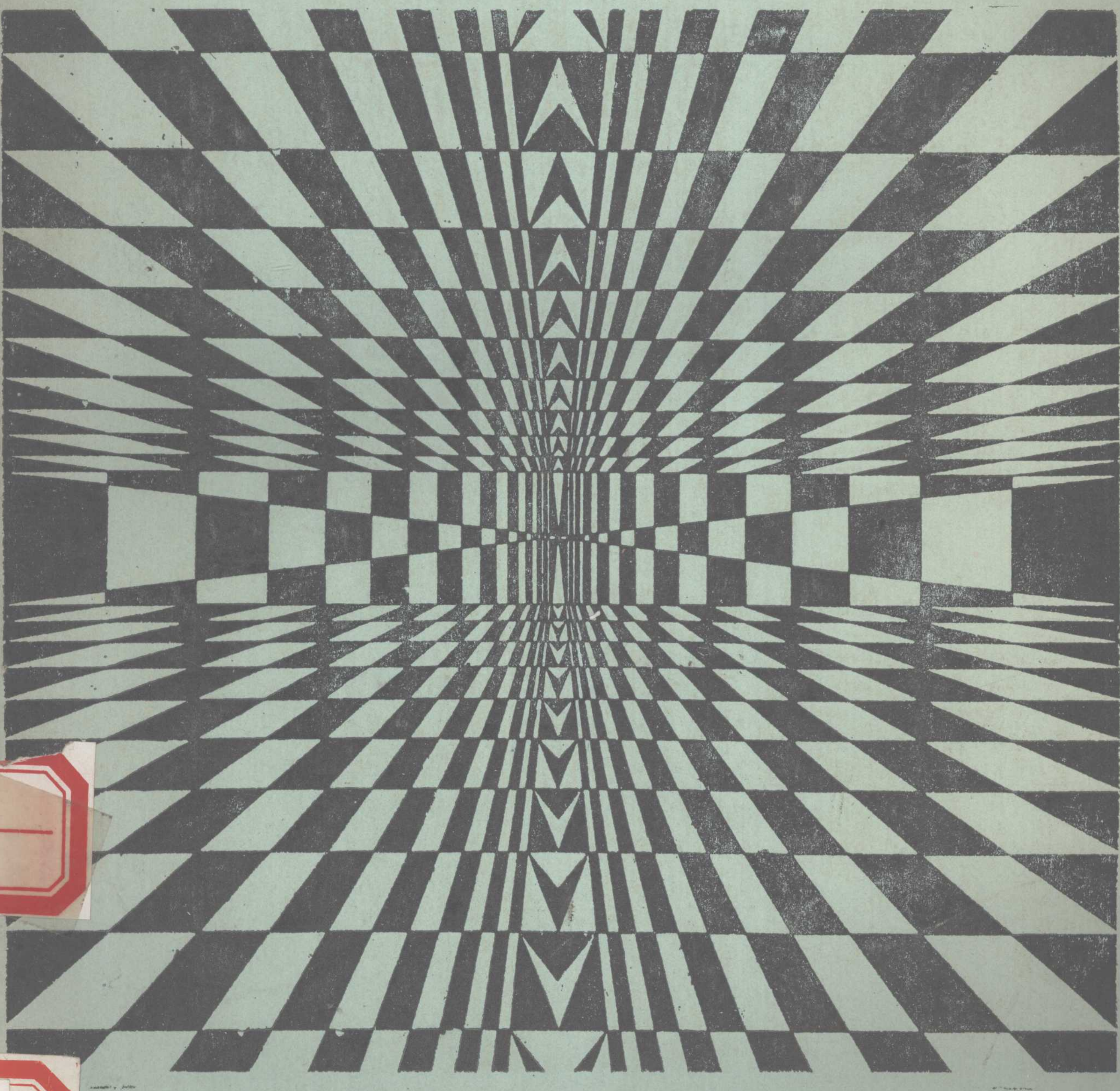
HUAN JING TONG JI XUE

环境统计学

程胜高 编



中国地质大学出版社

环 境 统 计 学

程胜高 编

中国地质大学出版社

内 容 简 介

本书主要内容为：线性代数计算基础、概率与理论分布、环境统计基础、多元分析及质量控制在环境保护中的应用等几部分，章后配有适量的习题。本书以实用性为主，力求突出数理统计在环境科学中的应用，在编写上力求深入浅出，循序渐进，通俗易懂。

本书可作为高等专科学校环境监测、环境管理及环境工程专业的教材，也可供环保部门专业技术人员参考。

环 境 统 计 学

程胜高 编

责任编辑 方 莉

中国地质大学出版社出版、发行

华中理工大学第二印刷厂印刷

开本787×1092 1/16 印张11.75 字数293千字

1988年12月第1版 1988年12月第1次印刷

印数1—2000册 定价3.50元

ISBN 7-5625-0236-6/X·1

序

环境统计是环境专业人员从事环境监测与管理等日常工作和科学研究中不可缺少的工具。在环境科学从定性走向定量化的过程中，环境统计学起着重要的作用。它在各个环境学科中均有着广泛的应用。具体说来，人们运用环境统计学能够制定合理的环境调查与监测计划或方案、以最少的人力、物力和时间获得最好的效果；能够比较环境现象与事物的特征并建立适当的数学模型，以对环境质量进行有效的评价和预测；能够控制采样与分析质量，保证为环境科学提供准确而有价值的数据、以便能进行区域性乃至全球性的比较等等。因此，掌握和运用环境统计学的基本知识和方法，可以更有成效地从事环境保护工作。

黄石大学自从一九八一年开设环境保护专业以来，先后编写了一部分环保专业教材，环境统计学是其中之一。在该校，环境统计学是环境专业学生必修的一门专业基础课程。鉴于目前尚无全国统编的《环境统计学》大专教材，该校环境保护系教师于一九八五年编写了这本《环境统计学》，经过该校内部四年试用，现予以修改补充，由中国地质大学出版社正式出版。希望本教材的出版能为普及和推动环境统计学，进而为发展我国的环境保护事业做出微薄的贡献。

徐幼云

一九八八年十一月于武汉

前　言

《环境统计学》是为高等专科学校环境监测、环境管理及环境工程专业而编写的教材。亦可供各级环保部门专业技术人员自学参考。为此，本教材内容以实用性为主，力求突出数理统计在环境科学中的应用，避免繁杂的数学推导。内容深入浅出，循序渐进，通俗易懂。并在各章后附有习题，它对熟悉和掌握本门课程是必要的。

环境统计学课程的教学要求是使学生掌握环境统计学的基本原理及计算方法，并掌握一定的分析问题和解决问题的能力。教材分为三大部分：一是预备知识部分，即“线性代数计算基础”和“概率与理论分布”，这是为学习后续内容而设置的；二是环境统计基础部分，它是环境专业学生必须掌握的知识；三是多元分析及质量控制在环境保护中应用的部分，它是兼顾本学科今后的发展而安排的内容。

本教材是在1985年编写的《环境统计学》讲义的基础上，经过几次补充修订而成的。在教材定稿过程中，得到了黄石职业大学副校长吴南臣副教授和环保系系主任刘大银副教授等同志的大力支持和帮助；中国地质大学数学地质教研室胡旺亮副教授细心审阅了原稿；黄石职业大学数学副教授朱章老师审阅了第二章和第四章内容；环境监测干部专修科86级学员做了大量的誊写、校对工作；还有很多老师和同学给予了种种帮助，谨在此一并致以衷心的感谢。

最后，特别感谢中国爱委会改水项目办公室顾问徐幼云高级工程师为本书作序。

由于编者水平所限，书中定有许多不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

一九八八年十一月二十日

于黄石大学

目　录

第一章 绪 论

第一节 环境统计与环境统计学的概念

环境统计包含环境统计工作、环境统计资料和环境统计学三方面的意义。具体的说，环境统计是用数字反映并计量人类活动引起的环境变化和环境变化对人类的影响。因此，环境统计是以环境为研究对象，它所统计的范围涉及到人类赖以生产和生活的全部条件，包括影响生态系统平衡的各个因素及其变化所带来的后果。1977年联合国统计司提出环境统计范围应包括土地、自然资源、能源、人类居住区和污染等五个方面。

环境统计学是环境统计的一个方面。环境统计学通常指数理统计在环境科学中的应用。它是根据数理统计的原理和方法，来分析和解释环境学中各种现象和数量资料的科学。

人们在从事环境科学研究时，往往是通过某事物的一部分来估计认识事物整体的特征的。例如：对于大气环境质量的监测，无论从时间上，还是空间上都不可能全部监测记载，而只能采用抽样的方法，计算一部分样品的统计量，来估计大气污染参数。

在环境监测、环境管理的日常工作中，无论是监测采样，样品分析，还是制定工作大纲，总结工作经验及撰写科研论文，均需要有计划地收集资料及合理的统计分析。因此，环境统计学是环境保护工作者必须学习和掌握的重要学科之一。

第二节 环境统计学的主要内容和特点

开设本课程的目的，是给环境监测，环境管理及环境工程专业学习后续的专业课（如环境监测、环境质量评价等课程）打好基础。

环境统计学研究的对象是那些有变异规律及特征的事物。由此，环境统计学的基本内容主要包括社会环境统计学与数理环境统计学。

社会环境统计学，隶属社会经济统计的范畴，其主要内容是土地环境统计、自然资源环境统计、能源环境统计、人类居住区环境统计、环境污染统计、环境保护机构自身建设统计等。

数理环境统计学，隶属数理统计的范畴，主要包括环境采样技术，试验设计，环境统计推断三大内容。本课程将侧重介绍数理环境统计学。

从环境统计学原理所研究的内容可知环境统计学具有如下的特点：

一是涉及面广，综合性强。环境统计学研究内容及范围可以说是包罗万象，错综复杂，涉及到各种环境要素及各行各业，故具有很强的综合性。

二是研究对象介于社会和自然之间，技术性强。环境统计学涉及到多学科的内容，要应用各种采样、抽样技术，统计分析方法及开展大量的监测计量工作等。故具有很强的技术性。

三是探索性很强。环境统计学是一门新的学科，尚处在探索发展阶段。如何建立一门具有中国特色的环境统计学科，还有待于环保工作者们共同努力。

第三节　本课程的学习方法

要学好环境统计学，应具备一定的条件。一是要有一定的数学基础知识（一般应具有高中的数学水平）。因为在进行监测、采样、收集整理系统分析资料时，离不开数的运算、处理。而且还要通过一定的数量去表达事物的本质，故应具备一定数学知识，要注意学习和掌握计算器和计算机的应用，它们都是环境统计得力的计算工具；二是对于实际工作者、初学者来说，在学习环境统计方法时，不要去钻研统计的数学原理及推导繁锁的统计公式，而应该注重理解统计学的基本概念及基本原理，掌握统计分析的基本方法。要能熟练地使用各种统计公式，并了解公式的运用条件和正确用法；三是重视边学边用，要多实践，多应用，在使用过程中体会和掌握统计的精髓，不断提高用统计方法去解决和分析问题的能力，推动环境保护工作的发展。

第四节　本学科的发展简况

环境统计学是近20年来伴随着环境保护工作而产生的。最早的环境污染危害统计工作是从1848年英国伦敦的严重水污染事故开始的。这次污染事故导致许多居民患上霍乱，当时的专门机构统计调查，死亡人数达14600人。

随着现代工业的迅速发展和环境污染的日趋严重，60年代初发达国家开始研究环境统计课题。1972年斯德哥尔摩人类环境会议之后，各国相继建立了环境统计制度，以便于运用统计数据对环境状况作出评价。1973年联合国统计委员会和欧洲经济委员会在日内瓦举行了第一次关于研究环境统计资料的国际会议。在这次会上决定编制出版《环境统计手册》，以促进环境统计工作的发展。同年10月，在华沙举行了环境统计学术会议。

我国环境统计工作起步于1979年，环境统计学的兴起在80年代初，到目前为止，我国已初步形成环境统计制度。但对于数理统计如何应用于环境学中还处于探索阶段。随着我国环保事业的蓬勃发展，环境统计学的应用必将日益广泛。

第五节　常用统计术语

一、总体、个体、样本

（一）总体与个体

总体，又称母体，即我们所研究对象的全体叫总体。不同的研究目的决定了各自对应的总体。而且总体往往只是设想的或抽象的。

个体，又称样本点，即所研究的同质总体中的每一个单位叫个体。它可以是一个采集点，一份水样，一个标本，一个样品，一个生产单位等等。

例如，我们研究某条河流的污染状况，那么整个河水称为总体，而我们从该河中取得的一份份水样便是个体。又如我们考察电视机厂某月生产的电视机的质量，那么该月生产的全部电视机就构成一个总体，而每一台电视机就是总体中的个体。

总体可分为有限总体和无限总体。当总体只包含有限个个体时，便称为有限总体，如上例中某月生产的电视机总数是一个有限数，故该总体就是有限总体；当总体包含无限个个体时便称为无限总体，如河流的河水就是无限总体。在环境保护工作中所遇到的总体大多数是无限总体。

总体又分为单项总体与多元总体。例如，当我们研究大气中某项污染物氟的变化规律时，此为单项总体，即单元总体；当我们研究大气中，地面水中，土壤中及植物中氟的迁移转化规律时，为多元总体，即大气，地面水，土壤及植物中氟含量变化各为一个总体。

（二）样本与样本容量

样本，亦称子样，即总体的一部分叫样本。换句话说，样本是从总体中抽出来的部分个体的集合体。

例如：我们要研究长江的水质，不可能将长江的全部水量都取来监测，而只是从长江水中抽出一部分有代表性的水样进行监测。这批水样便是代表总体的样本。样本中所含的个体的数目称为样本容量。而把小于50的样本称为小样本。

要使样本的性质能够充分地反映总体的性质，对样本的选取就有一定的要求：一是样本中各个个体的选取必须具有代表性，不得任意删留；二是样本中各个个体的选取必须是独立的，即各次选取的结果互不影响。三是保证足够的样本容量。

统计学上习惯用希腊字母代表总体参数，用拉丁字母代表样本统计量。

（三）样品与样本，个体之间的区别

样品不等于样本。因为样品是一个实体，而样本是几个数据。

样品也不等于个体。首先，个体是指从“样品”测得的某方面特征的数值。其次，如果对一个“样品”分析了铜、银两元素的含量，则一个“样品”就对应有两个不同类的个体了，即一个铜含量和一个银含量。

二、误差与错误

所谓误差，指的是测定值与真实值之间的差别。误差主要有三种类型，即系统误差，随机误差和抽样误差。

系统误差是指在一定的试验条件下，由某个或某些恒定因素按照确定的一个方向引起的多次测定平均值与真实值的偏差。常见的系统误差有：仪器误差、方法误差、个人误差等。系统误差查明原因后可以校正。

随机误差是指由于偶然因素引起的单次测定值与多次测定值的偏差。因此，随机误差是不可测的，但通过增加观测次数，可在某种程度上减少随机误差。

抽样误差指既使消除了系统误差，随机误差亦控制在允许范围内，而样本均值与总体均值之间仍可能存在着差异。这种由于抽样而引起的差异，在统计原理上称为“抽样误差”。一般说来，样本愈大，则抽样误差愈小，愈和总体接近。

错误是指由于粗心大意所引起的差错，如抄错数字，算错结果等。这些错误只要我们在工作中认真细致是不难克服的。

三、参数与统计量

由总体中所计算出的数值，如总体平均数，总体标准差，总体率等均称为参数。而由样本观测值所计算出的统计数值，则称为统计量，它是总体参数的估计值。

四、准确性与精确性

统计工作是用样本的统计量来推断总体的参数。我们用统计量接近参数真值的程度来衡量统计量的准确性高低；用样本中各个变量间变异程度的大小来衡量该样本的精确性的高低，因此，准确性不等于精确性。准确性是说明测定值对真值的符合程度大小，而精确性却是多次测定值的变异程度。

习　题

1．环境统计学可以研究哪些问题？

2．试举例说明参数与统计量、总体与样本的区别。

3．请练习计算器及计算机的使用方法。

第二章　线性代数计算基础

为了便于理解以后有关章节中讨论的多元统计分析，在这一章中将对线性代数的基础知识作一些介绍。

第一节　行　列　式

一、行列式的概念：

例2-1　求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2=800, & (2\text{-}1) \\ 4x_1+3x_2=900。 & (2\text{-}2) \end{cases}$$

用加减消元法求解：

$$(2\text{-}1)\times 3:\ 2\times 3x_1+5\times 3x_2=800\times 3, \tag{2-3}$$

$$(2\text{-}2)\times 5:\ 5\times 4x_1\times 5\times 3x_2=900\times 5, \tag{2-4}$$

$$(2\text{-}2)-(2\text{-}4):\ (2\times 3-4\times 5)x_1=800\times 3-900\times 5。$$

∵x_1的系数不为零，于是解出：

$$x_1=\frac{800\times 3\text{-}900\times 5}{2\times 3-4\times 5}=150。$$

同理可解出

$$x_2=\frac{2\times 900-4\times 800}{2\times 3-4\times 5}=100。$$

综上可见，x_1 与 x_2 的分母同为 $2\times 3-4\times 5$，将其记为$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$，即$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=2\times 3\text{-}4\times 5$，我们称$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$为二阶行列式，2、5、4、3 叫这个行列式的元素，这四个元素排成二行二列（横排叫行，竖排叫列），$2\times 3-4\times 5$叫这个行列式的展开式。展开式的运算规则如下：左上角与右下角两数相乘取正号，左下角与右上角两数相乘取负号，然后求和。

x_1与x_2 计算式中的分母，写成一个二阶行列式，其元素正好是由方程组变量的各个系数所构成，故称之为系数行列式。一般记系数行列式为D。

按此规定，例2-1中x_1与x_2的分子也可写成行列式的形式：

$$800\times 3-900\times 5=\begin{vmatrix} 800 & 5 \\ 900 & 3 \end{vmatrix}=D_1$$

$$900\times 2-800\times 4=\begin{vmatrix} 2 & 800 \\ 4 & 900 \end{vmatrix}=D_2$$

这里D_1和D_2 分别是由方程组右端常数项800、900取代系数行列式D中第一列元素2，4和第二列中的元素5，3得到的。

于是本例中方程的解为

$x_1 = D_1/D$，$x_2 = D_2/D$，其中$D \neq 0$

二元线性方程组的一般形式为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2。 \end{cases} \tag{2-5}$$

当$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$时，其解为

$$x_1 = D_1/D,\ x_2 = D_2/D,$$

$$其中 D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}。 \tag{2-6}$$

对于含有三个未知量的线性方程组。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3。 \end{cases}$$

用加减消元法可得到三个未知量的解，我们仍引入新的记号，使求解变得非常简明，引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - x_{12}x_{21}x_{33} - x_{13}x_{22}x_{31}。 \tag{2-7}$$

此称为三阶行列式，它是由 $3 \times 3 = 9$ 个元素排成三行三列构成的一个数，且由线性方程组(2-6)变量的系数构成的、故称为系数行列式，并记为"D"。

下面给出线性方程组(2-6)解的行列式表示，当系数行列式$D \neq 0$时，

$$x_1 = D_1/D,\quad x_2 = D_2/D,\quad x_3 = D_3/D。$$

式中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}。$$

二、行列式的性质及计算方法

下面列出的行列式的性质，均未加证明，只写出结论。例子均以三阶行列式为主，但这些性质对二阶行列式及后面的高阶行列式都是成立的。

性质1：把行列式的行改为列，列改为行，而不改变它们原来的次序（称为行列式的转置），行列式的值不变。

例如：
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}。$$

性质2：把行列式的任意两行（或两列）对调，行列式的绝对值不变而符号相反。

性质3：如果行列式中有两行（或两列）完全相同，则该行列式的值等于零。

性质4：把行列式某行（或某列）的各元素乘以数 k 等于 k 乘以此行列式。

例：
$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}。$$

性质5：把行列式的某行（或某列）中各元素乘以同一数 k，加到另一行（或另一列）的对应元素上，则行列式的值不变。

例：
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+ka_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+ka_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix}。$$

把行列式中某元素 a_{ij} 所在行和列划去，由剩下元素构成低一阶的行列式再乘以 $(-1)^{i+j}$ 称为行列式中 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij}。

例：
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}。 \qquad (2\text{-}8)$$

则元素 a_{22} 和 a_{23} 的代数余子式为：
$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$
$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

利用以上性质，可将行列式的计算简化，从而可以很快地求出行列式的值。

例2-2：利用行列式的性质计算：
$$D = \begin{vmatrix} 9 & 18 & 21 \\ 4 & 8 & 5 \\ 10 & 20 & 1 \end{vmatrix},$$

解：
$$D = 3\begin{vmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 5 \\ 10 & 20 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 6-3 & 7 \\ 4 & 8-4 & 5 \\ 10 & 20-10 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 4 & 4 & 5 \\ 10 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

第一步是将第一行的公因数 3 提到行列式外边，第二步是将第一列乘 (-1) 加到第二列上，第三步是因为第一列与第二列对应元素相等，所以等于零。

我们可以将行列式按任一列（或任一行）展开。

性质6：行列式可按某行（列）展开，按行展开为：
$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

$$D=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23},$$
$$D=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}。$$

若按列展开，三个列的展开式分别为：

$$D=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31},$$
$$D=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32},$$
$$D=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}。$$

例2-3：用降阶展开法计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}4 & -3 & 1\\ 2 & 5 & 3\\ 1 & 4 & -2\end{vmatrix}=4\times\begin{vmatrix}5 & 3\\ 4 & -2\end{vmatrix}-2\times\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 5 & 3\end{vmatrix}$$

$$=4\times(-22)-2\times2+(-14)=-106$$

三、n阶行列式

我们称记号

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

为n阶行列式或称高阶行列式。其中数$a_{ij}(i=1,\ 2,\ \cdots n;\ j=1,\ 2,\ \cdots n)$是第$i$行第$j$列的数（称为元素），共$n^2$个。$n$阶行式列表示其中所有不同行不同列的元素乘积的代数和$\Sigma(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$*，具体计算时，可以运用行列式的各条性质使计算变得简便。如适用性质6可以将n阶行列式分解为二、三阶行列式进行计算。

以下介绍用n阶行列式解n元线性方程组的方法。n元线性方程组的表达式为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\ ,\\ \cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\ 。\end{cases}\qquad(2\text{-}9)$$

例2-4：解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-2x_2+3x_3-4x_4=6\\ 2x_1+2x_2-x_3+x_4=5\\ x_1-2x_2\qquad\quad+x_4=-1\\ 3x_1-4x_2+5x_3-2x_4=4\end{cases}$$

解：首先计算方程组的行列式，

*：其中$p_1p_2\cdots p_n$为自然数1，2，…n的一个排列；t为这个排列的逆序数；Σ表示对1，2，…，n所有的排列求和。关于排列和逆序，可参看一般的线性代数教材。

$$D=\begin{vmatrix}2 & -2 & 3 & -4\\ 2 & 2 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 0 & 1\\ 3 & -4 & 5 & -2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2 & -1 & 3 & -4\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 3 & -2 & 5 & -2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2 & 1 & 3 & -6\\ 2 & 3 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 5 & -5\end{vmatrix}$$

$$=2\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 3 & -6\\ 3 & -1 & -1\\ 1 & 5 & -5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1 & 3 & -6\\ 0 & -10 & 17\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-10 & 17\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-88,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}6 & -2 & 3 & -4\\ 5 & 2 & -1 & 1\\ -1 & -2 & 0 & 1\\ 4 & -4 & 5 & -2\end{vmatrix}=-176,\quad D_2=\begin{vmatrix}2 & 6 & 3 & -4\\ 2 & 5 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 3 & 4 & 5 & -2\end{vmatrix}=-88,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2 & -2 & 6 & -4\\ 2 & 2 & 5 & 1\\ 1 & -2 & -1 & 1\\ 3 & -4 & 4 & -2\end{vmatrix}=0,\quad D_4=\begin{vmatrix}2 & -2 & 3 & 6\\ 2 & 2 & -1 & 5\\ 1 & -2 & 0 & -1\\ 3 & -4 & 5 & 4\end{vmatrix}=88,$$

于是得线性方程组的解为：

$$x_1=D_1/D=2,\qquad x_2=D_2/D=1,$$
$$x_3=D_3/D=0,\qquad x_4=D_4/D=-1。$$

一般地，当方程组（2-9）的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\ \cdots & \cdots\cdots\\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0$$

时，方程组（2-9）有唯一解：$x_1=\dfrac{D_1}{D}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}$，…，$x_n=\dfrac{D_n}{D}$。这里$D_i(i=1,2,\cdots,n)$是将D的第i列元素换成常数项b_1，b_2，$\cdots b_n$得到的行列式。此种求解方法称之为克莱姆法则。

第二节 矩 阵

一、矩阵的概念

把$m\times n$个数排成m行n列的数表

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots a_{mn}\end{pmatrix},$$

便称为$m\times n$型矩阵，一般用大写拉丁字母A，B等表示，其中a_{ij}叫做矩阵第i行第j列元素。

在实际工作中，我们经常遇到矩阵，只不过没给它冠以矩阵这个名称而已。例如，在考