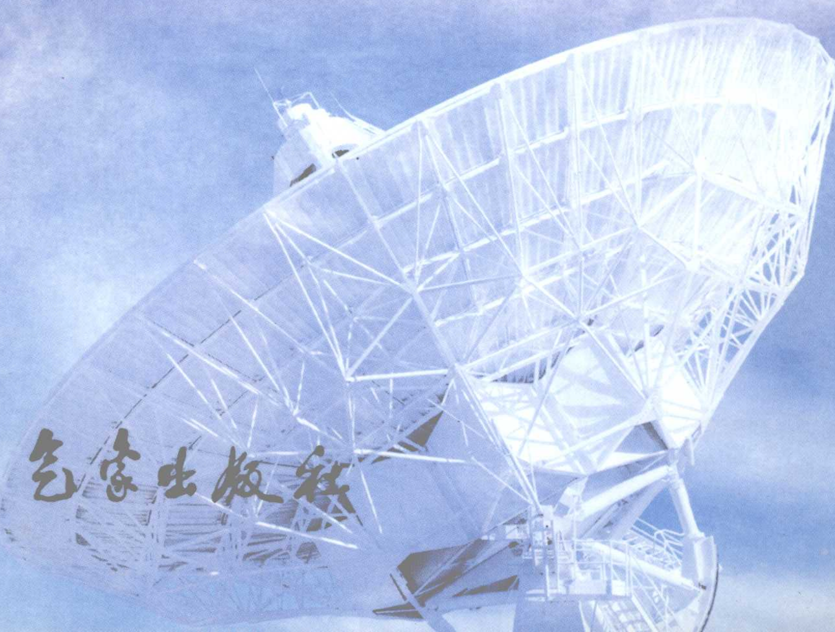
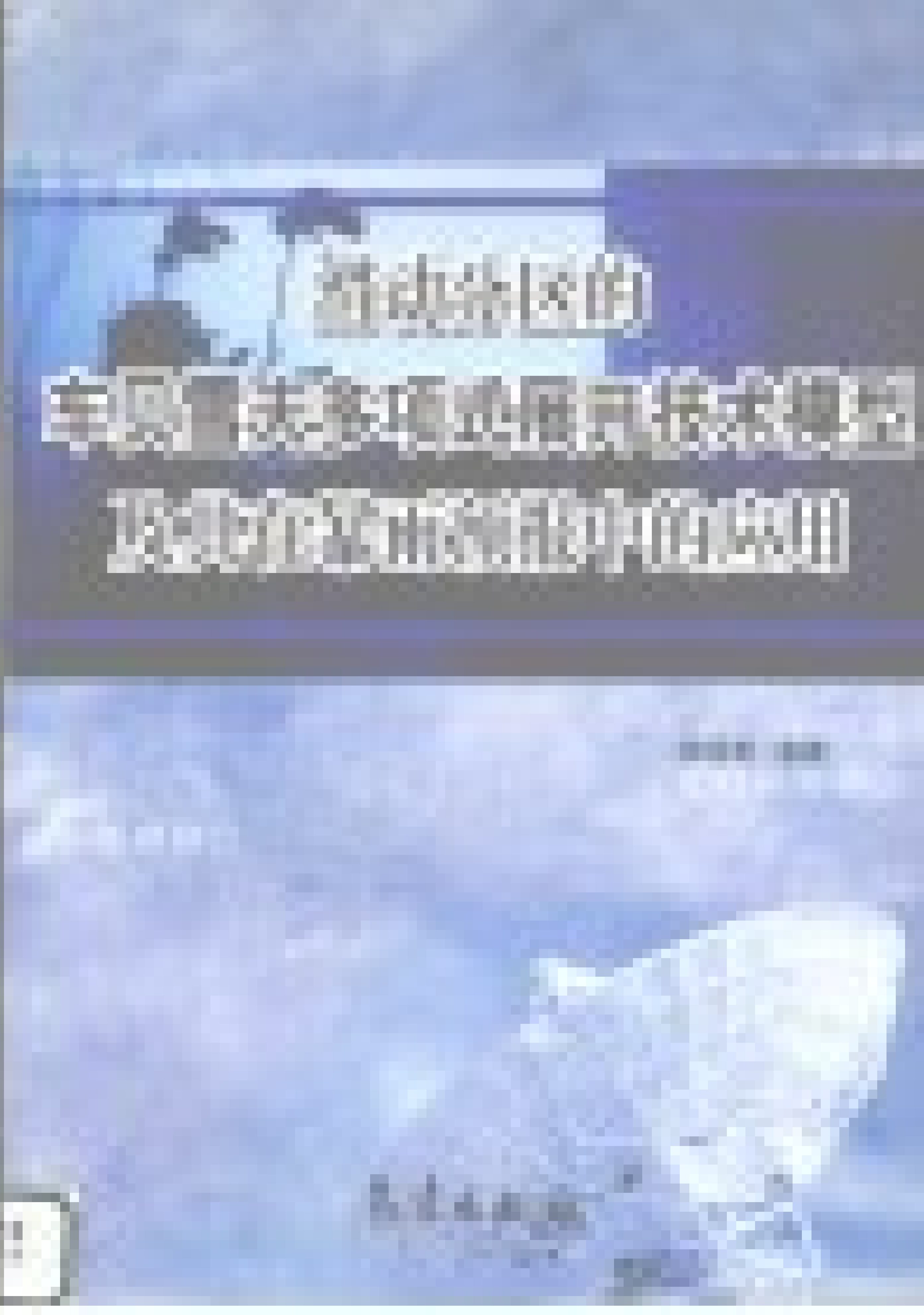
滑动分区的车贝雪夫多项式展开技术模型及其在暴雨预报中的应用

张明席　等著



气象出版社



滑动分区的
车贝雪夫多项式展开技术模型
及其在暴雨预报中的应用

张明席
罗昌荣　刘爱鸣　邹　燕　黄永玉
刘瑞文　杨　晖　陈德汶　王建治　著
朱应珍

气象出版社

内容简介

本书在概要而系统地阐明车贝雪夫多项式基本知识的基础上，介绍了多项式的通用化整计算原理与实用算案，推出了气象资料的信息化处理与信息应用分析的一种方法——“滑动分区的车贝雪夫多项式展开技术模型”及基于该技术模型的预报技术研制系统。

本书可供相关专业的研究人员、院校师生和众多气象台站的广大天气预报工作者阅读与参考。

图书在版编目(CIP)数据

滑动分区的车贝雪夫多项式展开技术模型及其在暴雨预报中的应用/张明席等著．—北京：气象出版社，2003.8

ISBN7-5029-3603-3

Ⅰ．滑…　Ⅱ．张…　Ⅲ．车贝雪夫多项式—应用—暴雨—天气预报　Ⅳ．P457·9

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 072392 号

滑动分区的车贝雪夫多项式展开技术模型

及其在暴雨预报中的应用

张明席　等著

责任编辑：李太宇　寇红薇　终审：黄润恒　周诗健

*　*　*

气象出版社出版

http://cmp.cma.gov.cn E—mail:qxcbs@263.net

(北京市海淀区中关村南大街 46 号　邮编：100081　电话：68406262)

北京市金瀑印刷有限责任公司印刷

新华书店总店北京发行所发行　全国各地新华书店经销

开本：787×1092　1/16　印张：16.5　字数：420 千字

2003 年 8 月第一版　2003 年 8 月第一次印刷

印数：1～800　定价：40.00 元

ISBN 7-5029-3603-3/P·1277

序　一

天气气候与经济建设、社会发展的关系日益密切。全面建设小康社会对天气气候预报预测工作提出了新的更高的要求。天气预报准确率不高，预报技术、预报方法、预报系统等“软件”开发的不足，已经制约着整个气象事业的发展。如何面向国家需求，面向世界科技发展前沿，依靠科技进步和创新，进一步提高气象工作的科技内涵，提高天气气候预报预测准确率和服务能力，已成为当今广大气象科技工作者光荣的历史责任。

当今大气科学已越来越向精确化、定量化并与物理、数学、化学等学科交叉融合方向发展，数学物理在大气科学中的应用也越来越深入。通过应用基础研究、新技术开发、业务试验，不断改进数值预报模式、预报方法和预报模型，实现天气预报的定时、定点、定量和精细化，已成为当今广大气象科技工作者应尽的历史任务。

这部专著正是在上述背景下出版问世的，是以张明席正研级高级工程师为代表的广大气象科技工作者孜孜不倦地求索、创新，认真努力地工作的结果。这部专著深入浅出地概述了车贝雪夫多项式的基本原理、化整计算的方法、滑动分区的展开技术模型和信息分析与集成技术，介绍了技术模型在我国南方暴雨短期预报中应用实例和技术流程的设计，还提出了技术模型在多领域推广应用的若干见解。全书自成体系，章与章之间既相对独立，又互相联系，同时还兼顾了在天气预报业务中的应用；既考虑到从事气象科研、教学工作人员的阅读，又顾及到广大气象台站预报工作者的理解和应用。这部专著的主要作者将自己潜心近20年的研究成果和在江西、福建等省气象台站应用中积累的宝贵经验总结凝炼出来，奉献给我国广大天气预报业务和科研工作者，体现了主要作者对促进气象科研与业务有机结合、提高我国天气预报业务技术水平的贡献和期望。在此，我谨表示深深的谢意。

我相信，在本书的引领下，未来将会有更多的科技工作者总结自己长期研究的成果和实践经验奉献给广大的读者，为我国气象事业再上新台阶作出新贡献。

郑国光

2003年3月于北京

* 郑国光，中国气象局副局长，研究员，博士

序　二

这是一部系统论述应用经典的车贝雪夫多项式及作者潜心研究的改进算式于暴雨等强天气预报技术的专著。在当今预报员们关注于数值预报及其释用技术研究而使得曾经风行一时的多项式相关应用研究日见式微之际，此书可以说是别具一格且使人耳目一新的力作。

书的主要作者是我省正研级预报专家，从事天气预报和气象科研多年，笔耕不缀，多有建树。本书集其十多年专题研究所凝聚之心得，立论严谨，分析精辟，推陈出新，颇有创意地构造了“滑动分区的车贝雪夫多项式展开技术模型”及基于该技术模型的预报制作系统，并实际应用于福建省每年五至六月的前汛期区域性暴雨和单站暴雨的客观预报，进行分析建模，检验预报效果，两者皆成效卓然。这种研用结合的推介，是本书一大特色。这不仅加深了读者对该技术方法的理解，也表达了作者努力推广科研成果于提高暴雨预报准确率的真诚心愿。

在实现气象现代化“四个一流”的进程中，“一流的技术”始终是气象工作必须与时俱进的奋斗目标和气象工作者向社会提供优质气象服务的基础。本书的出版，无疑将为天气预报技术的百花园地增添一枝引人注目的新葩。有了这许多的老枝新株，我们的伟业才能万紫千红捧出春。

2003年2月

---

* 杨维生，福建省气象局局长，大气探测高级工程师

前　言

1985 年我有幸应邀到无锡参加江苏省气象科学研究所的一个课题鉴定会。从鉴定材料中,我了解到当时国内正在热火朝天地推广应用车贝雪夫多项式的信息,也看到了这项技术在天气预报研究中的应用价值。

很巧的是,回来后就有一个关于暴雨预报技术研究课题由我承接。于是乎,我就把多项式技术引了进来,并取赣州、宜春两地做为试验。就这样,我和多项式结下了不解之缘。

缘是结了,但开初的情况并不如意。由于当时对这门技术的特性了解不深,引用只限于生搬硬套,结果使课题研究一度陷于困境,不管引入多少要素来做展开计算,就是找不出关系好的因子,就是归纳不出满意的两地预报方法。一时间,“多项式”成了手中的一个“烫手的山竽”,取也不是,舍也不是。

问题出在哪里?通过查阅相关资料并进行分析,我们从文献《中国之暴雨》(陶诗言著)中得到了关键性的启发。文中指出:暴雨是在多种尺度的天气系统相互作用,相互制约下产生的。其中,在大尺度(或次天气尺度)系统相互作用中产生的中小尺度系统则是触发暴雨的直接因素。

由此可知,基于天气学原理的暴雨预报技术研究的首要是必须解决多尺度影响系统的客观表征问题。只有能客观反映出暴雨的生成环境特征时,才可能言及预报问题。

如此看来,问题可能是由于原先只在一个凭经验选定的大尺度场(即书中所称的“基本场”)上做展开计算的方法(即书中所称的“单一场展开方式”)存有不妥而引出的。显然,因为展开系数所表征的特征分布权重是相应于整个展开场而言的,即它只有平均意义。所以,这样的展开计算,不能一举将大尺度场上客观存在的多尺度信息全面客观地表征出来,也就不能客观反映出暴雨的生成环境特征。因此,自然难以得到与预报量关系密切的因子。

为此,我们进行了多分区展开的试验,把原来的大尺度场划分为东、西、南、北、中五个互有覆盖而又不重合的,尺度不同的次尺度场,再分别逐场地作展开计算,结果取得了出人意料的好的效果,只用了三层高度场资料做展开,就完成了建立两地预报方法的目标。

后来,我们以同样的方法去进行“85-906-06-01”所属课题的研究,同样取得了好的效果。这使我们感到,多分区展开可能是改进多项式应用的一种有效途径。于是,便开始对此进行探索,以分析“其所以然”,并逐渐总结出一套相应的预报分析与制作流程。

2000 年,我在已多年不从事直接的天气预报研究的无奈之中,意外峰回路转,有了系统检验这套基本成型的制作流程的机会。我将这套制作流程再作完善后,完整地移用到“福建省前汛期区域性暴雨客观预报技术研究”课题中来,并请福建省建阳市气象台黄永玉等人,也以这种制作流程进行单点的暴雨客观预报技术研究的首次试验。结果也都取得较令人满意的效果(参见书中第 5 章)。

这使我们真切地看到这套制作流程的实用价值,觉得有必要将它系统性地总结出来,以资大家检验。于是就将以往发表和即将发表的摸索结果综合起来,整理成冠名为《滑动分区的车贝雪夫多项式展开技术模型及其在暴雨预报中的应用》一书。

可以说,滑动分区展开技术模型的提出,并非是“空穴来风”,而是在克服“单一场展开方

式”不合理性，改进多项式的应用手段的实践中应运而生的产物。

关于车贝雪夫多项式的应用研究，其实已是一个很老的“话题”了。这种研究，在国外，早在1948年就开始了。在我国，那也是上一世纪60年代的事呢。第一个“吃螃蟹”者即是知名学者，气象界前辈张家诚。1963年，他以“用车贝雪夫多项式研究月平均500 hPa等压面位势场的初步结果”一文开道，将车贝雪夫多项式引进了国门。

多项式的应用研究，在我国曾经颇受重视，不少上层次的研究家纷至沓来，加入研究行列，取得了很多很有意义的成果。这当中，最具代表性的开创性成果，当属中国科学院大气物理研究所的学者周家斌在1981年提出的关于“不规则格点上的车贝雪夫多项式展开”技术模型(简称为“不规则格点展开模型”)。

人们或许会想起100多年前Fourier(傅里叶)提出热传导分析理论(即常称的Fourier变换)的情景。他在开创这一不朽理论时，采用了一个很简单的改进，即将所研究的资料由按时间排列改为按频率排列。从表面上看，这似乎没什么实质性的创新，可其作用很大。正是这一看来很简单的改变，才使人们得以将各物理量随时间的变化以波动的形式体现出来，从而能以此研究其能量的周期分布特征。也正因如此，Fourier变换成为一个完备的数学理论而被广泛应用于物理学、光学、大气科学等领域。现今广泛使用的频谱诊断技术也都发源于此。

同样，“不规则格点展开模型”也是出自于一个简单的变换：

$$\varXi = FX$$

其实质是，将不规则格点的坐标向量X转换成以格点的序号来表示的，视等距化的格点坐标向量$\varXi$。从表面上看，这仅是对实在场做按其格点的“坐标编号”来重构相应的等距化的“序号空间”场的简单处理而已。然其意义却也乃大。正是这一看来简单的“处理”，使车贝雪夫多项式的应用有理从原先只限于等距格点的禁锢中解放出来，从而使人们能够方便利用资源十分丰富的台站实测气象资料来进行车贝雪夫多项式展开，实现对资料的信息化处理与开发，从而使原先颇具奥秘的车贝雪夫多项式，转眼间成为广大基层台站的气象工作者都能应用自如，得心应手的工具。

“科学的力量取决于大众对它的理解”(培根)。正是“不规则格点展开模型”能为群众性应用车贝雪夫多项式提供方便，1982年，国家气象局才将“车贝雪夫多项式在天气分析和预报中的应用”列为重点科学技术推广项目，从而使20世纪整个80年代的神州大地上，持续涌动着一股“多项式应用研究”热。热潮直接席卷18个省、市，波及农、林、水、气等诸多领域，促成了很多成果，产生了很大的影响。可谓是，其形也大，其势也大。

由此可见，科学技术的创新，那怕是看起来很简单的举措，都能为科学技术向现实生产力(或说“业务能力”)转化，产生巨大的促进作用。

使人有所不解的是，当历史的车轮隆隆滚进20世纪90年代之后，这股“热潮”非但未与时俱进，反而随即出现“急降温”。很显然的事实是，在知名的几家全国性的行业刊物上，此间已少见有关于多项式应用研究的报道。

何也?这除了有“事物的发展是波浪式的”这一规律性在起作用外，更主要的原因可能是人们没有继续找到开发多项式应用潜力的新途径。

我们出版此书的初衷，就是想借此抛砖引玉，与大家交流解决这个问题的出路，以求活跃学术氛围，以求技术的推陈出新。

全书共分七章：

第一章：车贝雪夫多项式原理综述，深入浅出地概述了多项式的各方面知识。此外，还增加入关于多项式的对称性证明和多项式展开系数时间变量的涵义解释。目的，一是为使初次接触多项式的读者在阅读了本章之后，就能较系统地了解到多项式的基本原理，从而能循序渐进地理解全书内容；二是借“前”喻“后”，来体现滑动分区的车贝雪夫多项式展开技术模型的来龙去脉。

第二章：车贝雪夫多项式的化整计算，详尽介绍了作者研究通用化的多项式化整计算方法的全盘结果。它给出了一个结果必为整数值的新的车贝雪夫多项式递推算式及相应的快速约简算法。

第三章：滑动分区的车贝雪夫多项式展开技术模型，阐明了“滑动分区”及“滑动分区展开”的定义，阐述了提出“滑动分区的车贝雪夫多项式展开技术模型”的缘由及其深刻意义。

第四章：滑动分区展开的信息分析与集成技术，具体地介绍了基于滑动分区的车贝雪夫多项式展开技术模型的预报制作系统（简称“制作系统”）的技术构成、特点与功能，当中还详尽给出了一个能较好地适应于“Y 为二值 X 为多级”之数据环境的，有可比性的因子相关测评算式的由来。

第五章：技术模型在暴雨短期客观预报中的应用实例，按“可重复实验”的要求，以翔实的数据、资料为据，介绍了技术模型在福建省暴雨客观预报中的应用过程与实用对比结果。同时还以附录的方式，提供技术模型的初创阶段在其它省、地暴雨短期客观预报中的应用实例。从中可见“制作系统”的形成与优化进程。

第六章：主要技术流程的设计，给出了基于滑动分区的车贝雪夫多项式展开技术模型的预报制作系统中的主要技术构成的软件设计流程，目的是为用户引用本技术模型提供参考与方便。

第七章：技术模型的推广展望，主要是阐明作者对所提出的技术模型在各方面的推广应用前景的若干见解。

书中的新颖之处主要有：

一是改进了多项式的递推算式，从实践上较好地解决了多项式化整计算中所存在的不通用性问题。这一结果可为多项式的实际应用带来计算上的规范化与方便。同样也可为今后编印任意格点数、任意阶数的多项式表带来方便。

二是所提出的“滑动分区的车贝雪夫多项式展开技术模型”不同于通常的“单一场展开方式”。

虽说前者只是改变了展开场的设置方式而已，从表面上看，它也没有在理论上给多项式添加什么新的内涵，但它却导出了一种更合理的信息开发技术。因为它可对要素场的内在信息进行多尺度的极限化的深开发，获取丰富的多种尺度的场信息，从而使客观、有效体现场中要素分布的“微结构”——分布的区域性差异成为可能，从而能更有效识别不同尺度的天气系统及其强度、位置等特征，为预报分析提供更精细的信息支持，促进预报精度的提高。

三是“制作系统”中所提倡的“以因子为本”的预报制作思路，能切实可行地实施对因子及其构成的模型的物理意义的识别，使预报制作过程更具理性和切实，可有效提高预报分析的效果。它应是预报制作观念进化的表现。

仅此而言，本书的出版就将具有一定的现实意义——起码可为人们应用多项式进行预报研究，提供一种可参考的信息开发与信息利用的模型。这将利于多项式非但能在长期预报（短期气候预测）研究中，也能在中尺度灾害性天气的短期预报研究中获得深化应用。

1987 年，在《车贝雪夫多项式及其在气象水文中的应用文集》出版时，气象界的老前辈陶诗言院士在为其所作的序言中就指出："车贝雪夫多项式的研究和应用还有不少可深入发掘的潜力。"

出版此书的另一个初衷，就是想借此来印证前辈的预言的正确性。

我们深信，前辈的话在将来也依然正确。本书的出版绝不是多项式潜力的完结，而仅是多项式潜力"大喷发"前的一个吉祥征兆！只要广大的气象工作者对多项式应用研究持有热度，善于实践，敢于创新，就必能使多项式应用研究的热潮"东山再起，再创辉煌，造福天下"。

人类的社会生活已进入到内容精细化，节奏快速化的境界。人们与天气预报的联系越来越密不可分。天气预报既是气象部门服务于社会的最基本手段，也是社会从气象部门获得回报的最主要途径。

因此，不论是从气象部门自身生存的角度看，还是从社会对气象部门的需求角度看，天气预报都是双方欲得胜数在手而必须十分看重的一个角色。

天气预报要取信于民，法宝只有一个，这就是它要有能适合于人们生产与生活活动的现实需要的准确率。所以，不断提高天气预报准确率，自然是发展气象事业的基本出发点和最终归宿处。

"万事成功出艰辛"。天气预报准确率的提高，不能"天成"，也不会"地就"，只有靠广大气象科学工作者孜孜不倦的求索，创新。

汇涓涓而成江河，纳百川而成大海。只要人人都为预报准确率的提高献出一点"力"，那么，不断提高天气预报准确率，使之不断赶上人们生产与生活活动的现实需要的目标就一定会实现。

我们出版此书的再一个初衷，就是想来为此出点"力"的。

本书的内容大多是探索性的，加之我们的水平很有限，因此其中的错误将是在所难免的。对此，鉴于"当局者迷"的怪圈的作怪，难以一一自省，故唯望专家、行家、读者指点迷津，不吝赐教，吾当不胜感激！

本书是集体创作的结果。愿借出版之机，向参加创作的其他成员致以衷心感谢。尤其要致谢朱应珍——吾之老伴，还以她那纤细而又不失灵巧的双手托起书的计算机录入重担。

特别致谢：中国气象局副局长郑国光博士、福建省气象局杨维生局长为本书的出版作热情洋溢而又极具鞭策力的序。

2003 年 4 月于福州

目　录

第一章　车贝雪夫多项式原理综述

本书将要介绍的“滑动分区车贝雪夫多项式展开模型”的知识基础是车贝雪夫多项式基本原理。

因此，在开篇之始，将首先系统地介绍关于车贝雪夫多项式、车贝雪夫多项式正交展开的原理以及相应的计算公式。

此举之目的，一是为使初次接触车贝雪夫多项式的读者在阅读了本章之后，就能较系统地学习到车贝雪夫多项式、车贝雪夫正交展开的基本知识，从而能循序渐进地阅读、理解本书的内容。因此，在阐述上特别考虑到初学者理解的需要，力求深入浅出，明了易懂；二是借“前”喻“后”来体现滑动分区车贝雪夫展开技术模型的来龙去脉，使全书的内容在结构上能体现出“前呼后应”的关系。

1.1　车贝雪夫多项式

气象上广泛应用的车贝雪夫多项式，其实是 Чебышев 称之为“离散点上的平方内插函数”[1,2]，常称为车贝雪夫正交多项式。

这里仅介绍气象上广泛应用的，定义在等距离散点上的车贝雪夫多项式。

设在 X 轴上的点 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 成等距分布，即是

$$x_{i+1}=x_i+d$$

其中 d 为定值。

不失一般性，取 $x_1=1,d=1$，则有

$$x_1=1,x_2=2,\cdots,x_n=n,$$

简记为：

$$x=1,2,\cdots,n。$$

由 Багров 导出的定义在这样的 n 个离散点上车贝雪夫多项式为[3]

$$\begin{aligned}
&\Phi_0(x)=1;\\
&\Phi_1(x)=x-P_{1,0}\Phi_0(x);\\
&\Phi_2(x)=x^2-P_{2,0}\Phi_0(x)-P_{2,1}\Phi_1(x);\\
&\quad\cdots=\cdots;\\
&\Phi_k(x)=x^k-P_{k,0}\Phi_0(x)-P_{k,1}\Phi_1(x)-\cdots-P_{k,k-1}\Phi_{k-1}(x);
\end{aligned}\tag{1.1}$$

其中

k 称为阶数，$k=0,1,\cdots,n-1$；

$\Phi_k(x)$为 k 阶多项式在点 x 上的值；

$P_{k,j}$为 k 阶多项式的第 j 项的系数，$j=0,1,2,\cdots,k-1$；

令 $\Phi_0(x),\Phi_1(x),\cdots,\Phi_k(x)$满足约束条件：

$$\sum_{x=1}^{n}\Phi_i(x)\Phi_j(x)=0;\qquad i\neq j; \tag{1.2}$$

由此可确定系数 $P_{k,j}$。

以 $\Phi_j(x)$乘 $\Phi_k(x)$，两边对 x 求和，可得：

$$\sum_{x=1}^{n}\Phi_k(x)\cdot\Phi_j(x)=\sum_{x=1}^{n}x^k\Phi_j(x)-\sum_{s=0,s\neq j}^{k-1}P_{k,s}\sum_{x=1}^{n}\Phi_s(x)\cdot\Phi_j(x)-P_{k,j}\sum_{x=1}^{n}\Phi_j^2(x); \tag{1.3}$$

当 $j\neq k$ 时，由(1.2)式可得

$$\sum_{x=1}^{n}\Phi_k(x)\Phi_j(x)=0;$$

$$\sum_{s=0\ s\neq j}^{k-1}P_{k,s}\sum_{x=1}^{n}\Phi_s(x)\Phi_j(x)=0;$$

故得：

$$P_{k,j}=\sum_{x=1}^{n}x^k\Phi_j(x)/\sum_{x=1}^{n}\Phi_j^2(x); \tag{1.4}$$

其中

$$\begin{aligned}&\sum_{x=1}^{n}x^k\Phi_j(x)\\&=\sum_{x=1}^{n}x^{k+j}-\sum_{x=1}^{n}x^j\Phi_{j-1}(x)\sum_{x=1}^{n}x^k\Phi_{j-1}(x)/\sum_{x=1}^{n}\Phi_{j-1}^2(x)\\&-\sum_{x=1}^{n}x^j\Phi_{j-2}(x)\sum_{x=1}^{n}x^k\Phi_{j-2}(x)/\sum_{x=1}^{n}\Phi_{j-2}^2(x)-\cdots-\\&\sum_{x=1}^{n}x^j\Phi_1(x)\sum_{x=1}^{n}x^k\Phi_1(x)/\sum_{x=1}^{n}\Phi_1^2(x)-\frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n}x^j\sum_{x=1}^{n}x^k;\end{aligned} \tag{1.5}$$

右端各项可通过递推算法求出；

$\sum_{x=1}^{n}\Phi_j^2(x)$可按 Чебышев 导出的公式[2]

$$\sum_{x=1}^{n}\Phi_k^2(x)=\Gamma^4(k+1)\Gamma(n+k+1)/\Gamma(2k+1)\Gamma(2k+2)\Gamma(n-k); \tag{1.6}$$

来计算。式中 $\Gamma(x)$为伽玛函数，由其性质

$\Gamma(x+1)=x!$，x 为正整数，

可得：

$$\Gamma(k+1)=k!;$$

$$\Gamma(n+k+1)=(n+k)!;$$

$$\Gamma(2k+1)=(2k)!;$$

$$\Gamma(2k+2)=(2k+1)!;$$

$$\Gamma(n-k)=(n-k-1)!。$$

又∵

$$(2k)!=(2k)!!\,(2k-1)!!$$
$$=2^k\times k!\,(2k-1)!!;$$

这里

$$(2k)!!=2\times4\times\cdots\times2k;$$
$$(2k-1)!!=1\times3\times\cdots\times(2k-1);$$
$$(2k+1)!=(2k+1)\times(2k)!$$
$$=(2k+1)\times2^k\times k!\,(2k-1)!!;$$
$$\frac{(n+k)!}{(n-k-1)!}=\frac{(n+k)(n+k-1)!\,(n-k)}{(n-k-1)!\,(n-k)}$$
$$=(n^2-k^2)\frac{(n+k-1)!}{(n-k)!}$$
$$=(n^2-k^2)\frac{[n+(k-1)](n-k-2)!\,[n-(k-1)]}{(n-k)!\,(n-k+1)}$$
$$=(n^2-k^2)[n^2-(k-1)^2]\frac{(n-k-2)!}{(n-k+1)!}$$
$$=\ldots\cdots$$
$$=n(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots(n^2-k^2);$$

把这些结果代入(1.6)式，得

$$\sum_{x=1}^{n}\Phi_k^2(x)=(k!)^2(2k+1)n\prod_{i=1}^{k}(n^2-i^2)/2^{2k}[(2k+1)!!]^2; \tag{1.7}$$

由(1.6)和(1.7)式可以递推算法求出系数 $P_{k,j}$进而求出各阶多项式的算式。现以求 $\Phi_1(x)$，$\Phi_2(x)$，$\Phi_3(x)$来说明这一求算过程。

$k=1$ 时，$j=0$，须求的系数有

$$P_{1,0}=\sum_{x=1}^{n}x\Phi_0(x)/\sum_{x=1}^{n}\Phi_0^2(x);$$

∵

$$\sum_{x=1}^{n}x\Phi_0(x)=\sum_{x=1}^{n}x=\frac{n}{2}(n+1);$$
$$\sum_{x=1}^{n}\Phi_0^2(x)=n,$$

∴

$$P_{1,0}=\frac{1}{2}(n+1),$$

于是有

$$\Phi_1(x)=x-P_{1,0}\Phi_0(x)$$
$$=x-\frac{1}{2}(n+1); \tag{1.8}$$

$k=2$ 时，$j=0,1$，须求的系数有

$$P_{2,0}=\sum_{x=1}^{n}x^2\Phi_0(x)/\sum_{x=1}^{n}\Phi_0^2(x);$$

$$P_{2,1}=\sum_{x=1}^{n}x^2\Phi_1(x)/\sum_{x=1}^{n}\Phi_1^2(x);$$

∵

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{n}x^2\Phi_0(x)&=\sum_{x=1}^{n}x^2\\&=1^2+2^2+\cdots+n^2\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\ ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{n}x^2\Phi_1(x)&=\sum_{x=1}^{n}x^{2+1}-\sum_{x=1}^{n}x^2\Phi_0(x)\sum_{x=1}^{n}x^1\Phi_0(x)/\sum_{x=1}^{n}\Phi_0^2(x)\\&=\sum_{x=1}^{n}x^3-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\frac{1}{2}n(n+1)/n\\&=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-\frac{1}{12}n(n+1)^2(2n+1)\\&=\frac{1}{12}n(n+1)^2(n-1);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{n}\Phi_1^2(x)&=\frac{(1!)^2\times(2\times1+1)}{2^{2\times1}[(2\times1+1)!!]^2}n\prod_{i=1}^{1}(n^2-i^2)\\&=\frac{3}{2^2(3!!)^2}n(n^2-1)\\&=\frac{3}{4(1\times3)^2}n(n^2-1)\\&=\frac{1}{12}n(n^2-1);\end{aligned}$$

∴可得：

$$P_{2,0}=\frac{1}{6}(n+1)(2n+1);$$

$$P_{2,1}=(n+1);$$

于是有

$$\begin{aligned}\Phi_2(x)&=x^2-P_{2,0}\Phi_0(x)-P_{2,1}\Phi_1(x)\\&=x^2-\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)-(n+1)[x-\frac{1}{2}(n+1)]\\&=x^2-(n+1)x+\frac{1}{4}(n+1)^2+\frac{1}{4}(n+1)^2-\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)\\&=[x-\frac{1}{2}(n+1)]^2-\frac{1}{12}(n^2-1)\\&=\Phi_1(x)\cdot\Phi_1(x)-\frac{1^2\times(n^2-1)}{4(4\times1^2-1)}\Phi_0(x);\end{aligned}\tag{1.9}$$

$k=3$ 时，$j=0,1,2$，须求的系数有：

$$P_{3,0}=\sum_{x=1}^{n}x^3\Phi_0(x)/\sum_{x=1}^{n}\Phi_0^2(x);$$

$$P_{3,1}=\sum_{x=1}^{n}x^3\Phi_1(x)/\sum_{x=1}^{n}\Phi_1^2(x);$$

$$P_{3,2}=\sum_{x=1}^{n}x^3\Phi_2(x)/\sum_{x=1}^{n}\Phi_2^2(x);$$

∵

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{n}x^3\Phi_0(x)&=\sum_{x=1}^{n}x^3\\&=1^3+2^3+\cdots+n^3\\&=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{n}x^3\Phi_1(x)&=\sum_{x=1}^{n}x^{3+1}-\sum_{x=1}^{n}x^3\Phi_0(x)\cdot\sum_{x=1}^{n}x^1\Phi_0(x)/\sum_{x=1}^{n}\Phi_0^2(x)\\&=\sum_{x=1}^{n}x^4-\sum_{x=1}^{n}x^3\cdot\sum_{x=1}^{n}x/n\\&=(1^4+2^4+\cdots+n^4)-(1^3+2^3+\cdots+n^3)\cdot\frac{1}{2}(n+1)\\&=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)-\frac{1}{4}n^2(n+1)^2\cdot\frac{1}{2}(n+1)\\&=\frac{1}{120}n(n+1)(9n^3+6n^2-11n-4)\\&=\frac{1}{120}n(n^2-1)(3n+1)(3n+4);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{x=1}^{n}x^3\Phi_2(x)\\&=\sum_{x=1}^{n}x^{3+2}-\sum_{x=1}^{n}x^3\Phi_1(x)\sum_{x=1}^{n}x^2\Phi_1(x)/\sum_{x=1}^{n}\Phi_1^2(x)-\\&\quad\sum_{x=1}^{n}x^3\Phi_0(x)\cdot\sum_{x=1}^{n}x^2\Phi_0(x)/\sum_{x=1}^{n}\Phi_0^2(x);\\&=\sum_{x=1}^{n}x^5-\sum_{x=1}^{n}x^3[x-\frac{n+1}{2}]\sum_{x=1}^{n}x^2[x-\frac{n+1}{2}]/\sum_{x=1}^{n}[x-\frac{n+1}{2}]^2-\sum_{x=1}^{n}x^3\sum_{x=1}^{n}x^2/n;\\&=(1^5+2^5+\cdots+n^5)-\\&\quad[\sum_{x=1}^{n}x^4-\frac{n+1}{2}\sum_{x=1}^{n}x^3][\sum_{x=1}^{n}x^3-\frac{n+1}{2}\sum_{x=1}^{n}x^2]/[\sum_{x=1}^{n}x^2-(n+1)\sum_{x=1}^{n}x\\&\quad+\frac{n}{4}(n+1)^2]-(1^3+2^3+\cdots+n^3)(1^2+2^2+\cdots+n^2)/n;\\&=\frac{n^2}{12}(n+1)^2(2n^2+2n-1)-\\&\quad[\frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)-\frac{n^2}{8}(n+1)^3]\times\\&\quad[\frac{n^2}{4}(n+1)^2-\frac{n}{12}(n+1)^2(2n+1)]/[\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)-\frac{n}{2}(n+1)^2\\&\quad+\frac{n}{4}(n+1)^2]-\frac{1}{4}n^2(n+1)^2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)/n;\\&=\frac{n^2}{12}(n+1)^2(2n^2+2n-1)-\end{aligned}$$