考研专业课攻关系列

离散数学

考试要点与真题精解

◎毛晓光　刘万伟　洪贵　编著

围绕学科考点

把握重点难点

收录全真试卷

附带详细解答

国防科技大学出版社

考研专业课攻关系列

离散数学

考试要点与真题精解

毛晓光 刘万伟 洪贵 编著

国防科技大学出版社
·长沙·

内容简介

本书为硕士研究生考试人员“离散数学”课程考试复习用书。全书共有八章。前三章是有关集合论、二元关系、函数等朴素集合论的基本内容；第4章到第6章是有关数理逻辑的基本内容，包括命题逻辑、谓词逻辑和自然推理系统；第7章是图论。前七章按考试要点、基础题、提高题与解答进行组织。第8章是全国一些重点院校硕士研究生入学考试“离散数学”试题汇编。

本书也可作为计算机科学与技术专业本科生、研究生学习“离散数学”课程时的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学考试要点与真题精解/毛晓光，刘万伟，洪贵编著．—长沙：国防科技大学出版社，2007.7
(考研专业课攻关系列)
ISBN 978-7-81099-435-4

Ⅰ．离… Ⅱ．①毛…②刘…③洪… Ⅲ．离散数学-研究生-入学考试-自学参考资料
Ⅳ．O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第099261号

国防科技大学出版社出版发行
电话：(0731)4572640 邮政编码：410073
http://www.gfkdcbs.com
责任编辑：黄 煌 责任校对：石少平
新华书店总店北京发行所经销
国防科技大学印刷厂印装
*
开本：787×1092 1/16 印张：11.75 字数：308千
2007年7月第1版第1次印刷 印数：1-4000册
ISBN 978-7-81099-435-4
定价：18.00元

前言

计算机科学以研究计算机领域中的一些普遍规律为主要任务，需要大量的近代数学作为工具。由于它所用的数学多具有“离散性”和“能行性”两大特点，故而称之为“离散数学”。“离散数学”不仅理论性强，而且要求学生具有一定的抽象思维能力、逻辑思维能力，因而普遍认为“离散数学”学习曲线长、学习难度大。为了帮助学生更好地掌握“离散数学”课程的学习，掌握“离散数学”习题解答的思路，顺利通过硕士生研究生入学考试，我们编写了这本参考书。

本书参照了国防科技大学以及国内其它重点院校计算机科学与技术专业“离散数学”课程中朴素集合论、数理逻辑基础和图论部分的主要内容(未包含抽象代数等内容)，收集并整理了各高校硕士研究生入学考试的试题，并以试题求解为主要特色组织内容，希冀学生能借此达到融会贯通的境界。

从上一个版本，即《离散数学典型题解析与实战模拟》推出以来，我们收到了很多读者的反馈，其中对各高校往届硕士研究生入学考试试题的解答提出了迫切需求。为此，我们以典型题解析和考研实体试题解答为主体编写本书。内容分为两部分：第一部分为基础题和提高题解析，分为七章，前三章对应集合论、二元关系和函数等朴素集合论的内容，第 4 章到第 6 章对应命题逻辑、谓词逻辑和自然推理系统等数理逻辑基础的内容，第 7 章对应图论的内容；第二部分是各高校往届的“离散数学”硕士研究生入学考试试题。基础题和提高题解析对“离散数学”上述内容考研大纲范围的典型题进行指导性分析，重在题目类型、解题方法和解题要点。各高校离散数学考研试题解答重在针对具体问题进行分析和求解的方法、思路和技巧。

本书主要面向计算机专业硕士研究生考试人员，主要作为“离散数学”课程考试复习用书，也可以作为计算机科学与技术专业本科生、研究生以及其他从事计算机工作的科研和工程技术人员学习“离散数学”课程时的参考用书。

本书的编写得到了国防科技大学计算机系、计算机软件与理论教研室和国防科技大学出版社的大力支持，在此表示衷心的感谢。同时感谢何腾飞、王瑞、谭俊武、周佳对部分考研试题的分析和求解。

由于时间仓促，作者水平有限，书中的错误在所难免，敬请读者批评指正。

作 者

2007 年 7 月

目录

KAOYAN ZHUANYEKE GONGGUAN XILIE

Contents

第 1 章 集合论

1.1 考试要点

本章主要研究集合及其表示、集合的运算、自然数和归纳法、笛卡尔乘积四个内容。其中集合的运算及其性质、两种归纳法应作为重点学习。

一、集合的表示及其运算

掌握集合的表示法;有限集、无限集、子集(真子集)、集合包含、集合相等等基本概念;集合的并、交、幂、补、广义交、广义并等运算;集合运算的幂等律、结合律、交换律、分配律、同一律、零律、互补律、吸收律、德·摩根律等性质。

二、自然数和归纳法

掌握两种(第一、第二)数学归纳法的特点;能够熟练运用两种归纳法进行问题求解;了解两种归纳法的等价性。

还需要掌握一些特殊的归纳法。比如:

1. 添入归纳法。要证明 $\forall n\in \mathbf{N}$,有 $p(n)$成立,则

①寻找:$f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$,满足 $\forall n\in\mathbf{N},f(n)>n$。

②证明 $p(0)$。(有时也可以从某特定起始值开始证起)

③证明若 $p(k)$成立,则 $p(f(k))$成立。

④证明若 $p(k)$成立,则 $p(k-1)$成立。

例如:证明对于 $n>0$,存在如下基本不等式

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

[证明]

(1)当 $n=1,2$ 时,结论显然。

(2)若当 $n=k$ 时成立,则当 $n=2k$ 时,

$$\sqrt[2k]{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}\cdots a_{2k}}=\sqrt{\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}\sqrt[k]{a_{k+1}\cdots a_{2k}}}$$

$$\leqslant(\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}+\sqrt[k]{a_{k+1}\cdots a_{2k}})/2$$

$$\leqslant(\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}+\frac{a_{k+1}+\cdots+a_{2k}}{k})/2$$

$$=\frac{a_1+\cdots+a_{2k}}{2k}$$

(3)若 $n=k$ 时成立,则当 $n=k-1$ 时,

$$\sqrt[k]{a_1\cdots a_{k-1}\sqrt[k-1]{a_1\cdots a_{k-1}}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+\sqrt[k-1]{a_1a_2\cdots a_{k-1}}}{k}$$

即

$$\sqrt[k-1]{a_1\cdots a_{k-1}}\leqslant\frac{a_1+\cdots+a_{k-1}+\sqrt[k-1]{a_1\cdots a_{k-1}}}{k}$$

整理即得

$$\sqrt[k-1]{a_1\cdots a_{k-1}}\leqslant\frac{a_1+\cdots+a_{k-1}}{k-1}$$

于是,对于任意的自然数 n,均有 $\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$成立。

2. 双支撑归纳法。为证明自然数具有性质 P,采用以下策略:

(1)引入辅助命题 Q;

(2)证明 P(0),Q(0);

(3)证明:若 P(k)和 Q(k)成立,则 P(k+1)和 Q(k+1)成立。

三、笛卡尔乘积

掌握序偶的集合定义法:

i) $<x_1>=x_1$;

ii) $<x_1,x_2>=\{\{x_1\},\{x_1,x_2\}\}$;

iii) $<x_1,x_2,\cdots,x_n>=<<x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}>,x_n>$。

掌握笛卡尔乘积和广义笛卡尔乘积的概念和重要性质:

1. $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{<x_1,x_2,\cdots,x_n>\mid$对于任意的 $i,1\leqslant i\leqslant n,x_i\in A_i\}$

2. $A\times B=\varnothing$ 当且仅当 $A=\varnothing$ 或 $B=\varnothing$

3. $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

4. $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

5. $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

1.2 基础题

1. 若 A、B 为集合,则 A 能同时既是 B 的元素又是 B 的子集吗?举例说明可能性或者推翻该结论。

[解答]

可能。

例 1:$A=\{a,b\},B=\{a,b,\{a,b\}\}$。

例 2:$A=\varnothing,B=\{\varnothing\}$。

例 3:$B=A\cup\{A\}$。

2. 证明空集是唯一的。

[证明]

假设存在两个空集 $\varnothing_1,\varnothing_2$,并且 $\varnothing_1\neq\varnothing_2$,则根据集合相等的定义,不失一般性,存在 $a\in\varnothing_1$ 但是 $a\notin\varnothing_2$。这与 $\varnothing_2$ 是空集矛盾。因此,$\varnothing_1=\varnothing_2$。进而,空集是唯一的。

3. 设 $A_0,A_1,A_2,\cdots$为一系列的集合。定义该组集合的上限集 A^*,下限集 A_*:

$$A^*=\bigcap_{m=0}^{\infty}\bigcup_{i=m}^{\infty}A_i,\quad A_*=\bigcup_{m=0}^{\infty}\bigcap_{i=m}^{\infty}A_i$$

证明:

(1) A^* 是由一切属于无限多个 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 的元素组成的集合;

(2) A_* 是由一切属于"几乎所有"的 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 元素组成的集合。

[证明]

(1) 证明 A^* 是由一切属于无限多个 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 的元素组成的集合。

a) 先证"若 x 属于无限多个 A_i,则 x 必然属于 A^*"。

若 x 属于无限多个 A_i,则 $\forall m \in \mathbf{N}, \exists n > m$ 使得 $x \in A_n$。

因为 $A_n \subseteq \bigcup\limits_{i=m}^{\infty} A_i$,所以 $x \in \bigcup\limits_{i=m}^{\infty} A_i$。

又因为上式对于任意的 m 皆成立,故 $x \in \bigcap\limits_{m=0}^{\infty}\bigcup\limits_{i=m}^{\infty} A_i = A^*$。

所以属于无限多个集合的 x 均包含在 A^* 内。

b) 再证"若 $x \in A^*$,则 x 一定属于无限多个 A_i"。

用反证法。假设 x 仅属于有限多个集合,定义函数 $f: A^* \to \mathbf{N}$ 如下:

$f(x) = \max\{n \in \mathbf{N} \mid x \in A_n\}$。显然,若 x 仅属于有限个集合,则 f(x) 为自然数。

于是,对于任意的 $k > f(x)$, $x \notin A_k$,从而 $x \notin \bigcup\limits_{i=k}^{\infty} A_i$。

所以, $x \notin \bigcap\limits_{m=0}^{\infty}\bigcup\limits_{i=m}^{\infty} A_i = A^*$。矛盾!

(2) 证明 A_* 是由一切属于"几乎所有"的 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 元素组成的集合。

a) 先证"若 x 属于'几乎所有'的 A_i(就是说最多存在有限个 A_i,使得 x 不在其中),则 x 属于 A_*"。

若 x 属于"几乎所有"的 A_i,则定义函数 g 如下: $g(x) = \max\{n \in \mathbf{N} \mid x \notin A_n\}$。显然,对于属于"几乎所有"的 A_i 的 x 来说, g(x) 为自然数。

因此,对于任意的 $k > g(x)$,都有 $x \in A_k$。所以, $x \in \bigcap\limits_{i=k}^{\infty} A_i$,故 $x \in \bigcup\limits_{m=0}^{\infty}\bigcap\limits_{i=m}^{\infty} A_i = A_*$。

b) 再证"若 x 属于 A_*,则 x 必属于'几乎所有'的 A_i"。

若 $x \in \bigcup\limits_{m=0}^{\infty}\bigcap\limits_{i=m}^{\infty} A_i$,则必然存在自然数 k,使得 $x \in \bigcap\limits_{i=k}^{\infty} A_i$。也就是说,对于任意 $n \in \mathbf{N}$,若 $n \geqslant k$,则有 $x \in A_n$。因此, x 最多只能在 $A_1 \sim A_{k-1}$ 这有限多个集合中不出现。所以 x 一定属于"几乎所有"的集合。

4. 设 $n, m \in \mathbf{I}_+$ 且 $n > m$。假定有 n 个直立的大头针,甲乙两人轮流把这些直立的大头针扳倒。规定每人每次可扳倒 $1 \sim m$ 根,且扳倒最后一根的人为胜利者。试证明:如果甲先扳,并且 $(m+1)$ 不能整除 n,则甲存在必胜的策略。

[证明]

记 $n = k(m+1) + s$,其中 $0 \leqslant s < m+1$。因为 $n > m$,且 $(m+1)$ 不能整除 n,所以必有 $k \geqslant 1$, $s > 0$。下面,对 k 进行归纳。

i) 当 $k = 1$ 时,甲有以下获胜策略:

Step1: 甲首先扳倒 s 根,剩下 $m+1$ 根;

Step2: 轮到乙扳。由于剩下 $m+1$ 根,所以乙无法将所有的大头针扳倒,因此,这一步乙无法获胜;

Step3: 再次轮到甲扳,由于上次乙至少扳倒了一根,所以剩下的数目不超过 m,甲可以一次性全部扳倒,获胜!

ii)假设当 $k=p(p\geq 1)$时结论成立,则当 $k=p+1$ 时,甲可以采用以下的策略:

Step1:甲首先扳倒 s 根,剩下 $(p+1)*(m+1)$根;

Step2:轮到乙扳,假设乙扳倒 t 根。由于 $1\leq t\leq m$,所以,剩下的数目为 $(p+1)*(m+1)-t=p*(m+1)+(m+1-t)$(根);

又轮到甲,执行 $k=p$ 时的策略获胜。

由 i)、ii)得:甲总存在获胜的策略。

1.3 提高题

1.(北京理工大学 2002 年考研试题)

在集合运算中,(　　)对$\oplus$可分配。

A.$\cap$　　B.$\cup$　　C. $-$　　D.$\oplus$

[解答]

A

设 U 为全集,任取 $A,B,C\subseteq U$,则对于任意 $x\in U$,

$$\chi_{A\cap(B\oplus C)}(x)=\chi_A(x)*\chi_B(x)+\chi_C(x)-2*\chi_A(x)*\chi_B(x)$$
$$=\chi_A(x)*\chi_B(x)+\chi_A(x)*\chi_C(x)-2*\chi_A(x)*\chi_B(x)*\chi_C(x)$$
$$\chi_{(A\cap B)\oplus(A\cap C)}(x)=\chi_{A\cap B}(x)+\chi_{A\cap C}(x)-2*\chi_{A\cap B}(x)*\chi_{A\cap C}(x)$$
$$=\chi_A(x)*\chi_B(x)+\chi_A(x)*\chi_C(x)-2*\chi_A(x)*\chi_B(x)*\chi_C(x)$$

所以,$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$。

2.(北京理工大学 2003 年考研试题)

设 $A=\{\emptyset\}$,$B=\mathscr{P}(\mathscr{P}(A))$,下式(　　)不正确。

A.$\{\{\emptyset\},\emptyset\}\in B$　　B.$\{\{\emptyset\}\}\in B$　　C.$\{\{\emptyset\}\}\subseteq B$　　D.$\{\{\emptyset\},\emptyset\}\subseteq B$

[解答]

D

$\mathscr{P}(\mathscr{P}(A))=\mathscr{P}(\{\emptyset,\{\emptyset\}\})=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$

3.(北京理工大学 2003 年考研试题)

设 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{1,2\}$,下列命题(　　)不正确。

A.$A\cap B=\{1,2\}$　　B.$A\subseteq B$　　C.$A\oplus B=\{3\}$　　D.$A-B=\emptyset$

[解答]

D

4.(北京理工大学 2003 年考研试题)

下列等式中(　　)为真。

A.$\{\{1,2\},3,\emptyset\}=\{\{1,2\},3\}$　　B.$\{1,2,1\}=\{1,2\}$

C.$\{\{1\},\{2\}\}=\{\{1,2\}\}$　　D.$\{\emptyset,\{\emptyset\},1,2\}=\{\{\emptyset,\{\emptyset\}\},1,2\}$

[解答]

B

5.(北京理工大学 2004 年考研试题)

空集 $\emptyset$ 的幂集 $\mathscr{P}(\emptyset)$的基数是(　　)。

A.0　　B.1　　C.3　　D.4

[解答]

B

6.(北京理工大学2004年考研试题)

A,B,C,D为任意集合,下列各式哪个成立(　　)。

A.$(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$

B.$(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$

C.$(A\oplus B)\times(C\oplus D)=(A\times C)\oplus(B\times D)$

D.$(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$

[解答]

D

7.(北京理工大学2005年考研试题)

设$A-B=\varnothing$,则有(　　)。

A.$A\subseteq B$　　B.$B=\varnothing$　　C.$B\neq\varnothing$　　D.$B\subseteq A$

[解答]

A

8.(武汉理工大学2005年考研试题)

下列各式错误的是(　　)。

A.$\{x\}\subseteq\{x\}$　　B.$\{x\}\in\{x\}$

C.$\{x\}\in\{\{x\},\{x,\{x\}\}\}$　　D.$\{x\}\subseteq\{x,\{x\}\}$

[解答]

B

9.(武汉理工大学2005年考研试题)

设A,B是集合,$A\cap B=A$的充分必要条件是(　　)。

A.$A=\varnothing$　　B.B包含于A　　C.$A\cup B=A$　　D.$A-B=\varnothing$

[解答]

D

10.(武汉理工大学2005年考研试题)

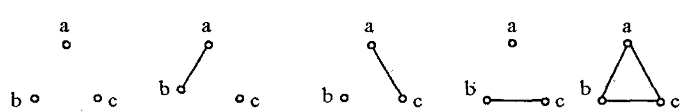
设集合$S=\{a,b,c\}$,S上所有互不相同的等价关系的数目为(　　)。

A.3　　B.4　　C.5　　D.6

[解答]

C

等价关系可以用简化关系图表示,S上互不相同的等价关系有:



11.(重庆大学2002年考研试题)

对任意集合A、B、C,若$A\in B$,$B\subseteq C$,则有(　　)。

A.$A\subseteq C$　　B.$A\in C$　　C.$A\cap B=A$　　D.$A\cap C=A$

[解答]

B

第2章 二元关系

2.1 考试要点

一、关系

要求掌握关系的定义，二元关系的矩阵以及图的表示方法。特殊的二元关系性质（自反性、反自反性、对称性、反对称性、传递性）以及该类关系图、关系矩阵所具有的性质和特征。掌握在给定集合上具有某种性质的关系数目的统计方法。

关系矩阵的主要性质如下：

(1)R 的关系矩阵 M_R 与其补关系 ~R 的关系矩阵 $M_{\sim R}$ 互为补矩阵。

(2)R 的关系矩阵与其逆关系 R^{-1} 的关系矩阵互为转置矩阵。

(3)若 R 为自反的，则它的关系矩阵 M_R 的对角线元素全为 1。

(4)若 R 为反自反的，则它的关系矩阵 M_R 的对角线元素全为 0。

(5)若 R 为对称的，则它的关系矩阵 M_R 一定是对称矩阵。

(6)若 R 为反对称的，则它的关系矩阵 M_R 具有性质：若 $i \neq j$，则 $a_{ij} \times a_{ji} = 0$（其中 a_{ij} 表示 M_R 第 i 行第 j 列元素，a_{ji} 表示 M_R 第 j 行第 i 列元素）。

(7)若 R 是等价关系，则将元素的次序经过某种重新排列后，一定可以将 M_R 化为准对角矩阵。其中，每个对角块均为全 1 矩阵。

(8)若 R 是相容关系，则其关系矩阵 M_R 的对角线元素全为 1，并且是一个对称矩阵。

(9)设二元关系 $R \subseteq A \times B$，$S \subseteq B \times C$，其关系矩阵分别为 M_R，M_S。若 $T = R \circ S$，且分别记 r_{ij}、s_{ij}、t_{ij} 为 M_R、M_S、M_T 中第 i 行第 j 列元素，则必有 $t_{ij} = \bigvee_{k=1}^{m}(r_{ik} \wedge s_{kj})$（m 为 B 中元素的数目）。

(10)设二元关系 $R, S \subseteq A \times B$，其关系矩阵分别为 M_R，M_S。若 $T = R \cup S$，$U = R \cap S$，并分别记 r_{ij}、s_{ij}、t_{ij}、u_{ij} 为 M_R、M_S、M_T、M_U 中第 i 行第 j 列元素，则必有 $t_{ij} = r_{ij} \vee s_{ij}$，$u_{ij} = r_{ij} \wedge s_{ij}$。

关系图的主要性质如下：

(1)R 的关系图 G_R 与其补关系 ~R 的关系图 $G_{\sim R}$ 互为补图。

(2)R 的关系图 G_R 与其逆关系 R^{-1} 的关系图 $G_{R^{-1}}$ 互为反向图。

(3)若 R 为自反的，则它的关系图 G_R 中的每个节点都有自圈。

(4)若 R 为反自反的，则它的关系图 G_R 中的每个节点都没有自圈。

(5)若 R 为对称的，则它的关系图 G_R 中的任意两个节点之间不会只有单条单向边（称为对称图）。

(6)若 R 为反对称的，则它的关系图 G_R 中的任意两个节点之间不会有两条反向的单向边。

(7)若 R 为传递的,则对于 G_R 中任意两个节点 x 和 y,若存在从 x 到 y 的有向通路,则必定有一条从 x 到 y 的有向边。

(8)若 R 为相容关系,则 G_R 的每个节点均有自圈,并且 G_R 为对称图。

(9)若 R 为等价关系,则 G_R 必为若干个完全子图的并集(每个子图对应于一个等价类)。

二、关系的合成和闭包

掌握关系合成的定义,掌握关系三种闭包(自反闭包、对称闭包、传递闭包)的求法及其基本性质。

设 R 为集合 A 上的二元关系:

1. 自反闭包 $r(R)=R\cup I_A$;
2. 对称闭包 $s(R)=R\cup R^{-1}$;
3. 传递闭包 $t(R)=R^{+}=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}R^{i}$。

三、相容关系和等价关系

掌握相容关系的定义。掌握相容类、极大相容类的定义和求解方法。掌握等价关系、等价类的定义。掌握商集与划分的概念。熟悉相容关系和等价关系的简化关系图和简化关系矩阵。掌握等价关系的重要性质:

1. 若 R 为 A 上的二元关系,则 R 为等价关系当且仅当 $s(R)=t(R)=r(R)=R$。
2. 若 R 为 A 上的等价关系,则 $str(R)$,$rst(R)$,$trs(R)$,$tsr(R)$,$rts(R)$,$srt(R)$都是 A 上的等价关系。
3. 若 R 为 A 上的二元关系,则 R 为 A 上的等价关系的充分必要条件为:G_R 的每个极大连通子图都是完全图。

设Π为集合 A 的划分。若令$R_\Pi=\{<x,y>|有 S\in\Pi,使得 x,y\in S\}$,则 R_Π 为 A 上的等价关系,且 $A/R_\Pi=\Pi$。

四、序关系

了解并掌握半序(偏序)和拟序的定义。掌握极大/极小元、最大/最小元、上/下界、上/下确界的定义。掌握覆盖和哈斯图的概念。

2.2 基础题

1. 设 R_1 和 R_2 都是从集合 A 到集合 B 的二元关系,证明:

(1)$dom(R_1\cup R_2)=domR_1\cup domR_2$;

(2)$ran(R_1\cap R_2)\subseteq ranR_1\cap ranR_2$。

[证明]

(1)一方面,任取 $x\in dom(R_1\cup R_2)$,则存在 $y\in B$ 有 $<x,y>\in R_1\cup R_2$。因此有 $<x,y>\in R_1$ 或 $<x,y>\in R_2$。若 $<x,y>\in R_1$,则 $x\in domR_1$,若 $<x,y>\in R_2$,则 $x\in domR_2$。因此总有 $x\in domR_1\cup domR_2$,故 $dom(R_1\cup R_2)\subseteq domR_1\cup domR_2$。

另一方面,任取 $x\in domR_1\cup domR_2$,则 $x\in domR_1$ 或 $x\in domR_2$。若 $x\in domR_1$,则一定有 $y\in B$,使得 $<x,y>\in R_1$,从而 $<x,y>\in R_1\cup R_2$。同理,若 $x\in domR_2$,则一定有 $y\in B$,使得 $<x,y>\in R_2$,从而 $<x,y>\in R_1\cup R_2$。因此,总有 $x\in dom(R_1\cup R_2)$,故 $domR_1\cup domR_2\subseteq dom(R_1\cup R_2)$。

综上，$\mathrm{dom}(R_1\cup R_2)=\mathrm{dom}R_1\cup\mathrm{dom}R_2$。

(2)任取 $y\in\mathrm{ran}(R_1\cap R_2)$，则必有 $x\in A$，使得 $<x,y>\in R_1\cap R_2$。因此，$<x,y>\in R_1$ 且 $<x,y>\in R_2$。进而 $y\in\mathrm{ran}R_1$ 且 $y\in\mathrm{ran}R_2$，即 $y\in\mathrm{ran}R_1\cap\mathrm{ran}R_2$。因此，$\mathrm{ran}(R_1\cap R_2)\subseteq\mathrm{ran}R_1\cap\mathrm{ran}R_2$。

类似可以证得：$\mathrm{ran}(R_1\cup R_2)=\mathrm{ran}R_1\cup\mathrm{ran}R_2$；$\mathrm{dom}(R_1\cap R_2)\subseteq\mathrm{dom}R_1\cap\mathrm{dom}R_2$。更一般的，有以下推论：

设 $\mathscr{R}$ 是从集合 A 到集合 B 的二元关系构成的集类，并且 $B\neq\varnothing$，则有：

i) $\mathrm{dom}(\bigcup\mathscr{R})=\bigcup\{\mathrm{dom}R\mid R\in\mathscr{R}\}$；

ii) $\mathrm{ran}(\bigcup\mathscr{R})=\bigcup\{\mathrm{ran}R\mid R\in\mathscr{R}\}$；

iii) $\mathrm{dom}(\bigcap\mathscr{R})\subseteq\bigcap\{\mathrm{dom}R\mid R\in\mathscr{R}\}$；

iv) $\mathrm{ran}(\bigcap\mathscr{R})\subseteq\bigcap\{\mathrm{ran}R\mid R\in\mathscr{R}\}$。

2. 用 L 和 D 分别表示集合$\{1,2,3,6\}$上的普通的小于关系和整除关系，试列出 L，D 以及 $L\cap D$的所有元素。

[解答]

$L=\{<1,2>,<1,3>,<1,6>,<2,3>,<2,6>,<3,6>\}$

$D=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,6>,<2,2>,<2,6>,<3,3>,<3,6>,<6,6>\}$

$L\cap D=\{<1,2>,<1,3>,<1,6>,<2,6>,<3,6>\}$

3. 试描述整数集 $\mathbf{I}$ 上下列二元关系 R 的性质：

(1) $R=\{<x,y>\mid x,y\in\mathbf{I}$，且 $x\cdot y>0\}$；

(2) $R=\{<x,y>\mid x,y\in\mathbf{I}$，4 整除$|x-y|$且$|x-y|<10\}$。

[解答]

(1) R 是对称的，传递的。

(2) R 是自反的，对称的。

4. 设 $n,m\in\mathbf{I}_+$，若集合 A 上恰有 n 个元素，求在 A 上能有多少个互不相同的 m 元关系？

[解答]

总共有 2^{n^m} 个互不相同的 m 元关系。

因为 A 上的 m 元关系都是 A^m 的子集，而 A^m 包含 n^m 个元素，因此，A^m 共有 2^{n^m} 个子集，即 A 上有 2^{n^m} 个互不相同的 m 元关系。

5. 设 R 为集合 A 上的二元关系，如果 R 是反自反的和传递的，则 R 一定是反对称的。

[证明]

若 R 不是反对称的，即存在 $a,b\in A$ 且 $a\neq b$，使得 $<a,b>\in R$ 且 $<b,a>\in R$。由于 R 是传递的，则有 $<a,a>\in R$，这与 R 是反自反的矛盾。因此 R 一定是反对称的。

6. 设 R 为集合 A 上的二元关系，如果令 $\mathrm{fld}R=\mathrm{dom}R\cup\mathrm{ran}R$，则 $\mathrm{fld}R=\bigcup(\bigcup R)$。

[证明]

(1)对于任意的 $x\in\mathrm{fld}R$，一定有 $x\in\mathrm{dom}R$ 或者 $x\in\mathrm{ran}R$。

若 $x\in\mathrm{dom}R$，则存在 $y\in A$，使得 $<x,y>\in R$，即$\{\{x\},\{x,y\}\}\in R$（回忆一下二元序偶的定义），从而$\{x\}\in\bigcup R$，进而 $x\in\bigcup(\bigcup R)$。若 $x\in\mathrm{ran}R$，则存在 $z\in A$，使得 $<z,x>\in R$，即$\{\{z\},\{x,z\}\}\in R$，从而 $\{x,z\}\in\bigcup R$，进而有 $x\in\bigcup(\bigcup R)$。所以，$\mathrm{fld}R\subseteq\bigcup(\bigcup R)$。

(2) 对于任意的 $x\in\bigcup(\bigcup R)$，则必有集合 B，使得 $x\in B$ 且 $B\in\bigcup R$。于是，必有二元序偶

$<a,b>\in R$，使得 $B\in <a,b>$。而根据定义 $<a,b>=\{\{a\},\{a,b\}\}$，故 B 或者为 $\{a\}$，或者为 $\{a,b\}$。因此，总有 $x=a$ 或者 $x=b$ 成立。若 $x=a$，则 $x\in \mathrm{dom}R$；若 $x=b$，则 $x\in \mathrm{ran}R$。所以，$\bigcup(\bigcup R)\subseteq \mathrm{fld}R$。

由(1)，(2)得 $\mathrm{fld}R=\bigcup(\bigcup R)$。

7. 设 R 为集合 A 上二元关系，则 $R\cup R^{-1}$ 为 A 上包含 R 的最小对称关系，$R\cap R^{-1}$ 为 A 上包含在 R 中的最大对称关系。

[证明]

(1)先证明 $R\cup R^{-1}$ 是 A 上的对称关系。

对于任意的 $<x,y>\in R\cup R^{-1}$，$<x,y>\in R$ 或 $<x,y>\in R^{-1}$。若 $<x,y>\in R$，则 $<y,x>\in R^{-1}$，于是有 $<y,x>\in R\cup R^{-1}$；若 $<x,y>\in R^{-1}$，则 $<y,x>\in R$，亦有 $<y,x>\in R\cup R^{-1}$。因此，$R\cup R^{-1}$ 是 A 上的对称关系。

再证明最小性质，即对于 A 上任意的二元关系 X，若 $R\subseteq X$ 且是对称的，则 $R\cup R^{-1}\subseteq X$。

对于任意的 $<x,y>\in R\cup R^{-1}$，$<x,y>\in R$ 或 $<x,y>\in R^{-1}$。若 $<x,y>\in R$，因为 $R\subseteq X$，则有 $<x,y>\in X$；若 $<x,y>\in R^{-1}$，则 $<y,x>\in R$，因为 $R\subseteq X$，故有 $<y,x>\in X$，由于 X 是 A 上的对称关系，所以仍然有 $<x,y>\in X$。故总有 $R\cup R^{-1}\subseteq X$ 成立。

于是，$R\cup R^{-1}$ 为 A 上包含 R 的最小对称关系。

(2)先证明 $R\cap R^{-1}$ 是 A 上的对称关系。

对于任意的 $<x,y>\in R\cap R^{-1}$，则有 $<x,y>\in R$ 且 $<x,y>\in R^{-1}$。由于 $<x,y>\in R$，所以 $<y,x>\in R^{-1}$，又由于 $<x,y>\in R^{-1}$，所以又有 $<y,x>\in R$，故 $<y,x>\in R\cap R^{-1}$。因此，$R\cap R^{-1}$ 是 A 上的对称关系。

再证明对于 A 上任意的二元关系 Y，若 $Y\subseteq R$ 且是对称的，则 $Y\subseteq R\cap R^{-1}$。

对于任意的 $<x,y>\in Y$，由于 Y 对称，则有 $<y,x>\in Y$。又由于 $Y\subseteq R$，故 $<x,y>\in R$ 且 $<y,x>\in R$。由 $<y,x>\in R$ 可得 $<x,y>\in R^{-1}$，进而 $<x,y>\in R\cap R^{-1}$。因此，$Y\subseteq R\cap R^{-1}$。

于是，$R\cap R^{-1}$ 为 A 上包含在 R 中的最大对称关系。

8. 设 R 为任意的二元关系，证明：

(1)$\mathrm{dom}R^{-1}=\mathrm{ran}R$；

(2)$\mathrm{ran}R^{-1}=\mathrm{dom}R$。

[证明]

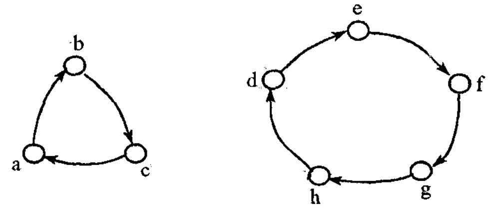
只证明(1)，(2)的证法与(1)类似。

对于任意的 $y\in \mathrm{dom}R^{-1}$，必然存在 $x\in \mathrm{ran}R^{-1}$，使得 $<y,x>\in R^{-1}$，即：存在 $<x,y>\in R$，故 $y\in \mathrm{ran}R$。所以 $\mathrm{dom}R^{-1}\subseteq \mathrm{ran}R$。

同样地，对于任意的 $y\in \mathrm{ran}R$，必然存在 $x\in \mathrm{dom}R$，使得 $<x,y>\in R$，即：$<y,x>\in R^{-1}$，故 $y\in \mathrm{dom}R^{-1}$。所以 $\mathrm{ran}R\subseteq \mathrm{dom}R^{-1}$。

因此，$\mathrm{dom}R^{-1}=\mathrm{ran}R$。

9. 设 R 为由右图所确定的集合 $\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ 上的二元关系。设 m，n 是满足 $m<n$ 且 $R^m=R^n$ 的最小正数，则 $m=$______，$n=$______。



[解答]

1. 16

(提示:R 关系图中,左边子图的周期为 3,右边子图的周期为 5,取最小公倍数,得 $I=R^0=R^{15}$。现在要求最小正整数,故 $m=1,n=16$。)

10. 判断下列结论是否成立:

(1)如果 R_1 和 R_2 都是自反的,则 $R_1\circ R_2$ 也是自反的。 (　　)

(2)如果 R_1 和 R_2 都是反自反的,则 $R_1\circ R_2$ 也是反自反的。 (　　)

(3)如果 R_1 和 R_2 都是对称的,则 $R_1\circ R_2$ 也是对称的。 (　　)

(4)如果 R_1 和 R_2 都是反对称的,则 $R_1\circ R_2$ 也是反对称的。 (　　)

(5)如果 R_1 和 R_2 都是传递的,则 $R_1\circ R_2$ 也是传递的。 (　　)

[答案]

(1)√

(2)×

(提示:例如集合 $\{a,b\}$ 上的两个二元关系 R_1 和 R_2。其中 $R_1=\{<a,b>\}$,$R_2=\{<b,a>\}$。)

(3)×

(提示:例如集合 $\{a,b,c\}$ 上的两个二元关系 R_1 和 R_2。其中,$R_1=\{<a,b>,<b,a>\}$,$R_2=\{<b,c>,<c,b>\}$。)

(4)×

(提示:例如集合 $\{a,b,c,d\}$ 上的两个二元关系 R_1 和 R_2。其中,$R_1=\{<a,b>,<d,c>\}$,$R_2=\{<b,d>,<c,a>\}$。)

(5)×

(提示:例如集合 $\{a,b,c,d,e\}$ 上的两个二元关系 R_1 和 R_2。其中,$R_1=\{<a,b>,<c,d>\}$,$R_2=\{<b,c>,<d,e>\}$。)

11. 设 R 为集合 A 上的二元关系。$s,t\in \mathbf{N}$,$s<t$,且 $R^s=R^t$。证明:

(1)若 $k\in\mathbf{N}$,则 $R^{s+k}=R^{t+k}$;

(2)若 $k,i\in\mathbf{N}$,则 $R^{s+kp+i}=R^{t+i}$,其中 $p=t-s$;

(3)若 $k\in\mathbf{N}$,则 $R^k\in\{R^0,R^1,\cdots,R^{t-1}\}$。

[证明]

(1)因为 $R^s=R^t$,所以 $R^{s+k}=R^k\circ R^s=R^k\circ R^t=R^{t+k}$。

(2)对 k 使用数学归纳法:

i)当 $k=0$ 时,由(1)得:$R^{s+i}=R^{t+i}$;

ii)假设当 $k=m(m\geqslant 0)$ 时,原式成立;则当 $k=m+1$ 时:

$R^{s+(m+1)p+i}=R^p\circ R^{s+mp+i}=R^{(t-s)}\circ R^{s+mp+i}=R^{t+i}$(归纳假设)。

于是,$R^{s+(m+1)p+i}=R^{s+i}$。

由 i),ii)得,对于任意的 $k,i\in\mathbf{N}$,有 $R^{s+kp+i}=R^{t+i}$。

(3)对 k 使用数学归纳法:

i)当 $0\leqslant k\leqslant t-1$ 时,结论显然成立;

ii)假设当 $k=m(m\geqslant t-1)$ 时,有 $R^m\in\{R^0,R^1,\cdots,R^{t-1}\}$ 成立,则当 $k=m+1$ 时:

若 $R^m\neq R^{t-1}$,则必有 $n<t-1$,使得 $R^m=R^n$。于是,$R^{m+1}=R^{n+1}$。由于 $n+1\leqslant t-1$,所以有