高中数学解题
思路与方法

明日报出版社

中小学教师参考丛书

高中数学解题思路与方法

翟连林　赵学恒　主编

光明日报出版社

(京)新登字 101 号

高中数学解题思路与方法

翟连林　赵学恒　主编

☆

光明日报出版社出版发行
(北京永安路 106 号)
邮政编码:100050
电话:3017733-225
新华书店北京发行所经销
保定市满城县印刷厂印刷

*

787×1092　1/32　18.6875 印张　　字数 420 千字
1992 年 11 月第 1 版　　1992 年 11 月 第 1 次印刷
印数:1-6000 册
ISBN 7-80091-311-2/G·544

定　价:7.80 元

前　　言

为帮助广大高中学生、自学青年系统地复习高中数学，同时也为高中数学教师提供一份实用的高考数学复习参考资料，我们组织全国十三个省、市有丰富教学经验的特、高级教师编成本书。

全书按知识系统分成十五章。其中，前十三章每章内容均按"基本内容""基础练习"、"典型例题"、"习题精荟""测试题（一套）"等五部分编写；第十四章总括了配合、变换、转化、辅助、对称、联想、比较、间接、分类、归纳等十种综合解题的策略以及数形结合、配方、换元、消去、放缩等常用解题方法；第十五章配有八套综合测试题，其题型与题量均以近年高考试题为标准。全书所有习题及测试题均附有答案或简解。

本书的特点是：基础知识精炼，目的要求明确，例题新颖、典型，而且侧重解题思路的分析，以及题目类型的归纳和解题方法的总结。

参加本书编写工作的有：赵连音、沈树基、尤善培、莫德高、覃德召、余宗文、温柏昌、戴邦毅、张佑胜、郝春升、陈步杲、吴春祥、李承业、周崇林、曾尚攀、徐得政、石炳其、李兆全、颜庆保、刘彬文、屈振江、喻真勇、徐显扬、杨永禎、秦智琳。

由于我们的水平有限，书中不妥之处在所难免，欢迎读者批评指正。

程连林　赵学恒

1992年3月

目　　录

第一章　幂函数、指数函数、对数函数

基　本　内　容

一、主要内容： 本章包括集合、映射、函数，常用对数的概念、表示方法及其性质；幂函数、指数函数、对数函数的概念、性质及其图象；特殊类型的指数方程与对数方程的解法.

二、重点难点： 本章是高中代数的起始章，内容丰富，其重点难点也较多，本章的重点有：集合的各个基本概念；映射、函数与反函数的概念，及函数的单调性、奇偶性；常用对数及积、商、幂、方根的对数运算法则；幂函数、指数函数、对数函数概念及其图象与性质；三种特殊类型的简单指数方程与对数方程.本章难点有：集合的各个概念的函义以及相互之间的区别与联系；映射、逆映射概念以及用映射刻划函数；反函数及其与原函数的联系；有关函数单调性、奇偶性之综合命题的证明；对数换底公式的变用与活用；幂函数的图象、及指数函数与对数函数中底数 a 对于函数值变化的影响.

三、基本要求： 通过本章的学习，应了解集合概念、能判断一组对象能否构成集合，并能判别元素对集合的属于关系；掌握列举法、描述法、韦恩图法、区间法等集合表示法，熟记常用数集的符号；理解全集、子集、等集、空

集等概念，并掌握交、并、补三种运算及简单的运算律；理解用集合语言描述的数学问题，能判别集合对集合的包含关系；理解对应、映射、一一映射、逆映射等概念及它们的联系与区别；掌握函数、反函数概念，能根据函数式求函数值，能求复杂代数函数的定义域及简单函数的值域，能求出简单函数问题中的函数式，能判断简单函数的奇偶性、单调性与最值（特别是二次函数在指定区间上的最值），能利用奇偶性等函数性质描绘函数图象；掌握求反函数的初等方法，以及互反函数的图象关系；掌握幂、指、对等函数的图象与性质，能利用“数形结合”求解有关幂、指、对等函数问题；掌握常用对数、换底公式及对数运算；会解三种特殊类型的简单指数方程与对数方程.

四、本章基础知识

1. 集合与对应

集合是“具有确定的共同属性的对象组成的全体”，对应包括“多对一”“一对一”“一对多”等情况，它们都是不定义的原始概念.

2. 映射与函数

（1）几种映射的联系如表 1-1.

（2）在一一映射 f: $A\to B$ 中，因 B 中的任一元素对应 A 中唯一的元素，故也存在从 B 到 A 上的映射，这叫原映射的逆映射.记作 f^{-1}: $B\to A$，当 A 与 B 均为实数集时，则逆映射所确定的函数叫原函数的反函数。原函数与反函数的关系是:定义域与值域互易、对应法则互逆、两者不可缺一.

例如：$x=\frac{y}{2}(y\in Z)$不是 $y=2x(x\in Z)$的反函数，因为前者

表 1-1

组成＼类别	原象集合(A)	象集合(B)	对应法则(f)	A 与 B 的关系	备　注
映射	数集、点集或其它集合	同左	“一对一”或“一对多”	A 中任一元素都在 B 中有唯一的象	是单值对应的特殊对应记号 $f:A\to B$ 表示从 A 到 B 的映射
满射	同映射	同左	同映射	①同映射 ②B 中任一元素都在 A 中有原象	象集合中每个元素都有原象的特殊映射,记号 $f:A\to B$ 表示从 A 到 B 上的映射
函数	实数集(称定义域)	实数集(称值域)	同映射	同满射	实数集与实数集之间的特殊满射
单射	同映射	同左	“一对一”	①同映射②A 中不同的原象在 B 中有不同的象	原象不同,象也不同的特殊映射
一一映射	同映射	同左	同单射	①、②同单射③B 中任一元素都在 A 中有唯一的原象	既是单射又是满射的特殊映射

的值域不是后者的定义域.求函数 $y=f(x)$ 的反函数

分为“反解”与“交换字母”两个步骤.例如：求$y=\sqrt{ax+b}$($a\neq 0$)的反函数.先“反解”得$x=\dfrac{y^2-b}{a}$，再“交换字母”得$y=\dfrac{x^2-b}{a}(x>0)$，得出的反函数须注明定义域.两个互反函数的图象关于直线$y=x$成轴对称，但逆命题不一定成立.

（3）函数的奇偶性表现在整个定义域上（其定义域关于原点成对称）.

奇函数$\rightleftharpoons$函数图象关于原点对称；

偶函数$\rightleftharpoons$函数图象关于y轴成对称.

函数单调性是应用得最多的一个函数性质，函数的单调区间是定义域的一个子集.判断复合函数$y=f[\varphi(x)]$的单调性，可根据函数$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$的单调性，通过单调函数的定义来推证.也可由下述简化方法作判断：将f和φ的增区间记为“+”，减区间记为“−”，那么$y=f[\varphi(x)]$在相应区间的单调性可由f与φ的性质符号确定.可能出现的情况为表 1−2.

表 1−2

$y=f(u)$	+	−	+	−
$u=\varphi(x)$	+	+	−	−
$y=f[\varphi(x)]$	+	−	−	+

注：可使用“同号为增，异号为减”来定$y=f[\varphi(x)]$的单调性.

3. 幂函数、指数函数和对数函数

在 $a^b=N$ 中，a、b、N 三个量是相互关系，相互影响的.在某一研究过程中，让一个取常量，其余两个取变量，便构成函数关系，常见的有三类（见表 1-3）.

表 1-3

常量	自变量	函数	函数型	表达式
b	a	N	幂函数型	$y=x^b$
a	b	N	指函数型	$y=a^x$
a	N	b	对函数型	$y=\log_a x$

（1）幂函数 $y=x^n$ 的性质如表 1-4.

表 1-4

x^n \ n	过定点	在第一象限	渐近线
$n>0$	(0,0)、(1,1)	增函数	无
$n<0$	(1,1)	减函数	x 轴 y 轴

作幂函数的图象，一般是先作出图象在第一象限的部分，然后利用对称性、完成全图.其中有关幂函数在第一象限的凹凸性，可在 $x>0$ 的范围内取三点，比较三点的函数

值的大小，决定曲线凹凸（若函数图象过原点，则可取 $x_0 \in (0,1)$，再看 x_0^n 与 x_0 的大小来决定曲线的凹凸）.为了掌握主要幂函数的图象，可以通过对函数表达式的研究，思考五个特点：

①是否过原点？　　②是否以坐标轴为渐近线？

③增减的单调性如何？　　④是否奇、偶函数？

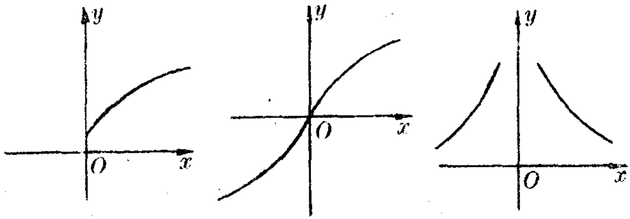
⑤凹凸情况如何？

例如：试在下列各幂函数与各图象之间建立一一映射：

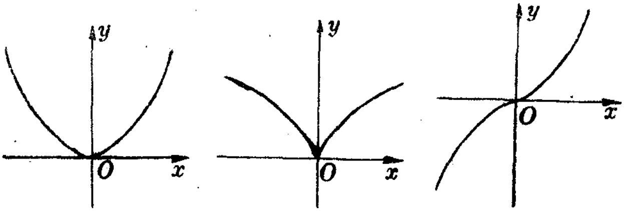
(A) $y=x^{\frac{2}{3}}$；　(B) $y=x^{-2}$；　(C) $y=x^{\frac{1}{2}}$；

(D) $y=x^{-1}$；　(E) $y=x^{\frac{1}{3}}$；　(F) $y=x^{\frac{3}{2}}$；

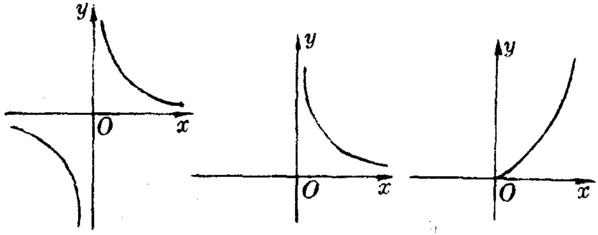
(G) $y=x^{\frac{4}{3}}$；　(H) $y=x^{-\frac{1}{2}}$；　(I) $y=x^{\frac{5}{3}}$.



(a)　(b)　(c)



(d)　(e)　(f)



(g)　　(h)　　(i)

答案：　A←→e;　B←→c;　C←→a;

D←→h;　E←→b;　F←→i;

G←→d;　H←→h;　I←→f.

（2）指数函数中的典型图象如图 1-1 所示.通过“数形结合”可得到指函数 $y=a^x$ 重要性质（见表 1-5）

表 1-5

图象特征			函数性质
图象都位于 x 轴上方			$y>0$
图象都过点(0,1)			当 $x=0$ 时,$y=1$
$a>1$	图象上升		在 R 上是增函数
	第一象限	纵坐标都大于 1	当 $x>0$ 时,$y>1$
	第二象限	纵坐标都小于 1	当 $x<0$ 时,$y<1$
$0<a<1$	图象下降		在 R 上是减函数
	第一象限	纵坐标都小于 1	当 $x>0$ 时,$y<1$
	第二象限	纵坐标都大于 1	当 $x<0$ 时,$y>1$

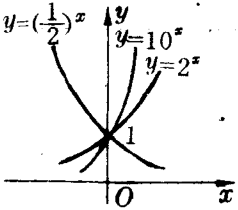


图 1-1

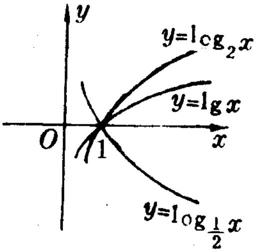


图 1-2

(3) 对数函数中的典型图象如图 1-2 所示.对数函数 $y=\log_a x$ 的性质如表 1-6.

表 1-6

图象特征			函数性质
图象都在 y 轴右边			定义域是 R^+
图象都过点(1,0)			1 的对数为 0
$a>1$	图象上升		增函数
	点(1,0)右边	纵坐标大于 0	当 $x>1$,则 $\log_a x>0$
	点(1,0)左边	纵坐标小于 0	当 $x<1$,则 $\log_a x<0$
$0<a<1$	图象下降		减函数
	点(1,0)右边	纵坐标小于 0	当 $x>1$,则 $\log_a x<0$
	点(1,0)左边	纵坐标大于 0	当 $x<1$,则 $\log_a x>0$

4.特殊类型的简单指数方程与对数方程

（1）三类特殊类型的指数方程

①形如$a^{\varphi_1(x)}=a^{\varphi_2(x)}$.利用同底幂相等则指数相等的性质求解，或利用两边取对数的解法；

②形如 $a^{2x}+b\cdot a^x+c=0$.利用换元法化为二次方程；

③可用图象法求近似解的指数方程．先化成$\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$，其中 $\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$分别为指数函数或容易画图的函数.

（2）三类特殊类型的对数方程

①形如 $\log_a\varphi_1(x)=\log_a\varphi_2(x)$.利用同底对数相等则真数相等的性质求解；

②形如 $\log_a^2x+b\log_ax+c=0$.利用换元法化为二次方程；

③可用图象法求近似解的对数方程，先化成$\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$，其中 $\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$分别为对数函数或容易画图的函数.

基　础　练　习

1.选择题①：

（1）设 $I=R$，$A=\{x|x\leqslant -1\}$，$B=\{x|x\leqslant -10\}$，则$\overline{A}\cup\overline{B}$是（　　）

（A）$\{x|x>-1\}$；　（B）$\{x|x>-10\}$；

（C）$\varnothing$；　　（D）R.

（2）设集合 $A=\{(x,\ y)|x+y>0,\ xy>0\}$，$B=\{(x,\ y)|x>0,\ y>0\}$，则 A 与 B 的关系是（　　）

①本书中的选择题都是单项选择题，即在给出的几个结论中有且只有一个结论是正确的。

(A) $A \supset B$;　　　　(B) $A \subset B$;

(C) $A \not\subseteq B$ 且 $B \not\subseteq A$;　　(D) $A = B$.

(3) 按对应法则 f: $x \to y = x^2$，使集合 A 的元素对应集合 B 的元素，那么 f 是 A 到 B 上的一一映射是（　）

(A) $A = R$，$B = R$;　　(B) $A = \overline{R^-}, B = \overline{R^-}$;

(C) $A = \overline{R^-}, B = R$;　　(D) $A = R, B = \overline{R^-}$.

(4) 设 $f(n) = \frac{1}{8}[1-(-1)^n](n^2-1), n \in N$, 则 $f(n)$ 是（　）

(A) 0;　　　　(B) 偶数;

(C) 是整数但不一定是偶数;(D) 不一定是整数.

(5) 函数 $f(x) = \sqrt{\frac{4}{|x|} - 1} + \log_3(x^2-2)$ 的定义域是（　）

(A) $(\sqrt{2}, 4]$;　　(B) $[-4, -\sqrt{2})$;

(C) $(\sqrt{2}, 4] \cup [-4, -\sqrt{2})$;

(D) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

(6) 函数 $y = \sqrt{x-2} + 2$ 的反函数是（　）

(A) $x = (y-2)^2 + 2$;

(B) $y = (x-2)^2 + 2\ (x \in R)$;

(C) $y = (x-2)^2 + 2\ (x \geqslant 1)$;

(D) $y = (x-2)^2 + 2\ (x \geqslant 2)$.

(7) 设 $f(x) = (m-1)x^2 - 2mx + 3$ 是偶函数，则 $f(x)$ 在 $(-5, -2)$ 上是（　）

(A) 增函数;　　　　(B) 减函数;

(C) 先递增到函数的最大值然后再递减;

（D）不能确定增减性．

（8）幂函数 $y=x^{\frac{m}{n}}$（m、$n\in N$）的图象如图 1－3 所示，则下列结论中正确的是（　　）

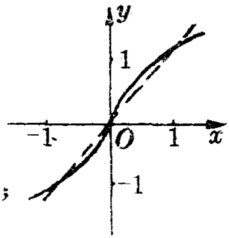


图 1－3

（A）n 是奇数，m 为偶数，$\frac{m}{n}<1$；

（B）n、m 均为奇数，$\frac{m}{n}<1$；

（C）n 为奇数，m 为偶数，$\frac{m}{n}>1$；

（D）n 为偶数，m 为奇数，$\frac{m}{n}<1$.

（9）设 $(1+x^2)^{\alpha}-(1+x^2)^{\beta}>0$（$x\in R$），则下列结论正确的是（　　）

（A）$\alpha>0$，$\beta<0$；　　（B）$\alpha<0$，$\beta>0$；

（C）$\alpha>\beta$；　　（D）$\alpha>\beta>0$ 或 $\alpha<\beta<0$.

（10）设 $1<x<a$，$p=\log_a^2x,q=\log_a x^2$，$r=\log_a\log_a x$，则下列结论正确的是（　　）

（A）$p<q<r$；　　（B）$p<r<q$；

（C）$r<q<p$；　　（D）$r<p<q$.

（11）记满足如下条件的函数 $f(x)$ 的集为 M：当 x_1、$x_2\in[-1,1]$ 时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant 2|x_1-x_2|$，则 $g(x)=x^2$ 与 M 的关系是（　　）

（A）$g(x)\subset M$；　　（B）$g(x)\in M$.

（C）$g(x)\not\subset M$；　　（D）$g(x)\notin M$.

（12）设 $A=\{x|\frac{1}{|x|}\leqslant 1,x\in Z\}$、$B=\{x|\sqrt{x}\leqslant 1,x$

$\in Z\}$，则 $A \cap B$ 是（　）

(A)$\{0\}$；(B)$\{1\}$；(C)$\{1, 0\}$；(D)$\{-1, 1\}$.

（13）函数 $f(x)=3^{x-2}+2^{x-1}$ 的反函数的图象上两点属于下列结论中的（　）

(A)$(1, 1\frac{1}{3})$ 与 $(2, 3)$；　(B)$(1, \frac{1}{3})$ 与 $(3, 2)$；

(C)$(1\frac{1}{3}, 1)$ 与 $(2, 3)$；　(D)$(1\frac{1}{3}, 1)$ 与 $(3, 2)$.

（14）同时满足条件：① 奇函数，② 有反函数，③ 定义域与值域相等的函数是（　）

（A）$f(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$；　（B）$f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$；

（C）$f(x)=-x^{3}\ (x\in R)$；　（D）$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$

（15）若 $F(x)=f(x)-\frac{1}{f(x)}$ 且 $x-\ln f(x)=0$，则 $F(x)$ 是（　）

（A）偶函数又是增函数；（B）偶函数又是减函数；

（C）奇函数又是增函数；（D）奇函数又是减函数.

（16）设 $x>y>1$ 且 $0<a<1$，则下列结论正确的是（　）

（A）$x^{a}<y^{a}$；　（B）$\log_{x}a>\log_{y}a$；

（C）$a^{y}<a^{x}$；　（D）$\log_{a}x>\log_{a}y$.

（17）设 $a>b>-b$，则下列结论正确的是（　）

（A）$\sqrt{a+b}>\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 且 $\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$；

（B）$\sqrt{a+b}>\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 且 $\sqrt{a-b}<\sqrt{a}-\sqrt{b}$；

（C）$\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 且 $\sqrt{a-b}<\sqrt{a}-\sqrt{b}$；