quad y = \operatorname{arcosh} x.$$

$$y = \tanh x; \quad y = \operatorname{artanh} x.$$

.....

第三節 單性應數

有一應數 $y = f(x)$, 若 x 在 a, b 間隔內任得一數值 α , y 亦隨之僅有一確定之數值, 則 y 爲單性應數. 例如

$$y = x^3 + 1, \quad y = \sin x,$$

任與 x 以何數值, y 祇有一數值應之, 此時無論 x 在何間隔內, y 均爲單性應數.

第四節 複性應數

設於 a, b 間隔內, 任與 x 以一數值, y 可有若干數值應之, 則 y 爲複性應數. 例如

$$y^2 = 1 - x^2,$$

當 x 在 -1 與 $+1$ 間隔內,任與一數值 x_0 , y 必有同值異號之兩數值應之,即

$$y = \sqrt{1 - x_0^2}, \quad y = -\sqrt{1 - x_0^2},$$

是以 y 非 x 之單性應數.又如

$$y = \arcsin x,$$

若與 x 一數值,同時 y 可得無窮數值,例如命

$$x = \frac{1}{2},$$

即有

$$y = \frac{\pi}{6}, \quad y = \pi - \frac{\pi}{6}, \dots\dots$$

在此式中若欲 y 爲單性應數,必先指明 x 當在 $-\frac{\pi}{2}$ 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間,或在其他同幅間隔之間亦可.

第五節 連應數

凡應數之增量與其自變數增量同時趨進於零者,謂之連應數.如有應數 $y = f(x)$, 若與 x 一增量 Δx , y 亦得一增量 Δy , 即

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x),$$

或

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

如當 Δx 趨進於零時, Δy 亦爲零,則 $f(x)$ 名爲連應數.

第六節 連應數之域

應數有無論何時均為連應數者，有祇在某間隔內始為連應數者，此某間隔謂之連應數域。例如 $y = \sin x$ ，無論何時均為連應數，但如

$y = \frac{1}{x^2 - 1}$ ，必 x 不為 $+1$ 又不為 -1 時，方為連

應數。因當 x 將等於 $+1$ 或 -1 時， x 之增量趨進於零， y 之增量反等於無窮大。故若欲應數

$\frac{1}{x^2 - 1}$ 為連應數，必 x 在 $+1$ 與 -1 二數之間或

外，又如應數

$$y = \frac{\frac{1}{a^x} + 2}{\frac{1}{a^x} + 1},$$

當 x 由正數趨進於零時，其限為 1 ；由負數趨進於零時，其限為 2 ；同一為零，而所得之數值不同，故欲 y 為連應數，必除去 $x=0$ 外方可。

第二章 紀變數

第一節 定義

如有一應數 $y = f(x)$ ，若與 x 任一增量 Δx ， y 亦得一增量 Δy ，即

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

若 Δy 能與 Δx 同時趨進於零，則此應數

即為連應數。然當 Δx 趨進於零時，此兩增量之比率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

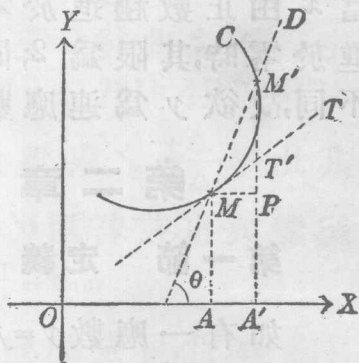
可不為零，又不為無窮大，而趨進於一定限。此定限可以 $f'(x)$ 或 y'_x 記之，謂之 $f(x)$ 對於 x 之紀變數，簡稱紀數，或稱為微係數，可書作

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_x(x) = y'_x.$$

讀若 Δy 比 Δx ，當 Δx 趨進於零時之限等於 $f'_x(x)$ 或 y'_x 。

第二節 幾何說明

作 OX, OY 兩軸正交，又作一曲線 C 表明應數 $y = f(x)$ 之變跡，如下圖。在此曲線上取一點 M ，設 x, y 為其經緯量。復在 M 隣近取一點 M' ，用 $x + \Delta x, y + \Delta y$ 代其經緯量。畫一割綫 D ，經過 M, M' 二點。命 θ 代 D 與 OX 軸所成之角，於是



$$\theta = \angle M'MP.$$

準三角定義得

$$\tan \theta = \frac{M'P}{MP} = \frac{M'A' - PA'}{OA' - OA}.$$

因

$$M'A' = y + \Delta y, PA' = y,$$

$$OA' = x + \Delta x, OA = x,$$

故

$$\tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 謂之割綫 D 之角繫數。今設 M 點爲定點, M' 點爲動點, 則當 M' 在曲綫上任意變遷如 $M'_1, M'_2, M'_3, \dots$ 等時, 割綫 MM' , 亦即以 M 爲樞, 任意變遷成 $MM'_1, MM'_2, \dots$ 等直綫。當 M' 變至與 M 相合時, 割綫 MM' 即變成 MT 綫; 換言之, 即當動點 M' 趨進於 M 點時, 割綫 MM' 趨進於一定限 MT , 亦即當 Δx 與 Δy 趨進於零時, 其比率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 趨進於一定限也。此定限依定義謂之曲綫 C 上 M 點切綫之角係數。又當 M' 趨進於 M 時, Δx 與 Δy 趨進於零, 依前所述, 其比率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 之限爲 y' 或 $f'(x)$, 即應數 $f(x)$ 之紀變數也。茲若用 θ' 代 TMP 角, 即得

$$\tan \theta' = \frac{TP}{MP} = f'(x) = y'_x.$$

準此, 可定紀變數者曲綫 $y = f(x)$ 之 M 點上切綫之角係數也。

第三節 紀變數求法

例如有應數

$$y = ax^2 + bx + c,$$

依前節所論應有

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c,$$

即

$$\Delta y = a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c - y$$

$$= a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c - (ax^2 + bx + c),$$

簡之得

$$\Delta y = 2ax(\Delta x) + a(\Delta x)^2 + b(\Delta x),$$

Δy 與 Δx 之比率爲

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + b + a\Delta x.$$

當 Δx 趨進於零時, 其比率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 趨進於一定限

y' , 即得

$$y' = 2ax + b + a \cdot 0,$$

即

$$y' = 2ax + b.$$

茲分述各類求法如次:

(一) 單項式應數之紀變數. 設有應數

$$y = ax^m,$$

依上法得

$$\Delta y = a(x + \Delta x)^m - ax^m$$

$$= a[(x + \Delta x)^m - x^m],$$

準二項式解法得

$$\begin{aligned} \Delta y = a & \left[\frac{m}{1} x^{m-1} (\Delta x) + \frac{m(m-1)}{2!} x^{m-2} (\Delta x)^2 \right. \\ & \left. + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^{m-3} (\Delta x)^3 + \dots \right], \end{aligned}$$

以 Δx 除兩端得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \left[\frac{m}{1} x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2!} x^{m-2} (\Delta x) + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^{m-3} (\Delta x)^2 + \dots \right].$$

當 Δx 趨進於零時，左端趨進於 y ，其右端除第一數 mx^{m-1} 異於零外，以下皆爲零，而有

$$y' = max^{m-1}.$$

即得公式

$$(1) \begin{cases} y = ax^m, \\ y' = max^{m-1}. \end{cases}$$

於是欲求代數應數單項之紀變數，須將其指數乘其係數，再由其指數減 1。

由此易知常數之紀變數爲零，蓋因如有一常數 a ，吾人可將此常數視作 ax^0 ，依上定理求得其紀數 $0 \cdot ax^{-1}$ ，此數應爲零也。

(二) 應數和之紀變數。假如有多項式連應數如

$$y = ax^m + bx^n + cx^p + dx^q + \dots,$$

可命

$$y_1 = ax^m,$$

$$y_2 = bx^n,$$

$$y_3 = cx^p,$$

$$y_4 = dx^q,$$

$$\dots \dots \dots$$

前式即爲 $y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \dots$

依(一)所得定理有

$$y'_1 = m a x^{m-1},$$

$$y'_2 = n b x^{n-1},$$

$$y'_3 = p c x^{p-1},$$

$$y'_4 = q d x^{q-1},$$

即得 $y' = y'_1 + y'_2 + y'_3 + y'_4 + \dots$

即得公式

$$(2) \begin{cases} y = a x^m + b x^n + c x^p + d x^q + \dots, \\ y' = m a x^{m-1} + n b x^{n-1} + p c x^{p-1} + q d x^{q-1} + \dots \end{cases}$$

故知凡多項式之紀變數，等於其各單項之紀變數之和。例如

$$\begin{aligned} y &= x^4 + 3x^3 + x^2 + 1 \\ \text{之紀變數爲} \quad y' &= 4x^3 + 9x^2 + 2x. \end{aligned}$$

(三) 應數乘積之紀變數。如有連應數

$$y = (a x^m + b x^{m-1} + c x^{m-2} + \dots)(\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \dots),$$

可命

$$a x^m + b x^{m-1} + c x^{m-2} + \dots = u,$$

$$\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \dots = v,$$

則

$$y = uv,$$

uv 應為 x 之連應數。若與 x 任一增量 Δx ，則 u 與 v 亦各得一增量 Δu 及 Δv ， y 亦因之得一增量 Δy ，應有

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v),$$

即

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv$$

$$= u \Delta v + v \Delta u + \Delta u \Delta v.$$