



考研专业课攻关系列

信号与系统

考试要点与真题精解

◎吴 京 主编

围绕学科考点

把握重点难点

收录全真试卷

附带详细解答



国防科技大学出版社

 考研专业课攻关系列

内容简介

信号与系统

考试要点与真题精解

主 编 吴 京 著 吴 京 邓新蒲
编 著 吴 丹 梅 黄知涛



国防科技大学出版社

·长沙·

内 容 简 介

本书根据国家教育部制定的信号与系统课程教学大纲和硕士生入学考试要求而编写,内容包括:信号与系统、连续时间信号与系统的时域分析、离散时间信号与系统的时域分析、连续时间信号与系统的频域分析、连续时间信号与系统的复频域分析、Z变换、状态变量分析法。每单元分考试要点、基础题与综合题例题精解。精选重点大学近年的考研试卷并提供参考答案。

本书可作为报考相关专业硕士研究生的考前复习用书,亦可作为大学本、专科学生和其他人员学习课程的辅助教材。

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统考试要点与真题精解/吴京等编著. —长沙:国防科技大学出版社,2007.7
(考研专业课攻关系列)

ISBN 978-7-81099-423-1

I. 信… II. 吴… III. 信号与系统—研究生—入学考试—自学参考资料
IV. TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 090113 号

国防科技大学出版社出版发行
电话:(0731)4572640 邮政编码:410073

<http://www.gfkdcbs.com>

责任编辑:潘 生 责任校对:唐卫葳

新华书店总店北京发行所经销

国防科技大学印刷厂印装

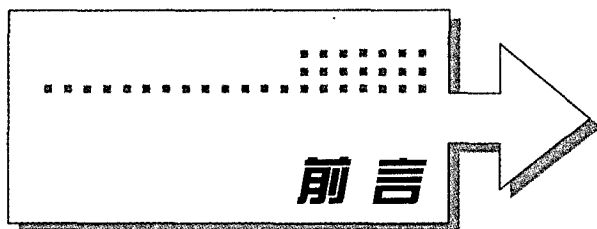
*

开本:787×1092 1/16 印张:13.5 字数:354 千

2007 年 7 月第 1 版第 1 次印刷 印数:1-4000 册

ISBN 978-7-81099-423-1

定价:22.00 元



前言

本书是国防科技大学出版社组织出版的“考研专业课攻关系列”中的一种。它的出版,不仅可为通信、信号处理和自动控制等专业研究生考生提供一本实用的复习指导书,而且也在校学生和其他自学者更好的掌握“信号与系统”课程内容,提供了一本不可多得的辅导教材。此外,本书也可以作为各种版本信号与系统教材的补充。

本书从教育部颁发的相关课程的教学基本要求出发,参考国内使用较广泛的几种相关教材和作者多年的教学实践经验,将课程内容分为7个单元,每单元又分为内容要点、基础题解答、提高题解答三部分。内容要点中对各单元的主要内容,特别是要求熟练掌握和深刻理解的内容进行了概要性说明和论述,并列出了重要公式和基本变换对;典型题型分基础题和提高题解答,是在认真分析国内20多所重点大学近几年来考研试卷的基础上,归纳提出了各单元的典型题型,并针对主要题型和主要内容,平均每单元列举了20道左右的例题(其中绝大多数例题都是全国各重点大学近几年实际考研试题),对典型例题均有详细的多种解答,并对解题思路进行分析,澄清错误概念,以启迪读者的解题思路,帮助读者理解和掌握解题方法,进而加深对教学内容的理解和掌握。

第8单元从国内重点大学近年的考研试卷中精选出10份供读者参考,并提供参考答案。

本书由吴京、邓新蒲、丹梅、黄知涛、安玮等人合作编写,吴京任主编,负责全书的编写组织和修改。

高谦、拓世英、彭峰参与了本书部分习题解答、绘图、校对工作。本书参阅了国内重点大学近几年考研试题和应用较广的教材,特别是下列教材:

- (1) 吴京等编著,信号与系统分析,国防科技大学出版社,1999年;
- (2) 吴大正主编,信号与线性系统分析,高等教育出版社,1998年;
- (3) ALAN V. OPPENHEIM, SIGNALS & SYSTEMS, second edition, Prentice-Hall International, Inc, 1997;
- (4) 胡光锐等编著,信号与系统,上海交通大学出版社,1995年;
- (5) 吴新余等编著,信号与系统——时域、频域分析及MATLAB软件的应用,电子工业出版社,1999年。

在此一并向他们编写致以诚挚的谢意。

由于我们的水平和经验有限,书中会存在缺点和不当之处,恳请读者指正。

作者

2007年7月于国防科技大学

目录

KAOYAN ZHUANYEKE GONGGUAN XIUE

第一单元 信号与系统

- 1.1 考试要点 (1)
- 1.2 基础题 (3)
- 1.3 提高题(综合题) (7)

第二单元 连续时间信号与系统的时域分析

- 2.1 考试要点 (10)
- 2.2 基础题 (13)
- 2.3 提高题(综合题) (30)

第三单元 离散时间信号与系统的时域分析

- 3.1 考试要点 (38)
- 3.2 基础题 (41)
- 3.3 提高题(综合题) (47)

第四单元 连续时间信号与系统的频域分析

- 4.1 考试要点 (51)
- 4.2 基础题 (55)
- 4.3 提高题(综合题) (73)

第五单元 连续时间信号与系统的复频域分析

- 5.1 考试要点 (91)
- 5.2 基础题 (98)
- 5.3 提高题(综合题) (109)

第六单元 Z变换

- 6.1 考试要点 (130)
- 6.2 基础题 (134)
- 6.3 提高题(综合题) (145)

第七单元 状态变量分析法

- 7.1 考试要点 (159)
- 7.2 基础题 (163)
- 7.3 提高题(综合题) (173)

Contents

第八单元 部分重点大学考研试题精选

8.1 北京航空航天大学 2005 年硕士研究生入学考试试题	(179)
8.2 北京邮电大学 2005 年硕士研究生入学考试试题	(180)
8.3 武汉大学 2005 年硕士研究生入学考试试题	(183)
8.4 重庆大学 2005 年硕士研究生入学考试试题	(185)
8.5 湖南大学 2005 年硕士研究生入学考试试题	(187)
8.6 西安电子科技大学 2005 年硕士研究生入学考试试题	(187)
8.7 电子科技大学 2005 年硕士研究生入学考试试题	(189)
8.8 国防科技大学 2005 年硕士研究生入学考试试题	(191)
8.9 国防科技大学 2006 年硕士研究生入学考试试题	(193)
8.10 国防科技大学 2006 年硕士研究生入学考试试题	(196)
参考答案	(198)

第一单元

信号与系统

1.1 考试要点

1. 信号的定义与分类

(1) 信号的定义

信号是消息的表现形式,消息则是信号的具体内容。通常用数学函数式表示,也可用曲线、图像、集合等表示。

(2) 信号的分类

信号的形式多种多样,可以从不同的角度进行分类,且通常与系统有关。常用的几种分类为:确定性信号和随机性信号;连续时间信号和离散时间信号;周期信号和非周期信号;实信号和复信号;功率有限信号和能量有限信号;奇信号和偶信号;因果信号和非因果信号。

2. 系统的定义、分类和特性

(1) 系统的定义

能对信号进行存储、转化、传输和处理的物理装置。

(2) 系统的分类

按照系统特性的不同,可以将系统划分成不同的类型,如线性系统与非线性系统,时变系统与时不变系统,因果系统与非因果系统,稳定系统与不稳定系统,有记忆系统与无记忆系统等。

(3) 系统的特性

• 系统的线性性

线性特性包括齐次性和可加性,线性连续时间系统满足:

若 $a_1 f_1(t) \rightarrow a_1 y_1(t)$, $a_2 f_2(t) \rightarrow a_2 y_2(t)$, 其中 a_1, a_2 为任意常数,

则 $a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \rightarrow a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$,

线性离散时间系统满足:

若 $a_1 f_1(n) \rightarrow a_1 y_1(n)$, $a_2 f_2(n) \rightarrow a_2 y_2(n)$

则 $a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) \rightarrow a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n)$ 其中 a_1, a_2 为任意常数。

• 系统的时不变性

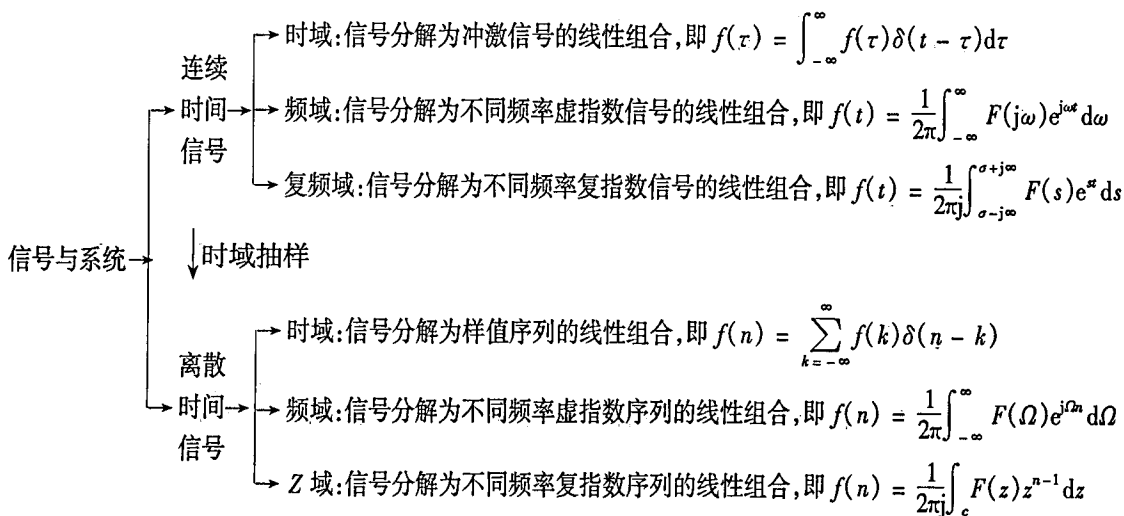
系统的时不变性是指系统在零状态条件下,输出响应与输入激励的关系不随输入激励作用于系统的时间起点而变化:对连续时间系统,如果 $f(t) \rightarrow y_f(t)$, 则 $f(t - t_0) \rightarrow y_f(t - t_0)$; 对离散时间系统,如果 $f(n) \rightarrow y_f(n)$, 则 $f(n - n_0) \rightarrow y_f(n - n_0)$, 其中 t_0, n_0 为任意常数。

• 系统的因果性:系统在任何时刻的输出仅取决于输入的当前和过去时刻的值,而与输入的未来时刻的值无关。

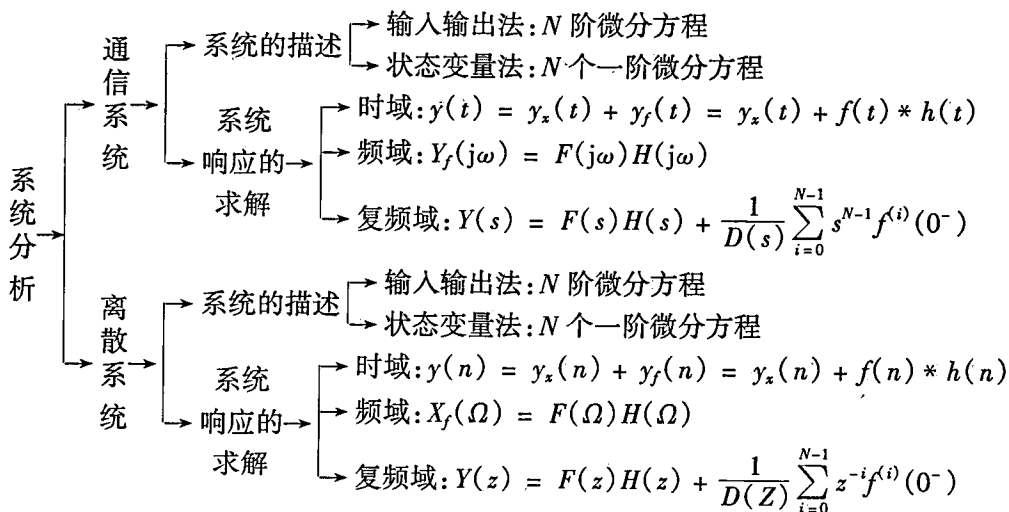
• 系统的稳定性:系统满足输入有界,输出也有界。

3. 信号与系统分析方法概述

信号与系统分析主要包括信号分析和系统分析两部分内容。信号分析的核心是信号分解,即将信号分解为一些基本信号的线性组合,通过研究基本信号的特性和信号的线性组合关系来研究复杂信号的特性。信号分析的主要内容可以概括为:



系统分析的首要任务就是建立系统的数学模型,求解线性时不变系统的输出响应。系统分析的主要内容可以概括为:



1.2 基础题

【题 1.1】 (国防科技大学 2006 考研试题) 填空题

- (1) 功率有限信号的能量为_____, 能量有限信号的平均功率为_____。
- (2) 线性系统的定义为: _____, _____, _____。
- (3) 一个系统输入与输出的关系式为 $y(t) = e^{f(t)}$, 则该系统为_____、_____、_____系统。

【解答】

- (1) $\infty, 0$ 。
- (2) 可分解性, 零输入响应线性, 零状态响应线性。
- (3) 非线性、时不变、因果。

【分析】

(1) 由功率有限信号定义: 如果信号 $f(t)$ 的平均功率满足 $0 < P < \infty$ (且 $E = \infty$), 称 $f(t)$ 为功率有限信号。由能量有限信号定义: 如果信号 $f(t)$ 的能量满足 $0 < E < \infty$ (且 $P = 0$), 称 $f(t)$ 为能量有限信号。

(2) 凡是具有分解性、零输入响应线性和零状态响应线性的系统, 就称其为线性系统。这三个条件缺一不可。

(3) 根据系统的线性性、时不变性及因果性定义, 由于该系统有

$$T[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a^{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)}$$

而

$$a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) = a_1 a^{f_1(t)} + a_2 a^{f_2(t)}$$

故

$$T[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] \neq a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

该系统为非线性系统。

而由于 $T[f(t - t_0)] = a^{f(t - t_0)} = y(t - t_0)$, 故该系统为时不变系统。

该系统输出变化和输入变化同时发生, 故该系统为因果系统。

【题 1.2】 (西安电子科技大学 2005 考研试题) 选择题四选一

(1) 某连续系统输入输出关系为 $y(t) = \int_{-\infty}^{2t-1} f(\tau) d\tau$, 该系统为_____。

- A. 线性时变系统 B. 线性时不变系统
C. 非线性时变系统 D. 非线性时不变系统

(2) 试确定序列 $f(n) = 2\cos(\frac{\pi}{3}n) + 3\sin(\frac{\pi}{4}n)$ 是否为周期序列。若是, 其周期 N 为_____。

- A. 不是周期序列 B. 是, $N = 24$ C. 是, $N = 12$ D. 是, $N = 8$

【解答】

(1) A (2) B

【分析】

(1) 该系统满足齐次性和可加性, 即

$$af(t) \rightarrow \int_{-\infty}^{2t-1} af(\tau) d\tau = a \int_{-\infty}^{2t-1} f(\tau) d\tau = ay(t)$$

且

$$\begin{aligned} af_1(t) + bf_2(t) &\rightarrow \int_{-\infty}^{2t-1} af_1(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{2t-1} bf_2(\tau) d\tau \\ &= a \int_{-\infty}^{2t-1} f_1(\tau) d\tau + b \int_{-\infty}^{2t-1} f_2(\tau) d\tau = ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

故为线性系统。

又因为

$$\begin{aligned} f(t - t_0) &\rightarrow \int_{-\infty}^{2t-1} f(\tau - t_0) d\tau \stackrel{\text{令 } \tau - t_0 = h}{=} \int_{-\infty}^{2t-1-t_0} f(h) dh \\ &\stackrel{\text{令 } h = \tau}{=} \int_{-\infty}^{2t-1-t_0} f(\tau) d\tau \neq y(t - t_0) \end{aligned}$$

所以,该系统为时变系统。

(2) 任意一个周期序列具有谐波离散性,即周期序列中的所有频率都为基波频率的整数倍,也就是说,任意两个频率之比为一个有理数。基波频率是所有频率的最大公约数。本题该序列 $f(n)$ 含有两个频率分别为 $\pi/3$ 和 $\pi/4$,二者之比为有理数 $4/3$,故该序列为周期序列。最大公约数为 $\pi/12$,即基波频率为 $\pi/12$,周期为 $N = \frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{2\pi}{\pi/12} = 24$ 。

【题 1.3】(中山大学 2005 考研试题)某连续时间系统和离散时间系统的输入-输出关系分别由下列两式描述:

$$(1) y(t) = f(t) \cdot f(t-1)$$

$$(2) y(n) = nf(n)$$

问这两个系统是否为线性系统,并加以证明。

【解答】

(1) 非线性系统;(2) 线性系统。

【分析】

(1) 该系统不满足齐次性,即

$$af(t) \rightarrow af(t) \cdot af(t-1) = a^2 f(t) \cdot f(t-1) = a^2 y(t) \neq ay(t)$$

故为非线性系统。

(2) 该系统满足齐次性和可加性,即

$$af(n) \rightarrow naf(n) = an f(n) = ay(n)$$

且

$$af_1(n) + bf_2(n) \rightarrow naf_1(n) + nb f_2(n) = ay_1(n) + by_2(n)$$

故为线性系统。

【题 1.4】(中国传媒大学 2005 考研试题)填空

(1)“离散信号”中“离散”一词的含义是_____。

(2)信号 $f(t)$ 在区间 $(-\infty, \infty)$ 满足_____条件时,则称该信号 $f(t)$ 为能量信号。

【解答】

(1) 信号的定义域(时间)是离散的

(2) $0 < E < \infty$ (且 $P = 0$)

[分析]

由离散信号和能量信号定义可得结论。

[题 1.5] (北京航空航天大学 2001 年考研试题)已知如下系统,在表格中标明系统特性,符合者打“√”,不符合者打“×”:

$$(1) \frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = f(t)$$

$$(3) \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = f(t+10)$$

$$(2) \frac{dy(t)}{dt} + t^2 y(t) = f(t)$$

$$(4) y(t) = f(t+10) + f^2(t)$$

[解答]

特性	信 号			
	(1)	(2)	(3)	(4)
线性	√	√	√	×
时不变	√	×	√	√
因果	√	√	×	×
记忆的	√	√	√	√

[分析]

满足线性性,即齐次性和可加性的系统皆为线性系统。数学上已证明标准形式的微分方程满足线性性,故式(1)、(2)、(3)为线性系统,式(4)中含有 $f^2(t)$,故该系统为非线性系统。

在描述系统的方程中若参数不随时间变化,则该系统为时不变系统。式(1)、(3)、(4)满足此条件,故为时不变系统,式(2)中有一个参数为 t^2 ,故该系统为时变系统。

输出与未来时刻的输入无关的系统为因果系统,式(1)、(2)满足此条件,为因果系统;式(3)、(4)中含有分量 $f(t+10)$,表明所代表的系统输出与未来时刻的输入有关,所以为非因果系统。

如果系统的输出仅与当前时刻的输入有关,系统为无记忆系统,否则为有记忆系统。式(1)、(2)、(3)、(4)中都含有记忆元件,如 $f'(t)$ 、 $f(t+10)$,故皆为有记忆系统。

[题 1.5] (浙江大学 2003 年考研试题)选择题四选一

(1) $y(n) = nf(n)$ 的系统是_____

A. 记忆系统 B. 不可逆系统 C. 时变系统 D. 不稳定系统

(2) $y(n) = f(-n+1)$ 的系统不是_____

A. 稳定系统 B. 非因果系统 C. 非线性系统 D. 时不变系统

(3) $y(t) = x^2(t)$ 的系统是_____

A. 记忆系统 B. 不可逆系统 C. 线性系统 D. 不稳定系统

[解答]

(1)C (2)C (3)B

[分析]

(1)见[题 1.3](2)分析。

(2)因该系统为线性系统。

(3)输入与输出一一对应,系统为可逆系统。 $y(t) = f^2(t)$ 不是一一对应的,故为不可逆系

统。

[题 1.7] (重庆大学 2005 考研试题)判断下列系统的因果性、线性及时不变性,并说明理由。

其中, $u(t)$ 为单位阶跃函数

$$(1) y(t) = f(1-t) \quad (2) y(t) = \sin[f(t)]u(t)$$

[解答]

(1) 线性、时变、非因果系统

(2) 非线性、时变、因果系统

[分析]

(1) 该系统满足齐次性和可加性,即

$$af(t) \rightarrow af(1-t) = ay(t)$$

且

$$af_1(t) + bf_2(t) \rightarrow af_1(1-t) + bf_2(1-t) = ay_1(t) + by_2(t)$$

故为线性系统。

因为

$$f(t-t_0) \rightarrow f(1-t-t_0) \neq f(1-t+t_0) = y(t-t_0)$$

所以该系统为时变系统。

当 $t = -1$, 由方程可得 $y(-1) = f(0)$, $t = -1$ 时刻的输出与 $t = 0$ 时刻的输入有关, 即该系统为非因果系统。

(2) 该系统不满足齐次性, 即

$$af(t) \rightarrow \sin[af(t)]u(t) \neq ay(t)$$

故为非线性系统;

因为

$$f(t-t_0) \rightarrow \sin[f(t-t_0)]u(t) \neq \sin[f(t-t_0)]u(t-t_0) = y(t-t_0)$$

所以该系统为时变系统。

该系统为即时系统, 故系统为因果系统。

[题 1.8] (北京航空航天大学 2001 年考研试题)判断下列叙述的正误, 正确的打“√”, 错误的打“×”。

(1) 两个周期信号之和一定是周期信号。 ()

(2) 所有非周期信号都是能量信号。 ()

(3) 若 $f[n]$ 是周期序列, 则 $f[2n]$ 也是周期序列。 ()

* (4) 若 $y(t) = f(t) * h(t)$, 则 $y(2t) = 2f(2t) * h(2t)$ 。 ()

* (5) 如果 $f(t)$ 和 $y(t)$ 均为奇函数, 则 $f(t) * y(t)$ 为偶函数。 ()

* (6) 卷积的方法只适用于线性时不变系统的分析。 ()

* (7) 两个线性时不变系统的级联构成的系统是线性时不变的。 ()

* (8) 两个非线性系统的级联构成的系统也是非线性的。 ()

* (9) 一个信号存在拉氏变换, 就一定存在傅氏变换。 ()

* (10) $f(t)$ 为周期偶函数, 则其傅里叶级数只有偶次谐波。 ()

[注(*)号的题为其他章节的题, 在此给出以便参考]

[解答]

(1) × (2) × (3) √ (4) √ (5) √ (6) √ (7) √ (8) × (9) × (10) ×

[分析]

(1) 如 $f(t) = \cos t + \sin \sqrt{2}t$, $\cos t$, $\sin \sqrt{2}t$ 都是周期信号, 但 $f(t)$ 确是非周期信号, 分析见 [题 1.2](2)。

(2) 如 $f(t) = tu(t)$, 虽是非周期信号, 但也不是能量信号。

(9) 如 $f(t) = e^{3t}$ 拉氏变换存在, 但傅氏变换不存在, 不满足狄里赫莱条件。

(10) 周期信号满足半波对称时, 其傅里叶级数才只含有偶次谐波。

[题 1.9] (华中科技大学 2003 年、2004 年考研试题)

判断下列叙述的正误, 正确的在圆括号内打“√”, 错误的在圆括号内打“×”。

2003 年考研试题:

(1) $T[f(n)] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} f(k)$ 为因果系统(); 非线性系统()。

(2) $f(n) = A \cos(\frac{3}{7}\pi n - \frac{\pi}{6})$, $f(n)$ 为周期序列(); 周期为 2π ()。

2004 年考研试题:

(3) 一离散时间系统的输入与输出关系为 $y(n) = T[f(n)] = nf(n)$, 该系统为无记忆系统(), 线性系统(), 因果关系(), 时不变系统(), 稳定系统()。

(4) $f(t) = \cos t + \sin \sqrt{2}t$, 该信号为周期信号(), 周期为 2π ();

$f(n) = \sin \frac{\pi}{4}n + \cos \frac{\pi}{3}n$, 该信号为周期信号(), 周期为 12()。

[解答]

(1) ×, × (2) √, × (3) √, √, √, ×, × (4) ×, ×, √, ×

[分析]

(1) 输出与未来时刻的输入有关, 故该系统为非因果系统; 方程满足齐次性和可加性, 故为线性系统。

(2) $\Omega = \frac{3}{7}\pi$, $N = \frac{2\pi k}{\Omega} = \frac{14}{3}k$, 当 $k=3$ 时, 可得 $N=14$, 即为周期序列, 周期序列为 14。

(3) 分析见 [题 1.3](2)。

(4) $f(t)$ 包含两个频率 1 和 $\sqrt{2}$, 二者之比不是有理数, 找不出最大公约数, 即基频, 所以 $f(t)$ 不是周期信号。对 $f(n)$ 的分析见 [题 1.2](2)。

1.3 提高题(综合题)

[题 1.10] (大连理工大学 2005 年考研试题) 选择题

(1) 已知离散时间信号 $f(n) = \cos(\frac{\pi}{2}n)\cos(\frac{\pi}{4}n)$, 试判断 $f(n)$ 为()信号。若其为周期信号, 则其周期为()。

A. 周期性, 8 B. 周期性, 4 C. 周期性, 2 D. 非周期性

(2) 已知系统有下列输入输出关系式表示: $y(t) = f(3t)$, 则该系统为()系统。

A. 线性、时变、非因果 B. 线性、时不变、非因果

C. 非线性、时变、因果

D. 非线性、时变、非因果

[解答]

(1) A (2) A

[分析]

(1) $f(n)$ 包含两个频率 $\frac{3\pi}{4}$ 和 $\frac{\pi}{4}$, 二者之比为有理数, 最大公约数为 $\frac{\pi}{4}$, 周期为 $N = \frac{2\pi}{\Omega_0} =$

$$\frac{2\pi}{\pi/4} = 8。$$

(2) 该系统满足齐次性和可加性, 即

$$\because f(t) \rightarrow f(3t) = y(t) \quad \therefore af(t) \rightarrow af(3t) = ay(t)$$

且

$$af_1(t) + bf_2(t) \rightarrow af_1(3t) + bf_2(3t) = ay_1(t) + by_2(t)$$

故线性系统。

因为

$$f(t - t_0) \rightarrow f(3t - t_0) \neq f(3t - 3t_0) = y(t - t_0)$$

所以该系统为时变系统。

当 $t = 1$ 时, 由方程可得 $y(1) = f(3)$, $t = 1$ 时刻的输出与 $t = 3$ 时刻的输入有关, 即该系统为非因果系统。

[题 1.11] (湖南大学 2005 考研试题) 某连续时间系统的输入输出信号变换关系为 $y(t) = \int_{-\infty}^t f(t - \tau) d\tau$, 试确定该系统是否线性? 是否时不变? 是否因果? 若是线性时不变系统, 试求出它的单位冲激响应 $h(t)$, 并画出 $h(t)$ 的大致波形。

[解答]

该系统满足齐次性和可加性, 即

$$af(t) \rightarrow \int_{-\infty}^t af(t - \tau) d\tau = a \int_{-\infty}^t f(t - \tau) d\tau = ay(t)$$

且

$$af_1(t) + bf_2(t) \rightarrow \int_{-\infty}^t af_1(t - \tau) d\tau + \int_{-\infty}^t bf_2(t - \tau) d\tau = ay_1(t) + by_2(t)$$

故为线性系统。

因为

$$f(t - t_0) \rightarrow \int_{-\infty}^t f(t - \tau - t_0) d\tau \stackrel{\text{令 } \tau + t_0 = u}{=} \int_{-\infty}^{t+t_0} f(t - u) du = y(t + t_0) \neq y(t - t_0)$$

所以该系统为时变系统。

该系统输出只与当前和以前时刻的输入有关, 故系统为因果系统。

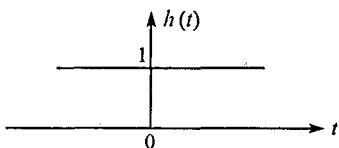
由方程可得单位冲激响应 $h(t)$ 为

$$h(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t - \tau) d\tau \stackrel{\text{令 } t - \tau = u}{=} \int_{+\infty}^0 \delta(u) du = \int_0^{+\infty} \delta(u) du = 1$$

$h(t)$ 的大致波形如题 1.11 图。

[题 1.12] (东南大学 2004 考研试题) 假设某系统输入 $f(t)$ 和输出信号 $y(t)$ 之间的关系为

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - nT)$$



题 1.11 图

试问这个系统是否是线性系统？是否是时不变系统？证明你的结论。

【解答】

该系统满足齐次性和可加性，即

$$af(t) \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} af(t)\delta(t-nT) = a \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-nT) = ay(t)$$

且

$$\begin{aligned} af_1(t) + bf_2(t) &\rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} af_1(t)\delta(t-nT) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} bf_2(t)\delta(t-nT) \\ &= ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

故为线性系统。

因为

$$f(t-t_0) \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t-t_0)\delta(t-nT) \neq \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t-t_0)\delta(t-t_0-nT) = y(t-t_0)$$

所以该系统为时变系统。

【题 1.13】（南开大学 2004 考研试题）— LTI 因果系统，当激励 $f_1(t) = u(t)$ 时，系统的全响应为 $y_1(t) = (3e^{-t} + 4e^{-2t})u(t)$ ，当激励 $f_2(t) = 2u(t)$ 时，系统的全响应为 $y_2(t) = (5e^{-t} - 3e^{-2t})u(t)$ ，求在相同的初始条件下，激励为 $f_3(t) = u(t-2)$ 时的全响应 $y_3(t)$ 。

【解答】

设相同的初始条件为 $y(0)$ 。

系统为因果线性时不变系统，由题意可知

$$y(0), f_1(t) = u(t) \rightarrow y_1(t) = (3e^{-t} + 4e^{-2t})u(t) \quad (1)$$

$$y(0), f_2(t) = 2u(t) \rightarrow y_2(t) = (5e^{-t} - 3e^{-2t})u(t) \quad (2)$$

由系统的线性性，式(2) - 式(1)，得

$$y(0) = 0, f(t) = u(t) \rightarrow y(t) = (2e^{-t} - 7e^{-2t})u(t) \quad (3)$$

式(1) - 式(3)，得

$$y(0), f(t) = 0 \rightarrow y(t) = (e^{-t} + 11e^{-2t})u(t) \quad (4)$$

由系统的时不变性，根据式(3)得

$$y(0) = 0, f_3(t) = u(t-2) \rightarrow y(t) = [2e^{-(t-2)} - 7e^{-2(t-2)}]u(t-2) \quad (5)$$

式(5) + 式(4)即为全响应：

$$y_3(t) = (e^{-t} + 11e^{-2t})u(t) + [2e^{-(t-2)} - 7e^{-2(t-2)}]u(t-2)$$

第二单元

连续时间信号与系统的时域分析

2.1 考试要点

1. 基本信号的时域描述

(1) 普通信号

普通信号可以用一个复指数信号统一概括,即

$$f(t) = Ke^{st}, \quad -\infty < t < +\infty$$

式中 $s = \sigma + j\omega$, K 一般为实数,也可为复数。根据 σ 与 ω 的不同情况, $f(t)$ 可表示下列几种常见的普通信号。

$$f(t) = Ke^{st} \Rightarrow \begin{cases} \text{当 } s = 0 \text{ 时} & f(t) = K (\text{直流信号}) \\ \text{(即 } \sigma = 0, \omega = 0 \text{ 时)} & \\ \text{当 } s = \text{实数时} & f(t) = Ke^{\sigma t} (\text{实指数信号}) \\ \text{(即 } \sigma \neq 0, \omega = 0 \text{ 时)} & \\ \text{当 } s = \text{虚数时} & f(t) = K \cos \omega t + jK \sin \omega t \\ \text{(即 } \sigma = 0, \omega \neq 0 \text{ 时)} & (\text{正弦信号与余弦信号}) \\ \text{当 } s = \text{复数时} & f(t) = Ke^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t) \\ \text{(即 } \sigma \neq 0, \omega \neq 0 \text{ 时)} & (\text{振幅变化的正、余弦信号}) \end{cases}$$

(2) 奇异信号

常见的连续时间奇异信号有单位冲激偶信号 $\delta'(t)$ 、单位冲激信号 $\delta(t)$ 、单位阶跃信号 $u(t)$ 和斜坡信号 $r(t)$ 。任意的连续信号 $f(t)$ 可用冲激信号 $\delta(t)$ 表示,冲激信号 $\delta(t)$ 是信号进行时域分析的本征信号。

冲激信号的定义:

$$\begin{cases} A\delta(t) = 0, & t \neq 0 \\ A\delta(t) \rightarrow \infty, & t = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} A\delta(t) dt = A \end{cases}$$

式中 A 为实数。若 $A = 1$, 冲激信号 $A\delta(t)$ 称为单位冲激信号 $\delta(t)$ 。

冲激信号的主要性质:

① 筛选特性

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0) \quad t_0 \text{ 为实常数}$$

② 取样特性

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

③ 展缩特性

$$\delta(at + b) = \frac{1}{|a|} \delta\left(t + \frac{b}{a}\right), \quad a, b \text{ 为实常数}$$

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

④ 冲激信号、阶跃信号、斜波信号和冲激偶信号之间关系

$$\delta'(t) = \frac{d}{dt}[\delta(t)] \quad \delta(t) = \frac{d}{dt}[u(t)] \quad u(t) = \frac{d}{dt}[r(t)]$$

$$\int_{-\infty}^t \delta'(\tau) d\tau = \delta(t) \quad \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t) \quad \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = r(t)$$

冲激偶信号的定义:

$$\delta'(t) = \begin{cases} \frac{d}{dt}\delta(t), & t=0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

冲激偶信号的主要性质:

① 筛选特性

$$f(t) \delta'(t - t_0) = f(t_0) \delta'(t - t_0) - f'(t_0) \delta(t - t_0), \quad t_0 \text{ 为实常数}$$

② 取样特性

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta'(t - t_0) dt = -f'(t_0), \quad t_0 \text{ 为实常数}$$

③ 展缩特性

$$\delta'(at + b) = \frac{1}{a|a|} \delta'\left(t + \frac{b}{a}\right), \quad a, b \text{ 为实常数}$$

$$\delta'(-t) = -\delta'(t)$$

2. 连续时间信号的时域运算

信号的基本运算:

(1) 信号相加:

n 个信号 $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ 相加构成一个新的信号 $y(t)$, 即 $y(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$.

(2) 信号相乘:

n 个信号 $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ 相乘构成一个新的信号 $y(t)$, 即 $y(t) = f_1(t) \times f_2(t) \times \dots \times f_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$.

(3) 微分:

$$y(t) = \frac{df(t)}{dt}$$

(4) 积分:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$$