● 高等学校教材

微积分学

（上册）

蔡燧林　吴正昌　编著

高等教育出版社

高等学校教材

微积分学

（上册）

蔡燧林　吴正昌　编著

高等教育出版社

内容提要

本书根据最新修订的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》而编写，适合高等学校工科类专业、经管类专业本科学生使用。在编写过程中，作者在抽象思维能力、逻辑思维能力、空间想象能力、运算能力和运用所学知识分析解决问题能力等方面给予了重点训练。在材料处理上，作者从感性认识入手，上升到数学理论，突出重点，删去枝节，降低难度，删去纯理论证明，加强基本训练，对强化学生的数学思维很有帮助。

本书上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、不定积分、定积分、无穷级数等。

图书在版编目(CIP)数据

微积分学. 上册 / 蔡燧林，吴正昌编著. —北京：高等教育出版社，2008.2

ISBN 978-7-04-023110-6

Ⅰ. 微… Ⅱ. ①蔡…②吴… Ⅲ. 微积分-高等学校-教材 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 004744 号

策划编辑 王　强　**责任编辑** 张耀明　**封面设计** 于文燕　**责任绘图** 杜晓丹
版式设计 张　岚　**责任校对** 王　超　**责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　址	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　刷	北京嘉实印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　本	787×960　1/16	版　次	2008 年 2 月第 1 版
印　张	20	印　次	2008 年 2 月第 1 次印刷
字　数	370 000	定　价	25.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　23110-00

前言

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的科学，它有极丰富的内涵与外延。高等学校里学习数学，已被人们公认为，不仅是为了掌握一种工具，增长知识，更重要的是培养一种思维模式，提高文化素养。能否用数学的思维、方法去思考、推理以及定量分析一些自然现象和经济现象，是衡量民族科学文化素质的重要标志，数学教育在培养高素质人才中有不可替代的重要作用。一条定理、一个公式可以忘记，但是数学思维的训练却受益终生。

微积分是高等学校工科类专业、经管类专业一门重要的数学基础课。2003年，“教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会”制订了《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，我们根据这个《基本要求》，并参照《工学、经济学、管理学全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》进行适当取舍，编写了这本微积分教材。在本教材中，我们力求在抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、运算能力和综合运用所学的知识分析问题解决问题的能力五个方面，给予足够的重视与训练。在材料处理上，做到突出重点，删去枝节，减少篇幅，让教师有发挥的余地。并考虑到不同类型、不同层次的学校与不同专业的需要，我们采取灵活的编写方式，使得对某些部分的取舍，不影响后续内容的讲授。教材中个别内容用小字排印，可供选学。

读者将会看到，在本书中，我们淡化 ε-N 与 ε-δ 的论证，而较多地培养学生对极限的感性认识和作用，尽早接触极限的运算；鉴于目前中学教科书中的情况，我们充实了参数方程与极坐标，基本上做到从头讲起；增设处理不等式问题与零点问题的方法，以培养学生利用微积分解决这类问题的能力；对于泰勒公式，我们采取了自成一体独立一节的编写方式，既可严格地讲授泰勒公式，又可不讲它而照样能讲其他内容；强调基本积分方法的训练，淡化特殊积分技巧，删去有理函数积分的一般论述；多元函数积分学突出的是让学生掌握分割加细的极限过程，不拘泥于定义中一些细节的描述，主要的是着重于一些常用方法的讲授与训练；本书配置了丰富的例题并有较详尽的分析，以便学生加深对内容的理解，并有利于学生练习；书中还介绍了弹性、边际、差分与一阶差分方程等有关内容，可供经济类专业学生参考。

本书可作为普通高等院校工科类专业、经济类专业与管理类专业教学用书，可以按照各自的基本要求取舍内容。

本书自始至终得到浙江大学宁波理工学院院领导的支持和关怀，并得到该

院的经费资助；郑云秋、徐忠明两位老师详细阅读了本书原稿，并提出不少修改意见；孙海娜、余琛妍两位老师认真演算、校正了本书的习题；宁波理工学院数学老师在使用本书的过程中，提出了许多有益的见解，编者在此一并向他们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，诚恳希望使用此书的同行，能及时指出书中存在的问题，以便改正。

编　者

于浙江大学宁波理工学院

浙江大学求是村

目 录

1

第一章 函 数

事物与事物之间的关系，反映到量上来，常常涉及函数这一概念. 函数是高等数学讨论的主要对象. 中学里已初步介绍过函数概念与一些初等函数的性质，本章复习这些知识并进一步讨论函数. 在以后各章，无论从表示方法还是研究方法上，都将进一步发展.

§1.1 函数概念

一、实数与实数集

1. 实数与数轴

本书所用到的数，除特别声明者外，指的都是实数. 例如，对于方程 $x^2+1=0$，如无另外声明，就认为无解.

实数的分类如下表：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{正、负整数与零}\\\text{正、负分数}\end{cases}\\\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\text{（无限的不循环小数）}\end{cases}$$

实数集记为 $\mathbf{R}$，正、负实数集分别记为 $\mathbf{R}^+$ 与 $\mathbf{R}^-$. 整数集记为 $\mathbf{Z}$，正、负整数集分别记为 $\mathbf{Z}^+$ 与 $\mathbf{Z}^-$. 可表示为 $\frac{p}{q}$ 的数称**有理数**，其中 $p,q\in\mathbf{Z}$ 且互质，$q\neq0$. 当 $q=1$ 时就成为整数. 有理数集记为 $\mathbf{Q}$.

实数与数轴上的点构成一一对应，故常将实数 x 对应的点称为点 x，对应于有理数的点称有理点. 任意两个不相等的有理点之间仍有有理点. 例如，设 $x_1=\frac{p_1}{q_1}\in\mathbf{Q}$，$x_2=\frac{p_2}{q_2}\in\mathbf{Q}$，$x_1\neq x_2$，则 $x_3=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$ 介于 x_1 与 x_2 之间，且

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}\right) = \frac{p_1q_2 + p_2q_1}{2q_1q_2} \in \mathbf{Q},$$

所以有理点在数轴上是稠密的. 但数轴并不被有理点所填满,有理点与有理点之间还有空隙,例如$\sqrt{2}$,π 都是无理数,对应的点称无理点. 可以证明,任意两有理点之间必有无理点,无理点与有理点填满了数轴.

2. 实数的绝对值

实数的绝对值是高等数学中经常用到的概念,定义如下:设 $x \in \mathbf{R}$,定义 x 的绝对值

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

从几何上讲,$|x|$ 表示点 x 与原点的距离. 设 $x \in \mathbf{R}$,$y \in \mathbf{R}$,容易证明:$|x-y|$ 表示点 x 与点 y 之间的距离.

实数的绝对值有下述性质:

(1) $|x| \geqslant 0$. $|x| = 0$ 的充分必要条件是 $x = 0$.

(2) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

(3) 设 $a > 0$,则 $|x| \leqslant a$ 的充分必要条件是 $-a \leqslant x \leqslant a$.

(4) 设 $a > 0$,则 $|x| \geqslant a$ 的充分必要条件是 $x \leqslant -a$ 或 $x \geqslant a$.

由上述(1)~(4),可推出关于 $|x-A|$ 的性质. 例如,设 $\delta > 0$,则 $|x-A| \leqslant \delta$ 的充分必要条件是 $A-\delta \leqslant x \leqslant A+\delta$;类似地有:设 $\delta > 0$,则 $|x-A| < \delta$ 的充分必要条件是 $A-\delta < x < A+\delta$.

实数的绝对值还有下述四则运算性质:

(5) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

(6) $|x-y| \geqslant \big||x| - |y|\big| \geqslant |x| - |y|$.

(7) $|xy| = |x||y|$.

(8) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$.

以上 8 条性质其证明均略.

3. 区间与邻域

区间是实数集中常用的一类子集,定义如下:

设 a 与 b 是两个实数,并设 $a < b$,集合 $\{x \mid a < x < b\}$ 称**开区间**,记为

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$$

(平面 xOy 上坐标为 $x = a, y = b$ 的点也表示为(a,b),由上、下文可以区分它

们).类似地定义

闭区间 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$,

半开区间 $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$,$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$,

无穷区间 $(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$,$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$,

$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$,$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$,

$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in \mathbf{R}\}$.

这里,方括号"["或"]"与圆括号"("或")"不能混淆,前者包含相应的端点,后者则不包含.将来会看到,它们有显著的区别."∞"不是数,所以只能用圆括号.

如果不必区分是开区间,闭区间,还是半开区间或是无穷区间,则常用记号 I 表示之.

邻域也是一个常用的概念.设 $\delta>0$,集合

$$U_\delta(x_0)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$$

即

$$U_\delta(x_0)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$$

称为 $x=x_0$ 的 δ **邻域**,δ 称为**邻域的半径**.如果不必说及邻域的半径 δ 的大小,则简记为 $U(x_0)$,称为 $x=x_0$ 的某邻域.

集合

$$\mathring{U}_\delta(x_0)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\},$$

即

$$\mathring{U}_\delta(x_0)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta,x\neq x_0\}$$

称为 $x=x_0$ 的**去心** δ **邻域**.类似地也有记号 $\mathring{U}(x_0)$ 及名称.

如果有必要再仔细区分的话,那么可定义:

$x=x_0$ 的左半 δ 邻域为 $\{x\mid x_0-\delta<x\leqslant x_0\}$,

$x=x_0$ 的右半 δ 邻域为 $\{x\mid x_0\leqslant x<x_0+\delta\}$,

$x=x_0$ 的左半去心 δ 邻域为 $\{x\mid x_0-\delta<x<x_0\}$,

$x=x_0$ 的右半去心 δ 邻域为 $\{x\mid x_0<x<x_0+\delta\}$.

例如,对于开区间 (a,b),设 $x_0\in(a,b)$,必存在相应的 $\delta>0$,使 $U_\delta(x_0)\subset(a,b)$.但对于闭区间 $[a,b]$,在其端点 $x=a$ 处,存在 $\delta>0$,只能使 $x=a$ 的右半邻域包含于 $[a,b]$;而不论 $\delta>0$ 多么小,$x=a$ 的左半邻域总不可能包含于 $[a,b]$ 了.对于 $[a,b]$ 的 $x=b$ 处亦类似.这种虽是微细的区别,但在高等数学中却是十分重要的区别.

二、函数及其表示法

1. 变量与常量

在客观世界考察某一运动过程时，会遇到各种各样的量. 有的量在所研究的过程中保持一定的数值，这种量称为**常量**；有的量在过程中可取不同的数值，这种量称为**变量**. 例如一架客机在从北京飞往杭州的过程中，飞机与北京的水平距离及飞行高度，油箱中的储油量，都是变量，而机中的乘客数及飞机的长度是常量. 而当飞机到达机场熄火停机，在旅客下机的过程中，飞机与北京的水平距及飞机离地面的高度，油箱里的储油量都是常量，而在机中乘客数为变量. 又如观察大大小小许多不同的圆时，圆的半径是变量，但不论哪个圆，它的圆周长与半径的比恒等于 2π，是一个常量. 可见常量与变量是相对于某一过程而言的，离开了过程去谈常量变量不但毫无意义，而且往往要犯概念上或计算上的错误. 本书中，变量一般用 $x,y,t,\cdots$ 表示，常量一般用 $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 表示.

2. 函数的定义

在同一过程中，往往有几个不同的变量在同时变化着，这些变量的变化不是孤立的，而是彼此联系着的. 看几个例子.

例 1 考察自由落体运动. 设以地面为坐标原点，垂直向上为正向，开始运动的时刻作为 $t=0$，相应的位置坐标 $s=s_0\,(s_0>0)$，则于时刻 t 时，

$$s = s_0 - \frac{1}{2}gt^2 \quad \left(0 \leqslant t \leqslant \sqrt{\frac{2s_0}{g}}\right),$$

其中 g 为重力加速度. 当 s_0 不大时，g 可作为常数. 对于闭区间 $\left[0,\sqrt{\frac{2s_0}{g}}\right]$ 上的任意一个 t 值，可以确定相应的唯一的 s 值.

例 2 信函的质量与应付邮资的关系. 根据现行规定，寄往国内的外埠平信其重不超过 100 g 时，每重 20 g 资费为 1.2 元，尾数不足 20 g 以 20 g 计；超过 100 g 时，每重 100 g 资费为 2 元，尾数不足 100 g 以 100 g 计，每件至多为 2 000 g. 试列出资费 s(元)与信函质量 p(g)之间的关系.

解 将区间 $(0,100]$ 分成 5 段，分别为 $(0,20],(20,40],\cdots,(80,100]$. 将区间 $(100,2\,000]$ 分成 19 段，为 $(100,200],(200,300],\cdots,(1\,900,2\,000]$. 于是可写出 s 与 p 之间的关系为

$$s=\begin{cases}1.2n, & \text{当 } 20(n-1)<p\leqslant 20n\,(n=1,2,\cdots,5);\\ 6+2(n-5), & \text{当 } 100(n-5)<p\leqslant 100(n-4)\,(n=6,7,\cdots,24).\end{cases}$$

对于区间 $(0,2\,000]$ 内每一确定的 p，有唯一确定的 s 与之对应.

例 3 某气象站用自动记录仪器记下一昼夜气温的变化规律,如图 1-1. 它形象地表示出气温 T 与时间 t 的关系. 从时间 $t=0$ 到 $t=24$(小时)这个范围内,对于每一个确定的时间 t(横坐标),通过这条气温曲线所示的规律,有唯一确定的气温 T(℃)(纵坐标)与之对应.

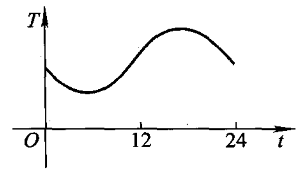

图 1-1

以上各例概括出来是,有两个变量,其中一个变量在一个非空的实数集内每取一个确定的值,按照一定规则,另一变量相应地有唯一确定的值与之对应. 两个变量之间的这种对应关系就是函数关系.

定义 1.1 设有两个变量 x 与 y,X 是一个非空的实数集. 若存在一个对应规则 f,使得对于每一个 $x\in X$,按照这个规则,y 有唯一确定的值与之对应,则称 f 是定义在 X 上的一个**函数**,x 称为**自变量**,X 称为函数 f 的**定义域**,y 称为**因变量**. 函数 f 在 $x\in X$ 处对应的 y 的值,称为**函数值**. 记为

$$y=f(x),\quad x\in X. \tag{1.1}$$

函数值所组成的集合,常记为 Y.

$$Y=\{y\mid y=f(x),x\in X\}$$

称为函数 f 的**值域**. □

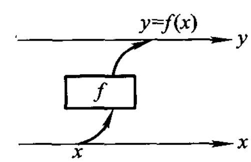

图 1-2

关系式(1.1)表达了因变量 y 随自变量 x 的变化而变化的规律,所以可以通过 y 即 $f(x)$ 来研究函数 f. f 是抽象的,而 $f(x)$ 是具体的,今后在本书中,也称 y 或 $f(x)$ 为 x 的函数,并且用它来讨论函数 f 的性态.

上面 3 个都是函数的例子. 例 1 是用一个解析式表示的函数. 例 2 是当自变量在不同的范围内,用不同的解析式表示,但仍是一个函数而不是几个函数. 一般,在定义域的不同范围内用不同的解析式表示的函数,称为**分段函数**. 分段函数仍是一个函数,而不能说是几个函数. 例 3 虽没有解析式,但合乎函数的定义,所以它也是一个函数. 函数与有无解析式,在定义域的不同范围内是用一个式子还是不同式子表达是无关的.

由函数定义可见,当且仅当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域相同,并且对应关系也相同时,这两个函数才相等,可视为同一函数:

$$f(x)\equiv g(x).$$

例如,$f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg|x|$ 相等,但 $f(x)$ 与函数 $h(x)=2\lg x$ 的定义域不同,故它们不是同一函数. 若定义域限制于区间 $(0,+\infty)$,则有

$$f(x)\equiv h(x).$$

如果一个函数是用一个解析式表示,并且没有另外说明它的定义域,那么使这个解析式有意义的范围,就认为是该函数的定义域.

例 4 求函数$f(x)=\sqrt{2+x}+\dfrac{1}{\lg(1-x)}$的定义域.

解 $\sqrt{2+x}$的定义域是$\{x\mid x\geqslant -2\}$. $\lg(1-x)$的定义域是$\{x\mid x<1\}$. 但$\dfrac{1}{\lg(1-x)}$的分母应不为零. 故$\{x\mid x\neq 0\}$. 以上三个数集的交

$$\begin{aligned}&\{x\mid x\geqslant -2\}\cap\{x\mid x<1\}\cap\{x\mid x\neq 0\}\\ =&\{x\mid -2\leqslant x<1, x\neq 0\}\end{aligned}$$

即为所求函数的定义域.

例 5 设$f(x)=\log_a(\sqrt{1+x^2}+x)$,其中$a>0,a\neq 1$. 求$f(-x)$,$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

解 $f(-x)=\log_a(\sqrt{1+(-x)^2}-x)=\log_a(\sqrt{1+x^2}-x)$

$$\begin{aligned}&=\log_a\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}\\ &=\log_a\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=-\log_a(\sqrt{1+x^2}+x)\\ &=-f(x),\qquad x\in\mathbf{R}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{x}\right)&=\log_a\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}\right)=\log_a\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}+\frac{1}{x}\right)\\ &=\begin{cases}\log_a(\sqrt{1+x^2}+1)-\log_a x, & x>0,\\ \log_a(\sqrt{1+x^2}-1)-\log_a(-x), & x<0.\end{cases}\end{aligned}$$

例 6 设$f(x)=\begin{cases}\sqrt{3-x}, & -2\leqslant x<0,\\ x^2, & 0\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$求$f(-1)$,$f(0)$,$f(2-x)$,$f(x-2)$.

解 $f(-1)=\sqrt{3-(-1)}=2$. $f(0)=0^2=0$.

$$f(2-x)=\begin{cases}\sqrt{3-(2-x)}, & -2\leqslant 2-x<0,\\ (2-x)^2, & 0\leqslant 2-x\leqslant 2,\end{cases}$$

即

$$f(2-x)=\begin{cases}\sqrt{1+x}, & 2<x\leqslant 4,\\ x^2-4x+4, & 0\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

$$f(x-2)=\begin{cases}\sqrt{3-(x-2)}, & -2\leqslant x-2<0,\\ (x-2)^2, & 0\leqslant x-2\leqslant 2,\end{cases}$$

即

$$f(x-2)=\begin{cases}\sqrt{5-x}, & 0\leqslant x<2,\\ x^2-4x+4, & 2\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$$

例 7 设 $f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=x^2$，求 $f(x)$，写出 $f(x)$ 的定义域，并计算 $f(0)$，$f(-1)$.

解 令 $u=\dfrac{x-1}{x+1}$，从而 $x=\dfrac{1+u}{1-u}$，于是

$$f(u)=\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^2,\quad f(x)=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2.$$

定义域是 $x\in\mathbf{R}$，$x\neq 1$. $f(0)=1^2=1$. $f(-1)=0^2=0$.

3. 几个常用的函数及其图像

所谓函数 $y=f(x)\ (x\in X)$ 的图像，是指 xOy 平面上的点集

$$\{(x,y)\mid y=f(x), x\in X\}.$$

由于 X 中的每一个 x_0，有且仅有一个 $y_0=f(x_0)$ 与之对应，所以与 y 轴平行的直线 $x=x_0\ (x_0\in X)$，与 $y=f(x)$ 的图像必相交，且仅交于一点 (x_0,y_0).

下面举几个常用的函数及其图像的例子.

例 8 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

其图像如图 1－3.

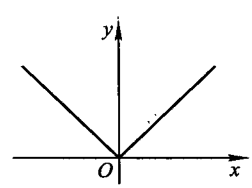

图 1－3

例 9 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

它表示 x 的符号，故称**符号函数**. 其图像如图 1－4. 显然有

$$|x|=x\operatorname{sgn} x,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

例 10 取整函数$[x]$,它表示不超过x的最大整数. 例如,$[3.2]=3$,$[4]=4$,$[-\pi]=-4$. 一般,设$n\leqslant x<n+1$,则$[x]=n$. $y=[x]$的图像如图 1-5. 显然有

$$[x]\leqslant x<[x]+1,$$
$$[x+1]=[x]+1,$$
$$x\in(-\infty,+\infty).$$

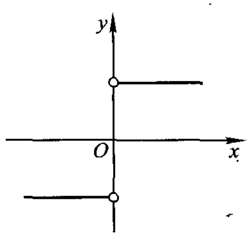

图 1-4

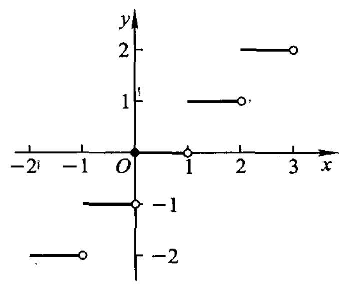

图 1-5

§1.2 函数的几种特性

研究函数时,经常要讨论它是否具有某种特性.

一、单调性

定义 1.2 设函数$f(x)$在实数集X上有定义,如果对于任意的$x_1\in X$,$x_2\in X$,$x_1<x_2$,就一定有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad(f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称$f(x)$在X上是**单调增加(减少)**的. 如果一定有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad(f(x_1)>f(x_2)),$$

则称$f(x)$在X上是**严格单调增加(减少)**的. □

函数$f(x)=x^3$在$(-\infty,+\infty)$内是严格单调增加的;函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(-\infty,0)$与$(0,+\infty)$内分别都是严格单调减少的,但不能说成在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$内是严格单调减少的;函数$f(x)=x^2$在$(-\infty,0]$上是严格单调减少的,在$[0,+\infty)$上是严格单调增加的,而在$(-\infty,+\infty)$内不是单调的;函数$f(x)=[x]$在$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的,但不是严格的.

中学教科书里一般是用定义检验单调性，但那样比较麻烦并且往往不容易做到，将来学了微分学后，会有比较好的方法来处理.

二、奇偶性

定义 1.3 设函数 $f(x)$ 在对称于原点的某实数集 X 上有定义，并且对于任意 $x\in X$，必有 $f(-x)=f(x)$ $(f(-x)=-f(x))$，则称 $f(x)$ 在 X 上为**偶(奇)函数**. □

在直角坐标系 xOy 中，偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于坐标原点(0,0)对称.

判别函数奇偶性的方法主要靠定义. 当然，如果 X 不对称于原点，则 $f(x)$ 在 X 上必不是偶(奇)函数.

例如，设 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$，$x\in\mathbf{R}$，其中 $a>0$，$a\neq1$. 由于 $f(-x)=-f(x)$（见本章§1.1 例 5），所以 $\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数.

两非零偶函数的乘积，两非零奇函数的乘积，都是偶函数；均非零的一奇一偶两函数的乘积为奇函数；一非零奇函数与一非零偶函数的和为非奇非偶函数.

三、周期性

定义 1.4 设 $f(x)$ 的定义域是 X，如果存在常数 $T>0$，当 $x\in X$ 时，必有 $x\pm T\in X$，并且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为它的一个**周期**. 通常称的周期是指使 $f(x+T)=f(x)$ 成立的最小正数 T（如果存在的话）. □

例如 $\sin\omega x$，$\cos\omega x$ 的周期是 $\dfrac{2\pi}{\omega}$ $(\omega>0)$；$\tan\omega x$ 的周期是 $\dfrac{\pi}{\omega}$ $(\omega>0)$. 常数 C 也是一个周期函数，任意实数 $T>0$ 都是它的周期，它没有最小正周期.

判别 $f(x)$ 是否为周期函数，主要靠定义.

四、有界性

定义 1.5 设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义. 如果存在常数 M，当 $x\in X$ 时 $f(x)\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X 上有**上界**；如果存在 m，当 $x\in X$ 时 $f(x)\geqslant m$，则称 $f(x)$ 在 X 上有**下界**；如果 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界，则称 $f(x)$ 在 X 上**有界**. □

定义中的 m 与 M 分别称为 $f(x)$ 在 X 的下界与上界，显然，如果 $m(M)$ 是 $f(x)$ 在 X 的下(上)界，则比 m 小（比 M 大）的任何实数，都是 $f(x)$ 在 X 的下(上)界.

如果不论 M 多么大，总有 $x\in X$ 使 $f(x)>M$，则称 $f(x)$ 在 X 上**无上界**；类似地可以定义**无下界**.

例如，函数 $\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界；函数 a^x $(a>1)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有