

星级题库 教辅图书里的常春藤
星级代表难易程度 时间检验熟练程度

依据课改要求
紧扣升学手册
注重双基训练
凸现能力培养

考点全面 题型多变
编排合理 条理清晰
强调经典 注重创新
便于同步 适合迎考

上海科技教育出版社

高中

课改版

五星级题库

数学

主编 沈子兴
编者 任升录 叶文俊
曹土清 黄根初
汪海峰 徐 宁





上架建议:文化教育

ISBN 978-7-5428-4454-5



9 787542 844545 >

易文网: www.ewen.cc

ISBN 978- 7-5428-4454-5/O·525

定价: 24.50 元

课改版

高中

五星级题库

数学

主编 沈子兴

编者 任升录 叶文俊 曹土清

黄根初 汪海峰 徐 宁

上海科技教育出版社



高中五星级题库 数学
(课改版)

主 编：沈子兴
编 者：任升录 叶文俊 曹士清
黄根初 汪海峰 徐 宁

出版发行：上海世纪出版股份有限公司
上海科技教育出版社
(上海市冠生园路 393 号 邮政编码 200235)

网 址：www.ewen.cc
www.sste.com

经 销：各地新华书店
印 刷：常熟市文化印刷有限公司
开 本：787×1092 1/16
字 数：415 000
印 张：17.25
版 次：2007 年 8 月第 1 版
印 次：2007 年 8 月第 1 次印刷
本次印数：5 000
书 号：ISBN 978-7-5428-4454-5/O·525
定 价：24.50 元



写在前面

关于“课改版星级题库”

“课改版星级题库”由上海市特级教师根据上海二期课程改革各学科的《课程标准》，并兼顾全国《课程标准》，按学科的知识块分单元编写。在每个单元里，对所有的题目均标明星级与解题时间。星级高低代表题目难易程度，低星级代表毕业要求，高星级代表升学、竞赛要求。标明的解题时间是指中等水平学生解答题目所需大致时间。

“课改版星级题库”包括“小学三星级题库”（含语文、数学、英语3册）、“初中四星级题库”（含语文、数学、英语、物理、化学5册）、“高中五星级题库”（含语文、数学、英语、物理、化学5册）。其中英语听力部分配有磁带。

致 家 长

“星级题库”是上海科技教育出版社的教辅品牌产品，自1993年首创出版以来，一版再版，一印再印，经久不衰，历时十三四年之久，已成为教辅书中的常青树，并助数百万学子成功进入理想的高一阶段学校。“星级题库”成功的奥秘除了自身所具有的鲜明特点外，更与出版社不断修订、不断提高质量密切相关。“星级题库”的每一次修订改版，就像一次换血，使其更具活力，更贴近学生学习、升学实际，更符合教学理念和教学要求，更适合复习迎考。此次全新改版的“星级题库”，内容全，题目新，题型全，一定可以帮助你的孩子升入理想的学校。

致 教 师

“课改版星级题库”所收录的题型涵盖升学考试的各种形式，所编写的题目不仅注重对学生双基的训练，而且更加注重对学生能力的培养。“星级题库”编排合理，条理清晰，既方便你平时教学布置作业，又方便你系统复习或专项复习时组织各类练习卷。

致 同 学

“课改版星级题库”按各学科的知识块划分单元，每一单元都收集了大量典型题和近几年的升学考试题，既可配合教材同步使用，又可供复习使用。每道题目均标明星级及解题时间，可供你有的放矢地进行学习和复习，自测解题能力和熟练程度，帮你提高学习效率。

我们的心愿

我们衷心祝愿“课改版星级题库”能成为学生平时学习和复习的基本“食粮”，为学生实现心愿助一臂之力；我们也衷心希望能得到老师、学生和家长的使用心得和意见、建议，让“星级题库”在今后发挥更好的作用。

目 录

一、集合与命题	1
1. 集合及其运算	1
2. 命题与充要条件	6
二、不等式	9
1. 不等式的解法	9
2. 不等式的性质与证明	14
3. 不等式的应用	17
三、函数的基本性质	20
1. 函数的概念	20
2. 函数的运算	22
3. 函数关系的建立	24
4. 函数的基本性质	26
四、幂函数、指数函数、对数函数	39
1. 幂函数的图像与性质	39
2. 指数函数的图像与性质	42
3. 指数、对数的运算	47
4. 反函数	49
5. 对数函数的图像与性质	54
6. 简单的指数、对数方程	61
五、三角比与三角函数	65
1. 任意角的三角比	65
2. 同角三角比的关系和诱导公式	67
3. 两角和与差的三角比	69
4. 倍角、半角的三角公式	71
5. 解斜三角形	73
6. 三角函数的图像与性质	76



7. 反三角函数与最简三角方程	80
六、数列、极限与数学归纳法	84
1. 数列的基本概念	84
2. 等差数列与等比数列	86
3. 数列求和	90
4. 数列极限	93
5. 数列的应用	96
6. 数学归纳法	101
7. 算法初步	105
七、平面向量	110
1. 平面向量的概念与运算	110
2. 平面向量的应用	114
八、直线方程	116
1. 直线方程的形式及位置关系	116
2. 距离与角	119
九、曲线与方程	122
1. 圆的方程	122
2. 椭圆方程及性质	125
3. 双曲线方程及性质	131
4. 抛物线方程及性质	135
5. 坐标轴的平移	140
十、排列组合、概率、二项式定理	145
1. 排列与组合	145
2. 概率统计	147
3. 二项式定理及应用	149
十一、复数	152
1. 复数的概念及运算	152
2. 复数与方程	156
十二、空间图形	160
1. 直线与平面的位置关系	160
2. 简单几何体	165

十三、理科选学内容.....	172
1. 参数方程与极坐标	172
2. 不等式的证明	176
3. 和差化积与积化和差	179
4. 空间向量的运算及应用	182
十四、文科选学内容.....	189
1. 简单的线性规划	189
2. 工序流程图	193
3. 简单决策	196
参考答案.....	200

一、集合与命题

1. 集合及其运算



知识的积累

- ★ 1. 设集合 $M = \left\{ x \mid x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z} \right\}$, $N = \left\{ x \mid x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$, 则 (). [1]
(A) $M=N$ (B) $M \supsetneq N$ (C) $M \subsetneq N$ (D) $M \cap N = \emptyset$
- ★ 2. 设集合 $A = \{x \mid |x-3| \leq 4\}$, $B = \{y \mid y = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}\}$, 则 $A \cap B$ 是 (). [1]
(A) $\{0\}$ (B) $\{2\}$ (C) $\emptyset$ (D) $[2, 7]$
- ★ 3. 集合 $A = \{x \mid x = 5k+3, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 7k+2, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 $A \cap B$ 中的最小正元素是 (). [1]
(A) 13 (B) 16 (C) 23 (D) 58
- ★ 4. 设 M, P 是全集 U 的子集, 且 $M \subseteq P$, 则必有 (). [1]
(A) $\complement_U M \subseteq \complement_U P$ (B) $(\complement_U M) \cup (\complement_U P) = U$
(C) $M \cap (\complement_U P) = \emptyset$ (D) $(\complement_U M) \cap P = \emptyset$
- ★ 5. 设 $A = \{1, 2\}$, 则满足 $X \cup A = \{1, 2, 3\}$ 的集合 X 的个数是 (). [1]
(A) 8 (B) 7 (C) 4 (D) 1
- ★ 6. 设集合 $A = \{x \mid |x-2| \leq 2, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{y \mid y = -x^2, -1 \leq x \leq 2\}$, 则 $\complement_{\mathbf{R}}(A \cap B) =$ (). [2]
(A) $\mathbf{R}$ (B) $\{x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq 0\}$
(C) $\{0\}$ (D) $\emptyset$
- ★ 7. 若不等式 $kx^2 - kx - 1 < 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 则 k 的取值范围是 (). [2]
(A) $-4 < k < 0$ (B) $-4 < k \leq 0$ (C) $k < -4$ 或 $k > 0$ (D) $k < -4$ 或 $k \geq 0$
- ★ 8. 已知集合 $M = \left\{ a \mid \frac{6}{5-a} \in \mathbf{N}^*, a \in \mathbf{Z} \right\}$, 则 M 是 (). [2]
(A) $\{-1, 2, 3, 4\}$ (B) $\{2, 3, 7, 8\}$
(C) $\{2, 3\}$ (D) $\{-1, 2, 3, 6, 7, 8, 11\}$
- ★ 9. 如果集合 $M = \{(x, y) \mid x+y=2\}$, $N = \{(x, y) \mid x-y=4\}$, 则集合 $M \cap N$ 为 (). [1]
(A) $x=3, y=-1$ (B) $(3, -1)$ (C) $\{3, -1\}$ (D) $\{(3, -1)\}$
- ★ 10. 集合 $A = \{a^2, a+1, -3\}$, $B = \{a-3, 2a-1, a^2+1\}$, 若 $A \cap B = \{-3\}$, 则 a 的值为 (). [1]
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) -1

- ★ 11. 集合 $M = \{y | y = x^2 - 1, x \in \mathbf{N}^*\}$, $N = \{y | y = x^2 - 4x + 3, x \in \mathbf{N}\}$, 则 (). [2]
 (A) $M = N$ (B) $M \subseteq N$ (C) $N \subseteq M$ (D) $M \subsetneq N$
- ★ 12. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 集合 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 5\}$, 则 $\complement_U A \cap \complement_U B =$ _____, $\complement_U A \cup \complement_U B =$ _____. [2]
- ★ 13. 若 $B = \{x | x = a\sqrt{2} + b, a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}\}$, 则 $\frac{1}{3 - 2\sqrt{2}}$ _____ B. [1]
- ★ 14. 设 $A = \{x | -1 < x < 3\}$, $B = \{x | x > a\}$, 若 $A \not\subseteq B$, 则 a 的取值范围是 _____. [1]
- ★ 15. 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{a | \text{二次方程 } ax^2 - x + 1 = 0 \text{ 有实根}\}$, 则 $\complement_U A =$ _____. [1]
- ★ 16. 设 $U = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$ 且 $A = \{|a + 7|, 2\}$, $\complement_U A = \{5\}$, 则 a 的值为 _____. [2]
- ★ 17. 已知集合 $\{ \text{关于 } x \text{ 的方程 } ax^2 + 2x + 1 = 0 \text{ 的解} \}$ 只含一个元素, 则 $a =$ _____. [1]



知识的应用

- ★★ 1. 设 M, P 是两个非空集合, 定义 M 与 P 的差集 $M - P = \{x | x \in M \text{ 且 } x \notin P\}$, 则 $(M \cup P) - (M - P)$ 等于 (). [2]
 (A) P (B) $M \cap P$ (C) $M \cup P$ (D) M
- ★★ 2. 已知全集为 $\mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | f(x) = 0\}$, $B = \{x | g(x) = 0\}$, 则不等式 $f(x) \cdot g(x) \neq 0$ 的解集为 (). [2]
 (A) $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap (\complement_{\mathbf{R}} B)$ (B) $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cup (\complement_{\mathbf{R}} B)$
 (C) $(B \cap \complement_{\mathbf{R}} A) \cup (A \cap \complement_{\mathbf{R}} B)$ (D) $(B \cup \complement_{\mathbf{R}} A) \cup (A \cup \complement_{\mathbf{R}} B)$
- ★★ 3. 设集合 $M = \left\{x \mid 0 \leq x \leq \frac{3}{4}\right\}$, $N = \left\{x \mid \frac{2}{3} \leq x \leq 1\right\}$, 如果把 $b - a$ 叫做集合 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 的“长度”, 则集合 $M \cap N$ 的“长度”是 (). [2]
 (A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$
- ★★ 4. 集合 $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, A 是 S 的一个子集. 当 $x \in A$ 时, 若有 $x - 1 \notin A$ 且 $x + 1 \notin A$, 则称 x 为 A 的一个“孤立元素”, 那么 S 中无“孤立元素”的 4 元子集的个数是 (). [2]
 (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7
- ★★ 5. 已知集合 $A = \{1, 3, x\}$, $B = \{1, x^2\}$, $A \cup B = \{1, 3, x\}$, x 的不同取值有 () 个. [2]
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- ★★ 6. 若全集为 U , 集合 A, B 是 U 的子集, 定义 A 与 B 的运算: $A * B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B \text{ 且 } x \notin A \cap B\}$, 则 $(A * B) * A =$ _____. [2]
 (A) A (B) B (C) $(\complement_U A) \cap B$ (D) $A \cap (\complement_U B)$
- ★★ 7. 若实数集 $\mathbf{R}$ 为全集, 集合 $P = \{x | f(x) = 0\}$, $Q = \{x | g(x) = 0\}$, $H = \{x | h(x) = 0\}$, 则方程 $\frac{f^2(x) + g^2(x)}{h(x)} = 0$ 的解集是 (). [2]
 (A) $P \cap Q \cap (\complement_{\mathbf{R}} H)$ (B) $P \cap Q$
 (C) $P \cap Q \cap H$ (D) $P \cap Q \cup H$
- ★★ 8. 设全集为 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x | x^2 - 5x - 6 > 0\}$, $B = \{x | |x - 5| < a, a \text{ 为常数}\}$, 且 $11 \in B$, 则

().【3】

(A) $(\complement_U A) \cap B = \mathbf{R}$

(B) $A \cup (\complement_U B) = \mathbf{R}$

(C) $(\complement_U A) \cup (\complement_U B) = \mathbf{R}$

(D) $A \cup B = \mathbf{R}$

★★ 9. 已知集合 $A = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$, $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, $C = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$, 则 A, B, C 之间的包含关系是().【3】

(A) $C \subsetneq B \subsetneq A$

(B) $A \subsetneq B \subsetneq C$

(C) $C \subsetneq A \subsetneq B$

(D) $B \subsetneq A \subsetneq C$

★★ 10. 设 m, n 为自然数, $m > n$, 集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, m\}$, 集合 $B = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, 满足 $B \cap C \neq \emptyset$ 的 A 的子集 C 共有 _____ 个.【2】

★★ 11. 已知集合 $A = \{a \mid a = 5x + 1, x \in \mathbf{N}^*\}$, $B = \{b \mid b = 7y + 2, y \in \mathbf{N}^*\}$, 则 $A \cap B$ 中最小的元素是 _____.【2】

★★ 12. 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid (x-1)(x-3) \leq 0\}$, $B = \{x \mid (x-1)(x-a) < 0\}$, 且 $A \supseteq B$, 则实数 a 的取值范围是 _____.【2】

★★ 13. 设集合 $A = \{(x, y) \mid \frac{y-3}{x-1} = 2, x, y \in \mathbf{R}\}$, $B = \{(x, y) \mid 4x + ay - 16 = 0\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 则实数 a 的取值为 _____.【2】

★★ 14. 设集合 $A = \{x \mid |x| < 4\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 > 0\}$, 则集合 $\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin A \cap B\} =$ _____.【2】

★★ 15. 若 $\left\{x \mid \frac{(x+a)(x+b)}{x-c} \geq 0\right\} = [-1, 2) \cup [3, +\infty)$, 则 $a+b =$ _____.【2】

★★ 16. 集合 $\left\{a, \frac{b}{a}, 1\right\}$, 也可表示为 $\{a^2, a+b, 0\}$, 则 $a^{2007} + b^{2008} =$ _____.【2】

★★ 17. 从自然数 $1 \sim 20$ 这 20 个数中, 任取 2 个数相加, 得到的和作为集合 M 的元素, 则 M 的非空真子集共有 _____ 个.【2】

★★ 18. 定义非空集合 A 的真子集的真子集为 A 的“孙集”, 则集合 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 的“孙集”有 _____ 个.【2】

★ 19. 若不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是 $\{x \mid \alpha < x < \beta\}$, 其中 $\beta > \alpha > 0$, 则不等式 $cx^2 - bx + a > 0$ 的解集是().【3】

(A) $\left\{x \mid \frac{1}{\alpha} < x < \frac{1}{\beta}\right\}$

(B) $\left\{x \mid -\frac{1}{\alpha} < x < -\frac{1}{\beta}\right\}$

(C) $\left\{x \mid \frac{1}{\beta} < x < \frac{1}{\alpha}\right\}$

(D) $\left\{x \mid -\frac{1}{\beta} < x < -\frac{1}{\alpha}\right\}$

★ 20. 若不等式 $|ax+2| < 6$ 的解集为 $(-1, 2)$, 则实数 a 等于().【2】

(A) 8

(B) 2

(C) -4

(D) -8

★ 21. 若关于 x 的不等式 $ax - b > 0$ 的解集为 $(1, +\infty)$, 则关于 x 的不等式 $\frac{ax+b}{x-2} > 0$ 的解集是().【2】

(A) $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

(B) $(-1, 2)$

(C) $(1, 2)$

(D) $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

★ 22. 若集合 $M = \{0, 2, 3, 7\}$, 集合 $N = \{x \mid x = ab, a, b \in M\}$, 则集合 N 的子集最多有 () 个.【2】

- (A) 16 (B) 32 (C) 64 (D) 128
- ★ 23. 已知集合 $M = \{(x, y) | y - 1 = k(x - 1), x, y \in \mathbf{R}\}$, 集合 $N = \{(x, y) | x^2 + y^2 - 2y = 0, x, y \in \mathbf{R}\}$, 那么 $M \cap N$ 中 (). [3]
- (A) 不可能有两个元素 (B) 至多有一个元素
(C) 不可能只有一个元素 (D) 必含无数个元素
- ★ 24. 某班有 50 人, 开设英语和日语两种外语课, 现规定每人至少选学一门, 估计报英语的人数占全班 80% 到 90% 之间, 报日语的人数占全班 32% 到 40% 之间. 设 M 是两门都学的人数的最大值, m 是两门都学的人数的最小值, 则 $M - m = ()$. [4]
- (A) 15 (B) 14 (C) 10 (D) 9
- ★ 25. 若 α, β 为关于 x 的方程 $x^2 - (k - 2)x + k^2 + 3k + 5 = 0$ 的两个实根, 则 $\alpha^2 + \beta^2$ 的最大值等于 _____. [3]
- ★ 26. 已知 $A = \left\{ a \left| a = \frac{n}{2^m}, m, n \in \mathbf{N} \right. \right\}$, $b \in A, c \in A$, 则 $b + c$ _____ A , bc _____ A . [3]
- ★ 27. 已知 $A = \left\{ x \left| \begin{cases} x^2 - 4x + 3 < 0, \\ x^2 - 6x + 8 < 0 \end{cases} \right. \right\}$, 集合 $B = \{x | 2x^2 - 9x + a < 0\}$, 若 $A \subseteq B$, 则 a 的取值范围是 _____. [3]
- ★ 28. 已知集合 $A = \{x | ax^2 - 3x + 2 = 0, a \in \mathbf{R}\}$, (1) 若 A 是空集, 求 a 的取值范围; (2) 若 A 中只有一个元素, 求 a 的值, 并把这个元素写出来; (3) 若 A 中至多只有一个元素, 求 a 的取值范围. [8]
- ★ 29. 已知集合 $A = \{x | x^2 + px + q = 0\}$, $B = \{x | qx^2 + px + 1 = 0\}$, 同时满足 ① $A \cap B \neq \emptyset$; ② $A \cap \complement_{\mathbf{R}} B = \{-2\}$ ($p, q \neq 0$). 求 p, q 的值. [8]
- ★ 30. 设集合 $A = \{x | |x - 2| < 1\}$, $B = \{x | |ax + 1| \leq 1 + a\}$, 若 $A \cup B = B$, 求实数 a 的取值范围. [8]
- ★ 31. 设 a, b 为整数, 集合 $E = \{(x, y) | (x - a)^2 + 3b \leq 6y\}$, 点 $(2, 1) \in E$, 但点 $(1, 0) \notin E$, $(3, 2) \in E$, 求 a, b 的值. [8]
- ★ 32. 记函数 $f(x) = \sqrt{2 - \frac{x+3}{x+1}}$ 的定义域为 A , $g(x) = \lg[(x - a - 1)(2a - x)]$ ($a < 1$) 的定义域为 B .
- (1) 求 A ; (2) 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围. [8]
- ★ 33. 设集合 $M = \left\{ x \left| \frac{ax - 5}{x^2 - a} < 0 \right. \right\}$.
- (1) 当 $a = 4$ 时, 求集合 M ;
(2) 若 $3 \in M$ 且 $5 \notin M$, 求实数 a 的取值范围. [8]
- ★ 34. 已知集合 $A = \{x | x = 3a + 5b, a, b \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{y | y = 7m + 10n, m, n \in \mathbf{Z}\}$, 试证: $A = B$. [8]
- ★ 35. 若集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 > 0, x \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x | 2x^2 + (5 + 2k)x + 5k < 0, x \in \mathbf{Z}\}$, 且 $A \cap B = \{-2\}$, 求实数 k 的取值范围. [8]
- ★ 36. 设 S 是实数组成的集合, 且当 $a \in S$ 时, $\frac{1}{1-a} \in S$.
- (1) 如果 $3 \in S$, 那么 S 中至少含有哪几个元素?

(2) S 能否为单元素集合?

(3) 如果 $a \in S$, 那么 S 中至少有哪些元素? [8]



能力的拓展

- ★★ 1. 集合 A, B 的并集 $A \cup B = \{a_1, a_2, a_3\}$, 当 $A \neq B$ 时, (A, B) 与 (B, A) 视为不同的对, 则这样的 (A, B) 对的个数有 (). [4]
 (A) 8 (B) 9 (C) 26 (D) 27
- ★★ 2. 集合 $A = \{a | a = 12m + 8n + 4l, m, n, l \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{b | b = 20p + 16q + 12r, p, q, r \in \mathbb{Z}\}$, 则 A, B 的关系为 (). [4]
 (A) $A = B$ (B) $A \not\subseteq B, B \not\subseteq A$ (C) $A \supseteq B$ (D) $A \subsetneq B$
- ★★ 3. 关于实数 x 的不等式 $\left|x - \frac{(a+1)^2}{2}\right| \leq \frac{(a-1)^2}{2}$ 与 $x^2 - 3(a+1)x + 2(3a+1) \leq 0$ (其中 $a \in \mathbb{R}$) 的解集依次记为 A 与 B , 求使 $A \subseteq B$ 的 a 的取值范围. [10]
- ★★ 4. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - ax + (a-1) = 0\}$, $C = \{x | x^2 - mx + 2 = 0\}$, 且 $A \cup B = A, A \cap C = C$, 求实数 a 的值和 m 的取值范围. [10]
- ★★ 5. 求至少含有两个元素的有限集合 $A \subseteq \mathbb{N}^*$, 使 A 中所有元素之和与所有元素之积相等. [10]
- ★★ 6. 设集合 $A = \{(x, y) | y^2 - x - 1 = 0\}$, $B = \{(x, y) | 4x^2 + 2x - 2y + 5 = 0\}$, $C = \{(x, y) | y = kx + b\}$, 问: 是否存在 $k, b (k \in \mathbb{N}^*, b \in \mathbb{N}^*)$, 使 $(A \cup B) \cap C = \emptyset$? 证明你的结论. [10]
- ★★ 7. 已知 $A = \{(x, y) | x = n, y = an + b, n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{(x, y) | x = m, y = 3m^2 + 15, m \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 144\}$ 是坐标平面内的点集, 问: 是否存在实数 a, b 使 ① $A \cap B \neq \emptyset$; ② $(a, b) \in C$ 同时成立? [12]
- ★★ 8. 已知点集 $A = \left\{(x, y) \left| (x-3)^2 + (y-4)^2 \leq \left(\frac{5}{2}\right)^2 \right.\right\}$, $B = \left\{(x, y) \left| (x-4)^2 + (y-5)^2 > \left(\frac{5}{2}\right)^2 \right.\right\}$, 则点集 $A \cap B$ 中的整点的个数是 _____. [5]
- ★★ 9. 设 $M = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 10, 1 \leq y \leq 10, x \leq y, x, y \in \mathbb{N}^*\}$, 则 $|M| =$ _____. ($|M|$ 表示集合 M 中元素的个数) [5]
- ★★ 10. 设集合 $M = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$, 对于 M 的任一非空子集 Z , 令 a_Z 表示 Z 中最大数与最小数之和, 那么所有这样的 a_Z 的算术平均值为 _____. [6]
- ★★ 11. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 集合 B 有 k 个元素, 且 $B \subsetneq A$, 若所有可能的 B 的各个元素的总和是 210, 则 $k =$ _____. [6]
- ★★ 12. 集合 $M = \{-1, 0, 1, -2, 2, 10, 20, -30, 99, -100\}$ 有 10 个元素, 设 M 的所有非空子集为 $M_i, i = 1, 2, 3, \dots, 1023$, 每一个 M_i 中所有元素的乘积为 $m_i (i = 1, 2, 3, \dots, 1023)$, 则 $\sum_{i=1}^{1023} m_i =$ _____. [6]
- ★★ 13. 对集合定义一个唯一确定的“交替和”如下: 按照递减次序重新排列该子集中的元素, 然后从最大数开始交替减、加后合计的数, 如 $\{1, 2, 4, 6\}$, 交替和就是 $6 - 4 + 2 - 1 = 3$. 则 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的所有子集的“交替和”的总和为 _____. [8]

- ★★ 14. 已知集合 $A = \{(x, y) \mid |x| + |y| = a > 0\}$, $B = \{(x, y) \mid |xy| + 1 = |x| + |y|\}$, 若 $A \cap B$ 是平面上正八边形的顶点所构成的集合, 则 a 的值为 _____. [8]
- ★★ 15. 已知 $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 2002\}$, $B = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$, 若 $C \subseteq A$, $B \cap C \neq \emptyset$, 则子集 C 共有 _____ 个. [8]
- ★★ 16. 集合 $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ 的某些子集, 满足条件: 没有一个数是另一个数的 2 倍. 这样的子集中所含元素的个数最多是 _____. [5]
- ★★ 17. 对 $S_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 的每一个非空子集 A , 我们将 A 中每一个元素 k ($1 \leq k \leq n$) 都乘以 $(-1)^k$ 然后求和, 则所有的这些和的总和为 _____. [8]
- ★★ 18. 已知集合 S 满足 $|S| = 10$ ($|S|$ 表示集合 S 中元素的个数), 设 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 是 S 的非空子集, 且其中任意两个子集的交集至多含有两个元素, 求 k 的最大值. [12]
- ★★ 19. 有限集 S 的全部元素的乘积, 称为数集 S 的“积数”. 今给出数集 $M = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{100} \right\}$, 试确定 M 的所有偶数个 (2 个, 4 个, $\dots$, 98 个) 元素子集的“积数”之和的值. [12]

2. 命题与充要条件



知识的积累

- ★ 1. 若命题 $p: \{3\} \in \{3, 5\}$, $q: \{3\} \subseteq \{3, 5\}$, 对复合命题的下述判断: ① p 或 q 为真; ② p 或 q 为假; ③ p 且 q 为真; ④ p 且 q 为假; ⑤ 非 p 为真; ⑥ 非 p 为假, 其中正确的是 (). [2]
- (A) ①、④、⑤ (B) ①、③、⑤ (C) ②、④、⑥ (D) ①、④、⑥
- ★ 2. 设集合 $M = \{x \mid 0 < x \leq 3\}$, $N = \{x \mid 0 < x \leq 2\}$, 那么“ $a \in M$ ”是“ $a \in N$ ”的 (). [1]
- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- ★ 3. 若不等式 $|x-1| < a$ 成立的充分条件是 $0 < x < 4$, 则 a 的取值范围是 (). [1]
- (A) $a \geq 1$ (B) $a \geq 3$ (C) $a \leq 1$ (D) $a \leq 3$
- ★ 4. 设集合 $P = \{x \mid x = 2m+1, m \in \mathbf{Z}\}$, $Q = \{y \mid y = 2n, n \in \mathbf{Z}\}$, 若 $x_0 \in P$, $y_0 \in Q$, $a = x_0 + y_0$, $b = x_0 y_0$, 则 (). [2]
- (A) $a \in P, b \in Q$ (B) $a \in Q, b \in P$ (C) $a \in P, b \in P$ (D) $a \in Q, b \in Q$
- ★ 5. 已知甲: $x+y \neq 3$, 乙: $x \neq 1$ 且 $y \neq 2$, 则甲是乙的 _____ 条件. [1]
- ★ 6. $p: (1-|x|)(1+x) > 0$; $q: x < -1$ 或 $-1 < x < 1$, p 是 q 的 _____, q 是 p 的 _____. [2]
- ★ 7. $p: A \cap B = A$; $q: A \subseteq B$, p 是 q 的 _____, q 是 p 的 _____. [2]
- ★ 8. 一次函数 $f(x) = kx + b$ ($k \neq 0$) 是奇函数的充分必要条件是 _____. [2]
- ★★ 9. 若 $A: a \in \mathbf{R}, |a| < 1$, B : 关于 x 的二次方程 $x^2 + (a+1)x + a - 2 = 0$ 的一个根大于零,

另一根小于零,则 A 是 B 的().【2】

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

★★ 10. “ M 不是 P 的子集”的充要条件是().【2】

- (A) 若 $x \in M$, 则 $x \notin P$
(B) 若 $x \in P$, 则 $x \in M$
(C) 存在 $x_1 \in M \Rightarrow x_1 \in P$, 又存在 $x_2 \in M \Rightarrow x_2 \notin P$
(D) 存在 $x_0 \in M \Rightarrow x_0 \notin P$

★★ 11. 已知 p 是 r 的充分不必要条件, s 是 r 的必要条件, q 是 s 的必要条件, 则 p 是 q 的().【2】

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

★★ 12. 若函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 的定义域都是 $\mathbf{R}$, 则 $f(x) > g(x) (x \in \mathbf{R})$ 成立的充要条件是().【2】

- (A) 有一个 $x \in \mathbf{R}$, 使 $f(x) > g(x)$
(B) 有无数多个 $x \in \mathbf{R}$, 使 $f(x) > g(x)$
(C) 对 $\mathbf{R}$ 中任意的 x , 使 $f(x) > g(x) + 1$
(D) $\mathbf{R}$ 中不存在 x 使 $f(x) \leq g(x)$

★★ 13. 一元二次方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0 (a \neq 0)$ 有一个正根和一个负根的充分不必要条件是().【2】

- (A) $a < 0$ (B) $a > 0$ (C) $a < -1$ (D) $a > 1$



知识的应用

★★ 1. 设 $h > 0$, 如果 p : 实数 a, b 满足 $(a-b) < 2h$; q : 实数 a, b 满足 $|a-1| < h, |b-1| < h$, 那么().【2】

- (A) p 是 q 的充分不必要条件
(B) p 是 q 的必要不充分条件
(C) p 是 q 的充要条件
(D) p 既不是 q 的充分条件, 也不是必要条件

★★ 2. 若 $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, 且 $a \neq 0$, 则 $b^2 - 4ac < 0$ 是不等式 $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} > 0$ 恒成立的_____条件.【2】

★★ 3. 设 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 均为非零实数, 不等式 $a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0$ 和 $a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0$ 的解集分别为集合 M 和 N , 那么 “ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ” 是 “ $M = N$ ” 的().【4】

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既非充分又非必要条件

★★ 4. 命题 p : 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 $|a| + |b| > 1$ 是 $|a+b| > 1$ 的充分不必要条件; 命题 q : 函数 $y =$

$\sqrt{|x-1|-2}$ 的定义域是 $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$, 则 ().【3】

(A) “ p 或 q ” 为假

(B) “ p 且 q ” 为真

(C) p 真 q 假

(D) p 假 q 真

★★ 5. 已知 $U = \{(x, y) | x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, $A = \{(x, y) | \frac{y-4}{x-2} = 3\}$, $B = \{(x, y) | y = 3x - 2\}$, 则 $\complement_U A \cap B =$.【3】

★★ 6. 若 $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}, c \in \mathbf{R}$, 且 $abc \neq 0$, $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{|abc|}{abc}$ 的值的集合为 .【3】

★★ 7. 已知 $c > 0$, 设 P : 函数 $y = c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减; Q : 不等式 $x + |x - 2c| > 1$ 的解集为 $\mathbf{R}$. 如果 P 和 Q 有且仅有一个正确, 求 c 的取值范围.【8】

★★ 8. 设 $M = \{(x, y) | y \geq x^2\}$, $N = \{(x, y) | x^2 + (y - a)^2 \leq 1\}$, 则使 $M \cap N = N$ 成立的充要条件是 ().【4】

(A) $a \geq \frac{5}{4}$

(B) $a = \frac{5}{4}$

(C) $a \geq 1$

(D) $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$



能力的拓展

★★ 1. 对于函数 $f(x)$, 若 $f(x_0) = x_0$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的“不动点”. 若 $f[f(x_0)] = x_0$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的“稳定点”. 函数 $f(x)$ 的“不动点”和“稳定点”的集合分别记为 A 和 B , 即 $A = \{x | f(x) = x\}$, $B = \{x | f[f(x)] = x\}$. (1) 求证: $A \subseteq B$; (2) 若 $f(x) = ax^2 - 1$ ($a, x \in \mathbf{R}$), 且 $A = B \neq \emptyset$, 求 a 的取值范围.【12】

★★ 2. 已知集合 M 是满足下列性质的函数 $f(x)$ 的全体: 在定义域内存在实数 x_0 , 使得 $f(x_0 + 1) = f(x_0) + f(1)$ 成立. (1) $f(x) = \frac{1}{x}$ 是否属于集合 M ? 请说明理由; (2) 若 $f(x) = \lg \frac{a}{x^2 + 1} \in M$, 求 a 的取值范围; (3) 已知 $y = 2^x$ 与 $y = -x$ 的图像有公共点, 求证: $f(x) = 2^x + x^2 \in M$.【12】

★★ 3. 已知正整数 $n \geq 5$, 试求:

(1) n 元集 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 中, $a_i + a_j$ ($1 \leq i < j \leq n$) 至少产生了多少个不同的数;

(2) 确定达到上述最小值的所有 n 元集合.【15】

★★ 4. 设 $S = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$, 求最小的正整数 n , 使得 S 的每个 n 元子集都含有 4 个两两互质的数.【15】

★★ 5. 设 $E = \{1, 2, 3, \dots, 200\}$, $G = \{a_1, a_2, \dots, a_{100}\} \subseteq E$, 且 G 具有下列两条性质:

(1) 对任何 $1 \leq i < j \leq 100$, 恒有 $a_i + a_j \neq 201$;

(2) $a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = 10080$.

求证: G 中的奇数的个数是 4 的倍数, 且 G 中所有数字的平方和为一定数.【30】

二、不等式

1. 不等式的解法



知识的积累

★ 1. 不等式 $6x^2 + 5x - 4 < 0$ 的解集为(). [1]

(A) $\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{2}\right)$

(B) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right)$

(C) $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$

(D) $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

★ 2. 不等式 $(2x-1)(5-x) < 0$ 的解集为(). [1]

(A) $\left(-5, -\frac{1}{2}\right)$

(B) $(-\infty, -5) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

(C) $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$

(D) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (5, +\infty)$

★ 3. 在下列各不等式中, 解集为全体实数的不等式是(). [1]

(A) $4x^2 - 12x + 9 > 0$

(B) $4x^2 - 12x + 9 < 0$

(C) $2x^2 + x - 4 < 0$

(D) $3x^2 - 2x + 4 > 0$

★ 4. $x^2 > a^2$ 等价于(). [1]

(A) $x \geq \pm a$

(B) $-a < x < a$

(C) $x < -a$ 或 $x > a$

(D) $x > |a|$ 或 $x < -|a|$

★ 5. $a < 0$ 时, 不等式 $42x^2 + ax - a^2 < 0$ 的解集是(). [1]

(A) $\left\{x \mid \frac{a}{7} < x < -\frac{a}{6}\right\}$

(B) $\left\{x \mid -\frac{a}{6} < x < \frac{a}{7}\right\}$

(C) $\left\{x \mid \frac{a}{7} < x < -\frac{2a}{7}\right\}$

(D) $\emptyset$

★ 6. $|x| \leq 2$ 是 $|x+1| < 1$ 的(). [1]

(A) 必要非充分条件

(B) 充分非必要条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不充分也不必要条件

★ 7. $(x+2)(x+1)^2(x-1)^3(x-3) > 0$ 的解集为_____. [1]

★ 8. 若 $0 < x - \frac{1}{x} < 1$, 则 x 的取值范围是_____. [1]

★ 9. 不等式 $\left|\frac{x}{1+x}\right| > \frac{x}{1+x}$ 的解集是_____. [1]

★ 10. 不等式 $\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-3)(x-4)} \leq 0$ 的解集为_____. [1]