高等数学
练习课教程

李宏魁　编

国防科技大学出版社

高等数学练习课教程

李宏魁　编

国防科技大学出版社
湖南·长沙

内容提要

本书是根据国家教委制定的《高等数学课程教学基本要求》编写的，也是编者多年来从事高等数学教学、辅导工作的总结。每讲包括问题讨论、例题演示、习题、习题答案四部分。

本书对高等数学的基本概念、常见错误进行了分析讨论。结合例题演示全面介绍了高等数学中常见的和新颖的解题方法。所选习题类型齐全，既有足够的基本题，又有一定数量的、难度较大的综合题。

本书可作为各类工科大学学生学习高等数学的辅导教材，也可供从事高等数学教学的教师，准备报考研究生的人员参考。

国防科技大学出版社出版发行
电话：(0731)4572640　邮政编码：410073
E - mail：gfkdcbs@public.cs.hn.cn
责任编辑：何　晋　责任校对：陈　靖
新华书店总店北京发行所经销
国防科技大学印刷厂印装
*
开本：850×1168　1/32　印张：12.25　字数：307 千
1991 年 10 月第 1 版 2003 年 11 月第 2 次印刷　印数：5001 - 11000 册
ISBN 7 - 81024 - 168 - 0/O·13
定价：18.00 元

前 言

高等数学是理工科大学生的一门重要基础理论课。力学、物理学、化学甚至社会科学的许多基本概念与理论都需要用高等数学的知识才能给出准确的描述和透彻的分析。因此，学好高等数学，对理工科大学生在今后的学习和工作中起着极其重要的作用。

但是，我们常常听到初学高等数学的学生抱怨这门课程难学，有的学生说，大课也听懂了，就是不会做题，上完练习课后才会做题。由此可见，练习课是高等数学教学中的一个不可缺少的重要方面，是复习巩固基本概念，加深理解基本理论，提高学生运算能力和论证能力的重要环节。为了帮助这些初入大学的学生学好这门课程，同时也是为了使这些学生报考研究生时有一本自己熟悉的复习参考资料，我们编写了这本《高等数学练习课教程》。

本书共分为二十七讲，每讲均由问题讨论、例题演示、习题三部分组成。问题讨论主要根据我们的教学实践，为了加深对基本概念的理解，尤其是针对一些容易出错的地方而编写的，同时也对一些重要基础概念作了深入浅出的阐述。编选的例题中既有为加强对基本概念、基本理论的理解，对基本运算能力进行训练的基本题，也有一定难度的综合题，尤其是注意到一题多解，且对解题的一般方法和技巧随时给出小结。相应地，在习题中，我们也注意到基本题和综合题的适当搭配，所有习题均给出答案。因此，本书不仅是高等数学练习课教学的参考教材和各类高等学校学生学习高等数学的辅导书，也是报考理工科研究生的合适的复习指导书。

限于编者水平，书中难免出现各种错误，敬请读者批评指正。

李宏魁
2003 年 3 月于国防科技大学

目　录

一、

第一讲　函数、极限的概念

一、问题讨论

问题 1　单调函数必有单值反函数，不单调的函数是不是一定没有单值反函数？

【答】　不是的．一个函数是否存在单值反函数，取决于它的对应规则 f 在定义域 D 与值域 W 之间是否构成一一对应的关系．如果是一一对应，那么必有单值反函数；否则就没有单值反函数，函数在区间 I 上单调只是一种特殊的一一对应关系，因此单调仅是存在单值反函数的充分条件，而不是必要条件．

例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ x+1, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

在区间$[-1,1]$上不单调(图 1(a))，但它存在单值反函数(图 1(b))

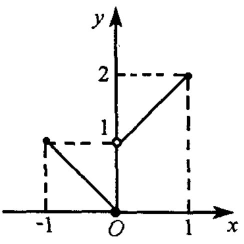

图 1(a)

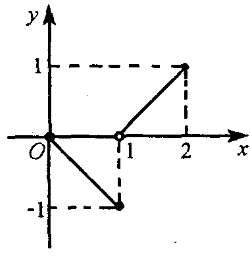

图 1(b)

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x-1, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

又如函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}x, & \text{当 } x \text{ 为有理数}\\ -x, & \text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

在$(-\infty,+\infty)$内不单调,但有单值反函数 $\varphi^{-1}(x)=\varphi(x)$.

问题 2 分段函数一定不是初等函数吗?

【答】 初等函数是指由常数及基本初等函数经有限次四则运算及复合步骤得到的,并能用一个式子表示的函数.有时分段函数虽用几个表达式表示,但并不能肯定说它不能用一个表达式表示,因此,不能说分段函数一定不是初等函数.

例如 $\varphi(x)=|x|$,通常写成分段函数的形式

$$|x|=\begin{cases}x, & \text{当 } x\geqslant 0\\ -x, & \text{当 } x<0\end{cases}$$

但也可写成一个表达式$|x|=\sqrt{x^2}$,因此函数 $\varphi(x)=|x|$是初等函数.

一般地,如果 $f(x)$在$[a,c]$上是初等函数,$g(x)$在$[c,b]$上是初等函数,且 $f(c)=g(c)$,那么分段函数 $\varphi(x)=\begin{cases}f(x), & a\leqslant x\leqslant c\\ g(x), & c<x\leqslant b\end{cases}$ 必是初等函数,因为这时 $\varphi(x)$可以写成一个表达式 $\varphi(x)=f\left(\dfrac{x-c-|x-c|}{2}+c\right)+g\left(\dfrac{x-c+|x-c|}{2}+c\right)-f(c),x\in[a,b]$.

虽然有些分段函数是初等函数,但把它写成一个表达式时,无助于我们讨论它的性质,相反,常会给我们增加麻烦.因此,对于分段函数,除特殊需要外,通常我们没有必要去鉴别它是不是初等函数,而把它当作非初等函数对待.

问题 3 有人说:数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 表示当 n 充分大后,x_n 越来越接近于 a,这种说法对吗?

【答】 这种说法不妥.应当说,"当 n 充分大时,x_n 与 a 之差的

绝对值小于预先给定的任意正数 ε”.或者说“当 n 越来越大时,x_n 越来越无限接近于 a”.因此越来越接近于 a,只能理解为 $|x_n-a|$ 的单调减少,而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则表示为 $|x_n-a|$ 趋于 0,单调减少不见得趋于 0,趋于 0 也不一定单调减少.例如 $x_n=1+\dfrac{1}{n}$,当 n 增加时越来越接近于 0,但 $x_n\not\to 0$;又如 $y_n=\dfrac{2+(-1)^n}{n}\to 0(n\to\infty)$,但 $|y_n-0|=y_n$ 并非单调减少,即 y_n 并非越来越接近于 0.所以数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 表示的是,当 n 无限增大时,x_n 任意地(或无限地)接近于 a,或者说,x_n 趋近于 a.

问题 4 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 定义中的 $N=N(\varepsilon)$ 是不是 ε 的函数?

【答】 $N=N(\varepsilon)$ 仅表示 N 与 ε 有关,并不表示 N 是 ε 的函数.因为对给定的 ε,如果存在一个满足要求的 N,就必然有无限多个满足要求的 N,因此 $N(\varepsilon)$ 并不确定.所以,按函数定义知 N 不是 ε 的函数.

问题 5 数列 $\{x_n\}$ 与数列 $\{|x_n|\}$ 是否同敛散?

【答】 一般不是同敛散.

若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{|x_n|\}$ 也收敛,且当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.这是因为:对于任给 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n>N$ 时,有 $|x_n-a|<\varepsilon$,从而 $\big||x_n|-|a|\big|\leqslant|x_n-a|<\varepsilon$.

若 $\{|x_n|\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 可能收敛,也可能发散.例如 $\{|(-1)^n|\}$ 是收敛的,但 $\{(-1)^n\}$ 是发散的.

当然,也有 $\{x_n\}$ 与 $\{|x_n|\}$ 同敛散的情形,例如:若 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$;

当 $\{x_n\}$ 恒正或恒负时,$\{x_n\}$ 与 $\{|x_n|\}$ 同敛散.类似地,读者可考虑:$\lim f(x)$ 与 $\lim|f(x)|$ 的敛散关系;$\lim f(x)$ 与 $\lim[f(x)]^2$ 的敛散关系.

问题 6 下列说法是否可作为极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的等价定义:

(1)任给 $\varepsilon>0$,存在 $\xi>0$,当 $0<|x-x_0|<k\xi$ 时,有 $|f(x)-A|<l\varepsilon$(其中 k、l 为任意确定的正数).

(2)任给 $\varepsilon>0$,存在 $\xi>0$,当 $0<|x-x_0|\leqslant\xi$ 时,有 $|f(x)-A|\leqslant\varepsilon$.

【答】 以上两种说法都是可以的.这是因为:

对于说法(1),由于 ε 为任意正数,从而 $\varepsilon_1=l\varepsilon$ 仍为任意正数;存在 ξ,也就存在 $\xi_1=k\xi$,因此(1)也就是:任给 $\varepsilon_1>0$,存在 $\xi_1>0$,当 $0<|x-x_0|<\xi_1$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon_1$,这就是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义,所以(1)与定义等价.

对于说法(2),当在(1)中,取 $k=\dfrac{1}{2}$, $l=2$ 时,由(2)可得(1);取 $k=2$, $l=\dfrac{1}{2}$时,由(1)可得(2).所以(2)与(1)等价,从而(2)也与定义等价.

问题 7 函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时不以 A 为极限的分析定义应怎样表述?并证明$\lim\limits_{x\to 2}x^2\neq 3$.

【答】 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$ 的分析定义是:存在一个正数 ε_1,对任意给定的 $\xi>0$,总有点 x_1,满足 $0<|x-x_0|<\xi$,使$|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_1$.

下面证明$\lim\limits_{x\to 2}x^2\neq 3$.

按上面的表述可知,证明的要求是找出符合要求的 ε_1 和 x_1.为此我们分析函数 $f(x)=x^2$ 在点 $x_0=2$ 的去心邻域 $u(2,\xi)$内的函数值,可知在 $u(2,\xi)$内总可找到大于 4 的函数值.于是可取 $\varepsilon_1\leqslant 4-A=4-3=1$,并在 $u(2,\xi)$内找出一点 x_1,使 $f(x_1)>4$.由此分析,给出证明如下:

取 $\varepsilon_1=1$,任给 $\xi>0$,取 $x_1=2+\dfrac{\xi}{2}\in u(2,\xi)$,有$|f(x_1)-A|=$

$|x_1^2-3| = \left|\left(2+\frac{\xi}{2}\right)^2-3\right| > 1 = \varepsilon_1$.所以$\lim\limits_{x\to 2}x^2 \neq 3$.

二、例题演示

【例 1】 设$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}(x>0)$,求(1)$f[f(x)]$,(2)$f(x)$的反函数.

【解】 (1)$f[f(x)]=\frac{f(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}}=\frac{x/\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+(x^2/1+x^2)}}$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}(x>0)$$

(2)令 $y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,两边平方有 $y^2=\frac{x^2}{1+x^2}$,从而有

$x=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$或$y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}(0<x<1)$

【例 2】 设$f(x)=\frac{1-x}{1+x}$,$g(x)=\frac{1}{x}$,求$f[g(x)]$及$g[f(x)]$.

【解】 $f[g(x)]=\frac{1-g(x)}{1+g(x)}=\frac{x-1}{x+1}$,$(x\neq 0, x\neq -1)$

$g[f(x)]=\frac{1}{f(x)}=\frac{1+x}{1-x}$,$(x\neq 1, x\neq -1)$

【例 3】 设函数$f(x)$在$(-l,+l)$内有定义,试证$F_1(x)=f(x)+f(-x)$,$F_2(x)=f(x)-f(-x)$分别为偶函数和奇函数.

【证】 因为

$$F_1(-x)=f(-x)+f[-(-x)]$$
$$=f(-x)+f(x)=F_1(x)$$
$$F_2(-x)=f(-x)-f[-(-x)]$$
$$=f(-x)-f(x)=-F_2(x)$$

所以它们分别为偶函数和奇函数.

【例 4】 证明函数$f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$在$(0,1)$内无界.

【证】 对于任意给定的正数 M,取 $n=[M]+1$,此时 $\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\in(0,1)$,则有

$$f\left[\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right]=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=2n\pi+\frac{\pi}{2}>M.$$

所以,$f(x)$在$(0,1)$内无界.

【例 5】 证明任意有理数均为 Dirichlet 函数的周期.

【证】 根据 Dirichlet 函数的定义,

$$D(x)=\begin{cases}1, x\text{ 为有理数}\\0, x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

设 r 为任意给定的有理数,当 x 为有理数时,$r+x$ 也为有理数,当 x 为无理数时,$r+x$ 也为无理数,于是

$$D(x+r)=\begin{cases}1, x\text{ 为有理数}\\0, x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

从而,$D(x+r)=D(x)$.

【例 6】 试用极限的"$\varepsilon-N$"定义证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{2n^2+3n}=\dfrac{1}{2}$.

【证】 对任意给定的 $\varepsilon>0$,要使 $|x_n-a|<\varepsilon$,只要 $|x_n-a|=\left|\dfrac{n^2+1}{2n^2+3n}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{|2-3n|}{2(2n^2+3n)}=\dfrac{3n-2}{2(2n^2+3n)}<\dfrac{3n}{2(2n^2+3n)}=\dfrac{3}{2(2n+3)}<\dfrac{3}{4n}<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$,即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

因此对任意给定的 $\varepsilon>0$,可取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,那么对一切 $n>N$,恒有

$$\left|\frac{n^2+1}{2n^2+3n}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+3n}=\frac{1}{2}$$

此处,用"$\varepsilon-N$"定义证明数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的关键是对任意给定的$\varepsilon>0$,寻找正整数 N,即找能使$|x_n-a|<\varepsilon$ 恒成立的条件.

其次,由于 N 的不惟一性,故 $n>N$ 只是$|x_n-a|<\varepsilon$ 恒成立的一个充分条件,因此 N 的选取具有灵活性,我们可以不必去追求最小的 N,而可以先对$|x_n-a|$(通过分子放大或分母缩小等放大手段)找出一个与 n 有关的函数 y_n,使之在 $n>N_1$ 时恒有$|x_n-a|\leqslant y_n$,再找使 $y_n<\varepsilon$ 恒成立的条件 $n>N_2$,于是取 $N=\max\{N_1,N_2\}$.这样选取的 N 是符合定义要求的.注意,通过放大法获取 y_n 有两个原则:一是所得的 y_n,与$|x_n-a|$比较,在表达式上应更简化,以便更易找到 N;二是不要放得太大,即 y_n 不要取得过分的大,而应满足:当 $n\to\infty$时 $y_n\to0$,那么这样选取的 y_n 才是合适的.

【例 7】 用极限定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

【证】 设 $n^{\frac{1}{n}}=1+p(p>0)$,则

$$n=(1+p)^n=1+np+\frac{n(n-1)}{2}p^2+\cdots+p^n>\frac{n(n-1)}{2}p^2>\frac{n\cdot\frac{n}{2}}{2}p^2$$

$$=\frac{n^2p^2}{4}$$

即 $p^2<\dfrac{4}{n}$,$p<\dfrac{2}{\sqrt{n}}$,任给 $\varepsilon>0$,要使$|n^{\frac{1}{n}-1}|<\varepsilon$,只须$\dfrac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon$,即$n>\dfrac{4}{\varepsilon^2}$.可取 $N=\left[\dfrac{4}{\varepsilon^2}\right]$,则当 $n>N$ 时,有$|n^{\frac{1}{n}}-1|<\varepsilon$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$.

【例 8】 用"$\varepsilon-\xi$"定义证明$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{2x}=0$.

【证】 为了较方便地确定正数 ξ,此处使用适当放大法解函数不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$.

先限制 $0<|x-1|<\frac{1}{2}$，此时有 $|x|=|(x-1)+1|\geqslant \big||1-|x-1|\big|=1-|x-1|>\frac{1}{2}$，或 $2|x|>1$，从而

$$\left|\frac{x-1}{2x}-0\right|=\frac{|x-1|}{2|x|}<|x-1|$$

因此，对任给 $\varepsilon>0$，要使 $\left|\frac{x-1}{2x}-0\right|<\varepsilon$，只要 $|x-1|<\varepsilon$，于是取 $\xi=\min\left\{\frac{1}{2},\varepsilon\right\}$，则当 x 适合不等式 $0<|x-1|<\xi$ 时，对应函数值 $f(x)=\frac{x-1}{2x}$ 恒满足不等式 $\left|\frac{x-1}{2x}-0\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{2x}=0$.

此处，用"$\varepsilon-\xi$"定义证明函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的关键是：对任意给定的 $\varepsilon>0$，寻找正数 ξ，即寻找能使 $|f(x)-A|<\xi$ 恒成立的条件"$0<|x-x_0|<\xi$"中的 ξ，也就是从不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 中寻找具有"$|x-x_0|<r$"形式的解，然后取 $\xi=r$ 即可.

同数列极限定义中的 N 一样，此处满足定义的 ξ 也不惟一，因此 ξ 的选取也具有灵活性，即我们不必拘泥于从 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 中求取最大的 ξ，而可以将 $|f(x)-A|$ 在条件 $0<|x-x_0|<\xi_1$ 下适当放大为 $|f(x)-A|\leqslant g(x)$，再由 $g(x)<\varepsilon$ 中找出条件 $0<|x-x_0|<\xi_2$，然后取 $\xi=\min\{\xi_1,\xi_2\}$.

注意，在找 $g(x)$ 时，常常设定条件 $0<|x-x_0|<\xi_1$，在此约定下，保留 $|f(x)-A|$ 中的含有 $|x-x_0|$ 的因式，把其余的与 x 有关的因式适当放大，且使这样获取的 $g(x)$ 满足下列两个要求：一是当 $x\to x_0$ 时，$g(x)\to0$；二是从 $g(x)<\varepsilon$ 中能较方便地求出一个解 $0<|x-x_0|<\xi_2$.

三、习题

1. 判断下列命题是否正确，若不正确，举出反例.

(1) 对任意给定的 $\varepsilon>0$，在数 $\{x_n\}$ 中都有无数个点落在点 a 的 ε

邻域内，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(2)对任意给定的$\varepsilon>0$，在数列$\{y_n\}$中仅有有限多个点落到b的ε邻域之外，则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$.

(3)若$\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在，$\lim\limits_{x\to a}g(x)$不存在，则$\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$一定不存在.

(4)若$\lim\limits_{x\to a}f(x)$不存在，$\lim\limits_{x\to a}g(x)$不存在，则$\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$一定不存在.

2. 选择题

(1)若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$，则必有(D)

A. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\infty$

B. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\infty$

C. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)+g(x)}=0$

D. $\lim\limits_{x\to a}kf(x)=\infty$($k$为非零常数)

(2)若当$x\to x_0$时，$\alpha(x)$、$\beta(x)$都是无穷小($\beta\neq0$)，则当$x\to x_0$时，下列等式中(C)不一定是无穷小.

A. $|\alpha(x)|+|\beta(x)|$　　B. $\alpha^2(x)+\beta^2(x)$

C. $\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta(x)}$　　D. $\alpha(x)\beta(x)$

3. 设$f(x)=\begin{cases}2x,0<x\leqslant1\\x^2,1<x\leqslant2\end{cases}$，$g(x)=\ln x$，$x>0$，求$f[g(x)]$、$g[f(x)]$.

4. 设$f(x)$是以$\omega(\omega>0)$为周期的周期函数，且$f(x)$在$[0,\omega]$上有界，证明$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有界.

5. 设函数$f(x)=\dfrac{1}{1+x}(x\neq-1)$的反函数为$f^{-1}(x)$，求函数$y=f^{-1}[f^{-1}(x)]$的表达式及定义域.

6. 设$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$，求使$f[f(x)]=x$的条件.

7. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n+1}{2n-1}=\dfrac{3}{2}$.

8. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A>0$,证明数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 有界.

9. 设 $\{a_n\}$ 是单调递增数列,而且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$,证明 $a_n<A(n=1,2,\cdots)$

10. 利用例7,证明下述极限.

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{a^n}=0(a>1)$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0(a>1,k>0)$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\log_a n}{n}=0(a>1)$

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}nq^n=0(|q|<1)$

四、习题答案

1.(1)× (2)√ (3)√ (4)×

2.(1)D (2)C

3. $f[g(x)]=\begin{cases}2\ln x, 1<x\leqslant e\\ \ln^2 x, e<x\leqslant e^2\end{cases}$

$g[f(x)]=\begin{cases}\ln 2x, 0<x\leqslant 1\\ 2\ln x, 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$

5. $f^{-1}[f^{-1}(x)]=\dfrac{2x-1}{1-x}, x\neq 0, x\neq 1$

6. $a=-d, bc+d^2\neq 0$ 或 $a=d=0, bc\neq 0$ 或 $a=d\neq 0, b=c=0$

第二讲　极限的计算

一、问题讨论

问题 1　如果数列$\{a_n\}$收敛，$\{b_n\}$发散，那么$\{a_nb_n\}$是否一定发散？如果$\{a_n\}$和$\{b_n\}$都发散，那么$\{a_nb_n\}$的收敛性又将怎样？

【答】　在以上两种假设情况下，$\{a_nb_n\}$的收敛性都不能肯定．现在先就$\{a_n\}$收敛，$\{b_n\}$发散的情况来分析．

利用 $b_n=\dfrac{a_nb_n}{a_n}$这个恒等式，就可得到下述结论：若$\{a_n\}$收敛且不收敛于零，$\{b_n\}$发散，则$\{a_nb_n\}$必发散．这是因为若$\{a_nb_n\}$收敛，且$\{a_n\}$又不收敛于零，则从上述恒等式及极限相除法则知$\{b_n\}$收敛，这与假设矛盾．

若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，且$\{b_n\}$发散，则$\{a_nb_n\}$可能收敛，也可能发散．例如

(1) $a_n=\dfrac{1}{n}$，$b_n=n$，则 $a_nb_n=1$，于是$\{a_nb_n\}$收敛．

(2) $a_n=\dfrac{1}{n}$，$b_n=(-1)^n n$，则 $a_nb_n=(-1)^n$，于是$\{a_nb_n\}$发散．

现在再就$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都发散的情况来分析$\{a_nb_n\}$的收敛性．我们有以下的结论：若$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都发散，且两者至少有一个是无穷大，则$\{a_nb_n\}$必发散．这是因为，如果$\{a_nb_n\}$收敛，而$\{a_n\}$为无穷大，从等式 $b_n=\dfrac{a_nb_n}{a_n}$便得到$\{b_n\}$收敛于零，这与假设矛盾．

若$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都不是无穷大且都发散，则$\{a_nb_n\}$可能收敛，也可