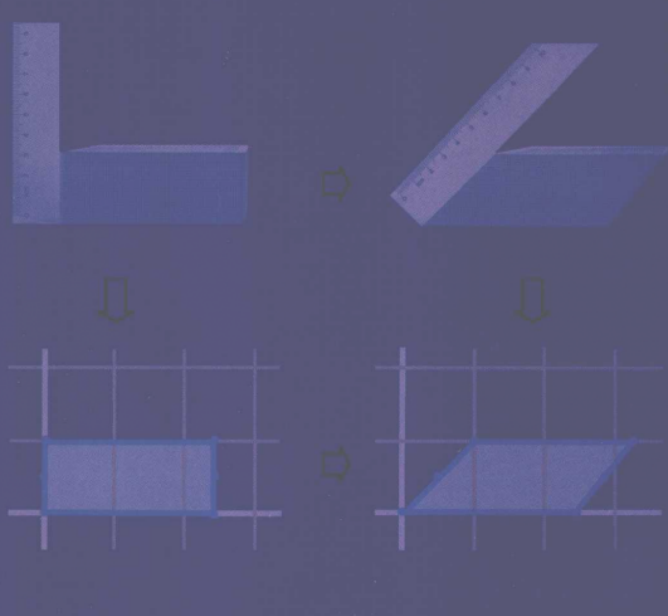
经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过

数学

普通高中课程标准实验教科书

选修 4 - 2

矩阵与变换



凤凰出版传媒集团

江苏教育出版社

JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

凤凰国标教材

ISBN 978-7-5343-6622-2
9 787534 366222 >
定价：3.28 元

审批号：苏费核(08 秋)第 11 号　举报电话：12358

经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学

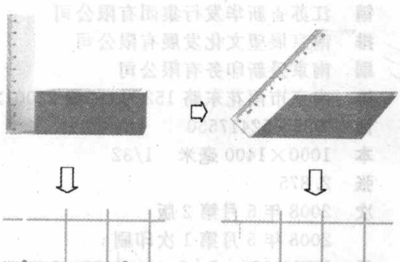
矩阵与变换

juzhen yu bianhuan

选修 4-2

主　编：单　墫

副主编：李善良　陈永高　王巧林



凤凰出版传媒集团

江蘇教育出版社

JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

凤凰国标教材

普通高中课程标准实验教科书·数学
书　　名　矩阵与变换(选修 4-2)
责任编辑　胡晋宾
出版发行　凤凰出版传媒集团
　　　　　江苏教育出版社(南京市马家街 31 号 210009)
网　　址　http://www.1088.com.cn
集团网址　凤凰出版传媒网 http://www.ppm.cn
经　　销　江苏省新华发行集团有限公司
照　　排　南京展望文化发展有限公司
印　　刷　南京爱新印务有限公司
厂　　址　南京市雨花东路 152 号(邮编 210012)
电　　话　025-52417550
开　　本　1000×1400 毫米　1/32
印　　张　2.875
版　　次　2008 年 5 月第 2 版
　　　　　2008 年 5 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5343-6622-2
定　　价　3.28 元
批发电话　025-83260760,83260768
邮购电话　025-85400774,8008289797
短信咨询　10602585420909
E-mail　jsep@vip.163.com
盗版举报　025-83204538

主　　编　单　墫

副 主 编　李善良　陈永高　王巧林

编写人员　胡晋宾　刘洪璐　陈永高

责任编辑　胡晋宾

影视传媒中的逼真动画是怎样制作的?

天气预报中的降雨概率是怎样测算的?

生物种群中的数量变化是怎样模拟的?

……

以上这些问题的解决,都涉及到矩阵知识.

不仅如此,在图论、线性规划、大型工程的计算、信息安全的加密、线性方程组的求解等问题中,都会用到矩阵知识.

在本专题中,我们将主要学习二阶矩阵与几种常见的平面图形变换的相互关系,以及矩阵的一些简单应用.

说　　明

江苏教育出版社出版的《普通高中课程标准实验教科书·数学》是根据2003年教育部制订的《普通高中数学课程标准(实验)》编写的.

该套教科书充分体现数学课程标准的基本理念,使学生通过高中阶段的学习,能获得适应现代生活和未来发展所必需的数学素养,满足他们个人发展与社会进步的需要.

教科书力图使学生在丰富的、现实的、与他们经验紧密联系的背景中感受数学、建立数学、运用数学,做到“入口浅,寓意深”.通过创设恰当的问题情境,引导学生进行操作、观察、探究和运用等活动,感悟并获得数学知识与思想方法.在知识的发生、发展与运用过程中,培养学生的思维能力、创新意识和应用意识.

教科书按知识发展、背景问题、思想方法三条主线,通过问题将全书贯通.每个模块围绕中心教育目标展开,每章围绕核心概念或原理展开.教科书充分关注数学与自然、生活、科技、文化及其他学科的联系,让学生感受到数学与外部世界是息息相通、紧密相连的.

教科书充分考虑学生的不同需求,为所有学生的发展提供帮助,为学生的不同发展提供较大的选择空间.整套教科书设计为:一个核心(基本教学要求),多个层次,多种选择.学好核心内容后,根据需要,学生有多种选择,每一个人都能获得必备的数学素养与最佳发展.

众多的数学家、心理学家、学科教育专家、特级教师参加了本套教科书的编写工作.参与本册讨论与审稿的专家与教师有徐稼红、葛军、樊亚东、石志群、张乃达等,在此向他们深表感谢!

感谢您使用本书.您在使用本书时有建议或疑问,请及时与我们联系.我们的联系方式是 uuxjh@public1. sz. js. cn、lishanliang@x263. net、anqingfox@gmail. com.

本书编写组

2008年5月

目　录

2.1 二阶矩阵与平面向量

2.1.1 矩阵的概念

如图 2-1-1 所示，已知向量$\overrightarrow{OP}$，$O(0,\ 0)$，$P(1,\ 3)$. 因此，向量$\overrightarrow{OP}=(1,\ 3)$. 如果把$\overrightarrow{OP}$的坐标排成一列，那么可以用表 2-1-1 来表示，并简记为$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$.

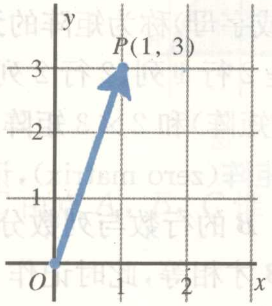


图 2-1-1

表 2-1-1

1
3

又例如，某电视台举办歌唱比赛，甲、乙两名选手初、复赛成绩如表 2-1-2 所示. 如果将表中的数据按原来的位置排成一张矩形数表，那么可以得到表 2-1-3，并简记为$\begin{bmatrix}80 & 90\\60 & 85\end{bmatrix}$.

表 2-1-2

	初赛	复赛
甲	80	90
乙	60	85

表 2-1-3

80	90
60	85

再比如,将下列方程组中未知数 x, y, z 的系数按原来的次序排列,就能得到表 2-1-4,并简记为 $\begin{bmatrix} 2 & 3 & m \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$.

$$\begin{cases} 2x+3y+mz=1, \\ 3x-2y+4z=2 \end{cases} \Rightarrow$$

表 2-1-4

2	3	m
3	-2	4

在数学中,我们把形如 $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 80 & 90 \\ 60 & 85 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 3 & m \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ 这样的矩形数字(或字母)阵列称做**矩阵**(matrix). 一般地,我们用黑体大写拉丁字母 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, …或者(a_{ij})来表示矩阵,其中 i, j 分别表示元素 a_{ij} 所在的行与列. 同一横排中按原来次序排列的一行数(或字母)叫做矩阵的**行**(row),同一竖排中按原来次序排列的一列数(或字母)叫做矩阵的**列**(column),而组成矩阵的每一个数(或字母)称为矩阵的**元素**(entries).

显然,上面例子中的矩阵分别是 2 行 1 列、2 行 2 列和 2 行 3 列,通常记为 2×1 矩阵、2×2 矩阵(二阶矩阵)和 2×3 矩阵.

所有元素都为 0 的矩阵叫做**零矩阵**(zero matrix),记为 $\mathbf{0}$.

对于两个矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$,只有当 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的行数与列数分别相等,并且对应位置的元素也分别相等时,$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 才相等,此时记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

一般地,我们把像 $[a_{11} \quad a_{12}]$ 这样只有一行的矩阵称为**行矩阵**(row matrix),而把像 $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ 这样只有一列的矩阵称为**列矩阵**(column matrix),并用希腊字母 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, …来表示.

根据上述定义,平面上向量 $\boldsymbol{a}=(x, y)$ 和平面上的点$P(x, y)$都可以看做是行矩阵$[x \quad y]$,也可以看做是列矩阵 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. 因此,我们常将$[x \quad y]$称为行向量,而将 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 称为列向量. 习惯上,我们把平面向量(x, y)的坐标写成列向量 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 的形式. 又因为

$$P(x,\ y) \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{平面向量}\overrightarrow{OP},$$

因此，$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$既可以表示点$(x,\ y)$，也可以表示以$O(0,\ 0)$为起点、以$P(x,\ y)$为终点的向量$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. 故在不引起混淆的情况下，对它们不加以区别.

例1 用矩阵表示图 2-1-2 中的$\triangle ABC$，其中$A(-1,\ 0)$，$B(0,\ 2)$，$C(2,\ 0)$.

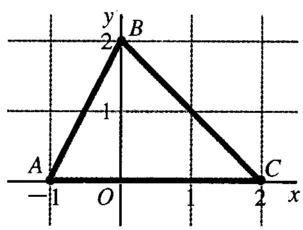


图 2-1-2

解 因为$\triangle ABC$由点A，B，C惟一确定，点A，B，C可以分别用列向量

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

来表示，所以，$\triangle ABC$可以表示为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

从例 1 中我们可以看出，矩阵$\boldsymbol{M}$可以认为是由 3 个列向量$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$组成，也可以认为是两个行向量$[-1\quad 0\quad 2]$，$[0\quad 2\quad 0]$组成. 反过来，矩阵$\boldsymbol{M}$可以表示点$A(-1,\ 0)$，$B(0,\ 2)$，$C(2,\ 0)$或它们构成的三角形.

思　考

如果像例 1 中那样用矩阵 $M=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 2 & 0\end{bmatrix}$ 表示平面中的图形，那么该图形有什么几何特征？

例 2 某种水果的产地为 A_1，A_2，销地为 B_1，B_2，请用矩阵表示产地 A_i 运到销地 B_j 的水果数量（a_{ij}），其中 $i=1,2,\ j=1,2$.

解 已知产地 A_i 运到销地 B_j 的产品数量为 a_{ij}，$i=1,2,\ j=1,2$，如表 2－1－5 所示.

表 2－1－5

	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

因此，从产地 A_i 运到销地 B_j 的水果数量可表示为

$$(a_{ij})=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}.$$

思　考

生活中有哪些问题也可以用矩阵来表示？请列举几个，并和同学交流.

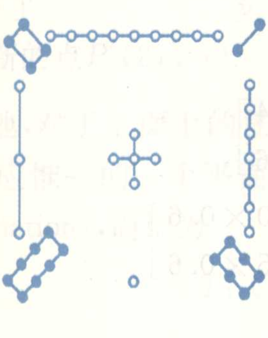
例 3 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}x & 3\\ 4 & -2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & y\\ z & -2\end{bmatrix}$，若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，试求 x，y，z.

解 因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，即 $\begin{bmatrix}x & 3\\ 4 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & y\\ z & -2\end{bmatrix}$，所以

$$\begin{cases}x=1,\\ y=3,\\ z=4.\end{cases}$$

阅 读

传说在远古的伏羲时代，有一匹神奇的龙马背负着一张神秘的图形出现在黄河的水面上，人们把那张图称为“河图”．到了大禹治水的年代，又有一只神奇的大龟背负着另一张神秘的图形浮出洛水，人们称之为“洛书”．龙马载河图和神龟背洛书最早出现在宋人的著作中，通常认为那些小圆点表示数字，其中空心点表示奇数，实心点表示偶数．将如图 2-1-3(1)所示的洛书中的点换成数字，它就可以看做是一个由 1～9 这 9 个数字排成的矩阵 $\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$．这个矩阵的每行每列以及两条对角线上的 3 个数之和都是 15，人们称这种图为“纵横图”或“幻方”．无独有偶，16 世纪德国雕刻家阿布莱德 · 杜埃(A. Dürer，1471～1528)在他的木刻画《忧郁者》(如图 2-1-3(2)所示)的右上角就刻有一个幻方，也可看做是矩阵 $\begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}$．


(1)


(2)

图 2-1-3

2.1.2 二阶矩阵与平面列向量的乘法

在第 2.1.1 节开头的第二个例子中，如果规定歌唱比赛的最后成绩由初赛和复赛综合裁定，其中初赛占 40%，复赛占 60%，那么，甲的最后成绩为 $80\times0.4+90\times0.6=86$ 分，乙的最后成绩为 $60\times0.4+85\times0.6=75$ 分. 如果用 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}80 & 90\end{bmatrix}$ 表示甲的两次成绩，用 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}60 & 85\end{bmatrix}$ 表示乙的两次成绩，用 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0.4\\0.6\end{bmatrix}$ 表示初赛和复赛成绩在比赛总分中所占的比重，那么甲、乙的最后成绩可用如下矩阵的形式表示：

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}80 & 90\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.4\\0.6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}80\times0.4+90\times0.6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}86\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}60 & 85\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.4\\0.6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}60\times0.4+85\times0.6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}75\end{bmatrix}.$$

上例中，一个 1×2 行矩阵乘以一个 2×1 列矩阵，所得的结果是一个 1×1 矩阵，它的元素是原来行矩阵和列矩阵对应元素的乘积之和.

因此，如果用矩阵 $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}80 & 90\\60 & 85\end{bmatrix}$ 表示甲、乙两人的成绩，那么上述求解甲、乙两人成绩的过程可以表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{C}&=\begin{bmatrix}80 & 90\\60 & 85\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.4\\0.6\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}80\times0.4+90\times0.6\\60\times0.4+85\times0.6\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}86\\75\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

一般地，我们规定行矩阵 $\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\end{bmatrix}$ 与列矩阵 $\begin{bmatrix}b_{11}\\b_{21}\end{bmatrix}$ 的乘法规则①为

① 后面我们将进一步讨论矩阵的乘法.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\times b_{11} + a_{12}\times b_{21} \end{bmatrix},$$

二阶矩阵 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 与列向量 $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ 的乘法规则为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\times x_0 + a_{12}\times y_0 \\ a_{21}\times x_0 + a_{22}\times y_0 \end{bmatrix}.$$

例 4 计算 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

解 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times x + 0\times y \\ 0\times x + 1\times y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix}$.

例 4 中的结果表示矩阵 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 与列向量 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 相乘后，得到一个新的列向量 $\begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix}$. 如果列向量 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 表示平面上的点 $P(x,\ y)$，那么相乘后就得到一个新的点 $P'(2x,\ y)$.

一般地，对于平面上的任意一个点（向量）$(x,\ y)$，按照对应法则 T，总能对应惟一的一个平面点（向量）$(x',\ y')$，则称 T 为一个**变换**(transformation)，简记为

$$T:(x,\ y)\to(x',\ y'),$$

或

$$T:\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

这样，例 4 中的矩阵 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 便确定了一个变换，把这个变换记作

$$T:(x, y)\to(x', y')=(2x, y)$$

或

$$T:\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x\\y\end{bmatrix}.$$

一般地，对于平面向量的变换 T，如果变换规则为

$$T:\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ax+by\\cx+dy\end{bmatrix},$$

那么，根据二阶矩阵与列向量的乘法规则可以改写为

$$T:\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

的矩阵形式，反之亦然($a, b, c, d\in\mathbf{R}$).

由矩阵 $\boldsymbol{M}$ 确定的变换 T，通常记作 T_M. 根据变换的定义，它是平面内点集到其自身的一个映射. 当 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 表示某个平面图形 F 上的任意一点时，这些点就组成了图形 F；它在 T_M 的作用下，将得到一个新的图形 F'——原象集 F 的象集 F'.

思 考

二阶矩阵 $\boldsymbol{M}$ 与列向量的乘法 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\to\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 和函数 $x\to f(x)$ 的定义有什么异同？

例5 (1) 已知变换 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，试将它写成坐标变换的形式；

(2) 已知变换 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-3y\\y\end{bmatrix}$，试将它写成矩阵乘法的形式.