双博士系列

2004 年考研辅导教材

2004 硕士研究生入学考试

应试教程

数学分册

理工类

总策划 胡东华

编 写 双博士考研数学课题组

双博士精品系列

机械工业出版社
China Machine Press

考研辅导教材(2004 年版)

硕士研究生入学考试
应试教程(数学分册)

[理工类]

总策划　胡东华
编　写　双博士考研数学课题组

机 械 工 业 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试应试教程. 数学分册:理工类/双博士考研数学课题组编写.
-北京:机械工业出版社,2003.3
考研辅导教材
ISBN 7-111-09978-8

Ⅰ. 硕...　Ⅱ. 双...　Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ. G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 013385 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号　邮编:100037)
责任编辑:荆宏智　王春雨　于奇慧　　责任校对:贺振显
封面设计:胡东华　　责任印制:何全君
保定市印刷厂印刷　　机械工业出版社出版发行
2003 年 3 月第 2 版　第 1 次印刷
787mm × 1092mm　1/16　印张 40.125　字数 851 千字
定价:48 元

http://www.bbdd.cc

“考研押题讲座”免费授课计划

一、内容：考研政治、英语、数学（一、二、三、四）、西医综合科目考前一个半月押题讲座

二、讲座总策划及献爱心人：胡东华

三、讲座资料提供：

北大、清华、人大考研辅导班资料采编组
京城考研命题信息搜集研究组　　联合提供

四、免费讲座时间：2003 年 12 月 1 日—2004 年 1 月 15 日

五、网站：中国教育考试双博士网站：http://www.bbdd.cc

六、课程表：

时间 科目	12 月第 1 周	12 月第 2 周	12 月第 3 周	12 月第 4 周	1 月第 1 周	1 月第 2 周
政　治	马克思主义哲学 政治经济学	毛泽东思想概论	邓小平理论概论	当代世界 经济与政治 时事政治	网上通知	网上通知
英　语	听力	英语知识运用	阅读理解 A （命题趋势）	阅读理解 B （英译汉）	写作命题预测 及背诵范文	网上通知
数学一	高数 （1 ~ 5）	高数 （6 ~ 11）	线性代数	概率论与 数理统计	网上通知	网上通知
数学二	高数（1 ~ 3）	高数（4 ~ 6）	高数（7 ~ 11）	线性代数	网上通知	网上通知
数学三	微积分 （1 ~ 5）	微积分 （6 ~ 10）	线性代数	概率论与 数理统计	网上通知	网上通知
数学四	微积分 （1 ~ 5）	微积分 （6 ~ 10）	线性代数	概率论	网上通知	网上通知
西医综合	生理学 生物化学	病理学	外科学	内科学	网上通知	网上通知

（如有变化，另行通知）

双博士品牌　真情大奉献

来自北京大学研究生会的感谢信

双博士：

您好！

首先感谢您对北京大学“十佳教师”评选活动的热情支持和无私帮助！师恩难忘，北京大学“十佳教师”评选活动是北京大学研究生会的品牌活动之一，是北京大学所有在校研究生和本科生对恩师情谊的最朴素表达。双博士作为大学教学辅导及考研领域全国最大的图书品牌之一，不忘北大莘莘学子和传道授业的老师，其行为将永久的被北大师生感怀和铭记。

作为考研漫漫征途上的过来人，双博士曾陪伴我们度过考研岁月的无数个日日夜夜，曾带给我们无数个明示和启发，当然也带给我们今天的成功。

特致此信，向双博士表达我们内心长久以来的感激之情，并祝愿双博士事业蒸蒸日上。

北京大学研究生会

二零零二年十二月

郑州某大学学生的来信

双博士：

您好！

……

我曾购买了“双博士”的《大学英语精读课文辅导》(3)、(4)册，我认为质量很好，因为我在准备 2001 年 6 月份的全国四级考试前没买太多的辅导资料，仅是每天背《辅导》上的知识点，另外又做(看)了双博士的模拟题、真题解析及词汇，而我却考出了 94.5 分的骄人成绩，真应感谢双博士为我们带来了如此上乘的资料。我信赖双博士，也相信考研中借助双博士的力量，会取得更好的成绩。所以我在您寄来的书目中挑了一下，如果可以的话，我想得到代号为“RB12”的《考研应试教程(英语分册)》，或者是代号为“B18A”的《研究生入学考试英语词汇·考点·记忆法·用法详解》。两本书中的任何一本，我都相信会给我带来好运！

另外，……

李 XX

2001 年 11 月 22 日

天津某高校学生的来信

双博士：

你们好！

……

我们都知道，英语学习中，口语是非常重要的，而《英美流行口语》正是我们所需要的，是一场及时雨。五一、五四前后，我校将举办一次口语演讲比赛，我们将把这几本书作为奖品赠送给口语出色的同学，相信他们会很意外，也会很高兴的。双博士为我们着想，我们也希望能以微小之力量，给她的工作以支持和回报。其实，我想，只要我们真正为爱好英语的同学做了事，使他们从中受了益，英语有了提高，就是对“双博士”最好的回报了，对不对？

还有，我校对购买“双博士”图书比较困难，到书店买，常被抢购一空，由老师订购又“姗姗来迟”，所以，我想与你们联系，能否帮同学们统一订购？如可以，请将你们的订购时间、办法等以传真方式告诉我。

……

英语俱乐部会长：于 XX

2002 年 4 月 24 日

前　言

本教程是与考试大纲相配套的考研辅导用书。今年的版本是在去年版本的基础上又一次成功的飞跃。

本书是依据最新版的硕士研究生入学考试数学（理工类）考试大纲（数学一、数学二），以及本书编写组对考研命题的研究，在原辅导教材基础上作了较大修改而完成的。

本次修订的第一个特点是以例题、自测题为本书主干，删掉了基本知识点的重复表达。因为“学数学的最好方法在于做数学”，所以建议读者自己多动手演算或证明这些精选的题目。

第二个特点在本书中增加组合凑微分法内容。这部分内容是由双博士考研数学课程组独家总结出来公开发表的，是一种很实用很灵活解微分方程以及曲线积分的方法。本方法在其他同类书中未涉到，在此特别指出的是该方法对考生应考有一定的指导作用。

第三个特点是将例题按知识点分类成小节，符合考生由浅入深地掌握各知识点的学习习惯。

第四个特点是精选了近几年的考研试题进行深入剖析，包括填空与选择题，从中总结出考题的命题规律及如何解答各类试题并从中归纳出解题技巧。

第五个特点是将 1993 年—2003 年考题按考点、年份、分值列表，便于学生明确各章重心，明白出题趋势，高屋建瓴，有的放矢，掌握知识点。

第六个特点是给出各种符号公式使用的最新标准，特别是在数理统计部分使用最新的分布表，帮助考生适应标准化考试。

本书不仅是硕士研究生入学考试应试者的复习用书，也可作为学习微积分、线性代数、概率论与数理统计的参考书，也便于自学者学习时参考。

凡购买双博士品牌考研丛书累计 60 元者，在临考前一个月可获赠英语及政治密押（内部资料）试卷各一套！（详见书中夹页）

本书作者在 2003 年 11、12 月份进行考研网上免费押题讲座，届时敬请垂询：http://www.bbdd.cc。此义举将为考生最后的拼搏指点迷津。该讲座已成功举办两年，受益群体多达 20 万之众。

双博士考研数学课题组

"双博士"网站留言选登

自从2002年11月~12月双博士网站举办考研及四、六级讲座以来,每天都有大量读者留言,交流考试心得和对双博士丛书的观感。现将部分留言选登如下:

作者:考研人　来自:湖北　2003-2-16,23:31:04

留言内容:今天上网把你们的考研网上押题讲座和你们上传的真题对比来看,押中的题还真不少来!希望双博士在2004年考研政治理论方面继续给广大考生押题!!

作者:奋斗　来自:福建　2003-2-16,23:40:00

留言内容:是的,我认为政治理论做的最好的部分是形势与政策部分,其中有关16大的考题共8分全部押中了;毛概部分押中了中国共产党的最低纲领和最高纲领部分;当代部分即最后的两个选作题,都能从押题的相关部分找到答案,这对我特别有用,因为我是一名理科生,对当代部分的内容不熟悉。谢谢双博士!!!

作者:mmer　来自:四川　2003-2-9,17:16:50

留言内容:双博士教辅真的很不错,我和身边的同学用了都说好!谢谢胡东华老师和编书老师,谢谢你们!

作者:格格　来自:北京　2003-2-18,9:03:44

留言内容:谢谢上帝我的四级终于过了,谢谢小虫和双博士。

作者:红蜻蜓　来自:湖北　2003-2-1,18:40:21

留言内容:今天看了大家的留言和回复获益匪浅。这个网站办的挺好。

作者:杨康　来自:安徽　2002-11-28,18:32:47

留言内容:双博士教育网的同志们,你们出版的书很好。尤其是英语辅导书。你们能给我指导如何做好考研的准备吗?谢谢你们的关心。

作者:MATTHEW　来自:四川　2002-12-2,12:01:37

留言内容:双博士考研单词记忆法非常棒,这次政治押题讲座上传的内容很不错。还有我想问一下胡老师是否是个基督徒!?

作者:谢军华　来自:湖北　2002-12-6,19:06:05

留言内容:谢谢主编为我们提供这么方便的讲座!!在这讲究金钱的世界,你们能全心为我们着想!太难得了。

作者:杨杨　来自:北京　2002-12-4,9:39:01

留言内容:你们出的时政形势政策分析这本书及9月以后的补充资料很及时也很全面。谢谢!

作者:吴光华　来自:黑龙江　2002-12-3,18:07:19

留言内容:你们的东西对我帮助很大,你们的书也挺出色,希望你们能够再接再励,办得更好,谢谢!

作者:kaoyan　来自:北京　2002-11-30,10:53:31

留言内容:以前用你们的大学英语资料考四六级感觉很好,最近买了一套考研数学最后冲刺题,也还不错,希望你们多多努力,做好这个网站!很感谢你们!!

目　　录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第四篇　附录

注:带＊篇、章,数二考生不必看.

第一篇

高 等 数 学

第一章　函数、极限、连续

§1.1　函数

一　函数的定义

对于一个给定集合 D，如果对于 D 中的每一个 x 值，按照一定的对应规则，总有一个确定的 y 值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作

$$y = y(x)$$

称 x 为自变量，y 为因变量，集合 D 为定义域，变量 y 的取值集合 Y 称为函数的值域，即：$Y = \{f(x) \mid x \in D\}$

理解函数的概念，读者应注意以下两点：

(1) 两个函数相等，当且仅当它们的定义域和对应法则都相同.

(2) 同一个函数可以用不同的字母表示，习惯上我们用 x 表示自变量，但只要是同一个函数就可用不同字母表示自变量，例如 $f(x) = x^2$ 还可表示为 $g(t) = t^2$ 等.

【例 1.1】　判别下列各组函数是否相等

(1) 函数 $f(x) = \dfrac{x}{x}$ 与 $g(x) = 1$

(2) 函数 $f(x) = \sqrt{x^2}$，$g(x) = |x|$ 与 $h(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

[解题提示]　当且仅当给定的函数，其定义域和对应关系完全相同时，才表示同一函数，否则表示不同的函数.

【解】　(1) 由于 f 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$，而 g 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，故 $f \neq g$.

(2) 由于 f, g, h 的定义域均为 $(-\infty, +\infty)$，且对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ 均有 $f(x) = g(x) = h(x) = |x|$，故 $f = g = h$.

二　函数的定义域

函数的定义域是指使函数解析表达式有意义的自变量 x 的变化范围.

求解函数的定义域就是求解使函数表达式中各简单函数有意义的 x 的全体，因此，读者应牢记下列简单函数的定义域：

①$y = \dfrac{1}{x}$	定义域为	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
②$y = \sqrt[2n]{x}$	定义域为	$[0, +\infty)$
③$y = \log_a x$	定义域为	$(0, +\infty)$
④$y = \tan x$	定义域为	$x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in Z$

⑤$y = \cot x$　　定义域为　　$x \neq k\pi, k \in Z$

⑥$y = \arcsin x$(或 $\arccos x$)　　定义域为　　$|x| \leqslant 1, [-1,1]$

【例 1.2】　求下列函数的定义域

$$y = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \log_{\sqrt[3]{x^2-5}}(\log_2(25-x^2))$$

【解】
$$\begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ \sqrt{x-1} \neq 0 \\ \sqrt[3]{x^2-5} > 0 \\ \sqrt[3]{x^2-5} \neq 1 \\ 25-x^2 > 0 \\ \log_2(25-x^2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x \neq 1 \\ x^2-5 > 0 \\ x^2-5 \neq 1 \\ 25 > x^2 \\ 25-x^2 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > \sqrt{5} 或 x < -\sqrt{5} \\ x \neq \pm\sqrt{6} \\ -5 < x < 5 \\ -2\sqrt{6} < x < 2\sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{5} < x < \sqrt{6} 或 \sqrt{6} < x < 2\sqrt{6}$$

即定义域为$(\sqrt{5},\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6},2\sqrt{6})$

$x \in [0,2]$

【例 1.3】　设$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$,求下列函数定义域

(1)$f(x+1)$　　　　(2)$f(2x)$

【解】(1)$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases} \Rightarrow f(x+1) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x+1 \leqslant 1 \\ -1, & 1 < x+1 \leqslant 2 \end{cases} = \begin{cases} 1, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ -1, & 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$

故　　$D_f:[-1,1]$

(2)$f(2x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant 2x \leqslant 1 \\ -1, & 1 < 2x \leqslant 2 \end{cases} \Rightarrow f(2x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases}$

故　　$D_f:[0,1]$

三　函数的基本性质

1. 奇偶性

设函数$f(x)$在集合D上有定义且D关于原点对称,如果对于任意$x \in D$恒有

$$f(x) = -f(-x) \quad (或 f(x) = f(-x))$$

则称$f(x)$为奇函数(或$f(x)$为偶函数).

奇偶函数的图像特点:奇函数$f(x)$的图像关于坐标原点对称,偶函数$f(x)$的图像关于y轴对称.

奇偶函数的运算性质:奇函数 + 奇函数 = 奇函数　　偶函数 + 偶函数 = 偶函数

奇函数 × 奇函数 = 偶函数　　奇函数 × 偶函数 = 奇函数

偶函数 × 偶函数 = 偶函数

【注】　(1)$f(x) + f(-x) = 0$是判别$f(x)$为奇函数的有效方法.　→和奇差偶

(2)函数的奇偶性是相对于对称区间而言的,若定义域关于原点不对称,则该函数就不是奇函数或偶函数.

【例 1.4】　讨论下列函数的奇偶性

(1)$f(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} + \mathrm{sgn}(\sin x)$

(2)设$f(x)$在包含原点的区间上可积,由$f(x)$的奇偶性,讨论函数$\Phi(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$

【解】　(1)$a^x + a^{-x}$为偶函数,而$a^x - a^{-x}$为奇函数,从而$f(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} + \mathrm{sgn}(\sin x)$为奇函数.

(2)先设$f(x)$为偶函数,则

$$\Phi(-x) = \int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{令 t=-z} \int_0^x f(-z)\mathrm{d}(-z)$$

$\mathrm{sgn}(-x) = -\mathrm{sgn}(x)$ 奇　　$a^x + a^{-x}$ 偶　　$a^x - a^{-x}$ 奇

$$= -\int_0^x f(-z)\,\mathrm{d}z = -\int_0^x f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = -\Phi(x)$$

因此,当 $f(x)$ 为偶函数时,$\Phi(x)$ 是奇函数.

同理可证,当 $f(x)$ 为奇函数时,$\Phi(x)$ 是偶函数. 还应加上非奇非偶的情况!

【注】 若 $f(x)$ 连续,则 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数. 任一个原函数都可写成 $\Phi(x)+c$,c 为任意取定的常数. 当 $f(x)$ 为偶函数时,$\Phi(x)$ 是奇函数,但 $\Phi(x)+c(c\neq 0)$ 都不是奇函数. △

判别函数奇偶性的常用方法:
(Ⅰ)利用奇偶性的定义;
(Ⅱ)利用奇偶函数的性质.

2. 周期性

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义,若存在正数 T,使对于任意 $x\in D_x$ 都有

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数,通常称满足上式的最小正数 T 为函数 $f(x)$ 的周期.

【注】 若 T 是函数 $f(x)$ 的周期,则

(1) $f(x+kT)=f(x)$ k 为整数.

(2) $f(ax+b)$ 是以 $\dfrac{T}{a}$ 为周期的函数,其中 $a\neq 0$,b 为任意实数. 实质 $f[a(x+\frac{T}{a})+b]$

(3) 判别周期性的常用方法是:① 用定义;② 用(1)、(2)运算性质.

【例 1.5】 设对一切实数 x,有 $f\left(\dfrac{1}{2}+x\right)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$,求周期函数 $f(x)$ 的周期.

【解】 $$f\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+x\right)\right]=\frac{1}{2}+\sqrt{f\left(\frac{1}{2}+x\right)-f^2\left(\frac{1}{2}+x\right)}$$

$\Delta\ \sqrt{f-f^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+(f-\frac{1}{2})^2}$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)}$$

$\Delta\ f(x)=-f(x+T)$

$$=\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{2}-f(x)\right]=f(x),\left(\text{由题设 } f(x)\geqslant\frac{1}{2}\right)$$

$\Downarrow$

? $f(x+2T)=f(x)$

即 $f(1+x)=f(x)$,故可知 $f(x)$ 的周期为 1.

3. 有界性与无界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 X 上有定义,若对任意的 $x\in X$,都存在 $M>0$,使

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上有界.

如果对任意的 $M>0$,都存在 $x\in X$,使 $|f(x)|>M$,则称 $f(x)$ 在区间 X 上无界.

【例 1.6】 指出下面两个函数是否有界?

(1) $y=\dfrac{1}{x^2},a\leqslant x\leqslant 1$,(其中 $0<a<1$)

(2) $y=x\cos x,x\in(-\infty,+\infty)$

【解】 (1) 因为 $a\leqslant x\leqslant 1$,所以 $a^2\leqslant x^2\leqslant 1$,$\Rightarrow 1\leqslant\dfrac{1}{x^2}\leqslant\dfrac{1}{a^2}$,$\left(0<a<1\Rightarrow\dfrac{1}{a^2}>1\right)$

即 $y=\dfrac{1}{x^2},x\in[a,1]$ 有界. 关键:取 $x=k\pi$ → 存在性问题

(2) $\forall M>0$,取 $x=(2[M]+1)\pi$,($[M]$ 表示取 M 的整数部分),则 $\cos x=-1$.

此时 $|f(x)|=|(2[M]+1)\pi\cos(2[M]+1)\pi|=(2[M]+1)\pi>M\Rightarrow y=x\cos x,x\in(-\infty,+\infty)$ 无界.

【例 1.7】 函数 $f(x)=\dfrac{\lg x}{x}$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上为( ).

(A) 有上界无下界 (B) 有下界无上界

(C) 有界且 $2\lg\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 0$ (D) 有界且 $\lg\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant -\dfrac{1}{4}$

【解】 $f(x)=\dfrac{\lg x}{x}$

$$f'(x)=\frac{x\cdot\dfrac{1}{x\ln 10}-\lg x}{x^2}=\frac{1}{x^2}(\lg e-\lg x)$$

$\because\ x\in[\frac{1}{2},1]$， $\therefore f'(x)>0$. 故 $f(x)$ 单调递增.

因此， $\dfrac{\lg\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{\lg 1}{1}$， 即 $2\lg\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 0$，故答案为 C.

4. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上有定义，如果对 $\forall\ x_1,x_2\in D,x_1<x_2$，恒有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad(\text{或} f(x_1)\geqslant f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 在区间 D 上是单调递增(或单调递减)的.

【例 1.8】 设 $f(x)\neq 0$ 是连续函数，又

$$F(x)=\int_0^x[x^{2n}-(2n+1)t^{2n}]\cdot f(t)\,\mathrm{d}t$$

其中 $n\geqslant 1$ 为整数. 试根据 $f(x)$ 的单调性讨论 $F(x)$ 的单调性.

[解题提示] 因为 $F(x)$ 是变上限的积分，且 $f(x)$ 连续，所以可用 $F(x)$ 的导数来讨论.

【解】 $F(x)=x^{2n}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-(2n+1)\int_0^x t^{2n}f(t)\,\mathrm{d}t$

$$F'(x)=2nx^{2n-1}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+x^{2n}f(x)-(2n+1)x^{2n}f(x)$$
$$=2nx^{2n-1}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-2nx^{2n}f(x)$$

解法一

$$F'(x)=2nx^{2n-1}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-2nx^{2n-1}f(x)\int_0^x\mathrm{d}t$$
$$=2nx^{2n-1}\int_0^x[f(t)-f(x)]\,\mathrm{d}t$$

(1) 若 $f(x)$ 单调下降，当 $x\geqslant 0$ 时 $(0\leqslant t\leqslant x)$，$f(t)-f(x)\geqslant 0$，于是 $F'(x)\geqslant 0$；当 $x<0$ 时 $(x\leqslant t\leqslant 0)$

$$F'(x)=2nx^{2n-1}\int_x^0[f(x)-f(t)]\,\mathrm{d}t$$

此时，$f(x)-f(t)\geqslant 0$，又 $x^{2n-1}<0$，于是 $F'(x)\leqslant 0$.

因此，若 $f(x)$ 单调下降，则 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调上升；在 $(-\infty,0]$ 上单调下降.

(2) 若 $f(x)$ 单调上升，则类似地讨论可得 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调下降；在 $(-\infty,0]$ 上单调上升.

解法二 利用积分中值定理.

$$F'(x)=2nx^{2n}f(\xi)-2nx^{2n}f(x)=2nx^{2n}[f(\xi)-f(x)]$$

其中 ξ 在 0 与 x 之间.

(1) 若 $f(x)$ 单调上升：当 $x>0$ 时，则 $0<\xi<x$，而 $f(\xi)-f(x)\leqslant 0$，于是 $F'(x)\leqslant 0$；当 $x=0$ 时，则 $F'(x)=0$；当 $x<0$ 时，则 $x<\xi<0$，而 $f(\xi)-f(x)\geqslant 0$，于是 $F'(x)\geqslant 0$.

因此，若 $f(x)$ 单调上升，则 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调下降；在 $(-\infty,0]$ 上单调上升.

(2) 若 $f(x)$ 单调下降，则类似可得 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调上升；在 $(-\infty,0]$ 上单调下降.

> 判断函数 $f(x)$ 在 X 上单调性的 **常用方法：**
> (Ⅰ) 用单调性的定义；
> (Ⅱ) 利用导数 $f'(x)$.
> 不是所有函数都有单调性，例如狄利克莱函数就没有单调性.

四　其他函数

1.　**特殊函数**

(1) 符号函数　$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \\ 0, & \text{当 } x = 0 \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$

(2) 取整函数 $y = [x]$，y 是不超过 x 的最大整数

(3) 狄利克莱(Dirichlet) 函数

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases}$$

(4) 分段函数　如果一个函数在其定义域的不同区间段表达式不同,则称为分段函数.

2.　**反函数**

设函数 $y = f(x)$ 的值域为 R，如果对于 R 中任一 y 值,由关系式 $y = f(x)$ 可确定惟一的一个 x 值与之对应,则称变量 x 为变量 y 的函数,记为

$$x = \varphi(y)$$

$\varphi(y)$ 称为函数 $y = f(x)$ 的反函数,习惯上 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x)$.

【注】　(1)$y = f(x)$ 的图像与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

(2) 只有一一对应的函数才有反函数.

【例 1.9】　求 $y = \sqrt[3]{x^2+2}\,(x \geqslant 0)$ 的反函数.

【解】　由 $y = \sqrt[3]{x^2+2}$，得 $y^3 - 2 = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y^3-2}$

当 $x \in [0, +\infty)$ 时,反函数为 $y = \sqrt{x^3-2}$，$(x \geqslant 2^{\frac{1}{3}})$

【例 1.10】　设 $y = f(x) = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1 \\ x^2, & 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 2^x, & 4 < x < +\infty \end{cases}$，　求 $f^{-1}(x)$.

[解题提示]　求 $y = f(x)$ 的反函数只需解关于 x 的方程;求分段函数的反函数,只要分别求出各区间段的反函数及值域即可.

【解】　由 $y = x$，$-\infty < x < 1 \quad \Rightarrow x = y$，$-\infty < y < 1$

于是,反函数为: $y = x \cancel{-1}$，$-\infty < x < 1$

由 $y = x^2$，$1 \leqslant x \leqslant 4 \quad \Rightarrow x = \sqrt{y}$，$1 \leqslant y \leqslant 16$

于是,反函数为: $y = \sqrt{x}$，$1 \leqslant x \leqslant 16$

由 $y = 2^x$，$4 < x < +\infty \quad \Rightarrow x = \log_2 y$，$16 < y < +\infty$

于是,反函数为: $y = \log_2 x$，$16 < x < +\infty$

综上所述，$f^{-1}(x) = \begin{cases} x \cancel{-1}, & -\infty < x < 1 \\ \sqrt{x}, & 1 \leqslant x \leqslant 16 \\ \log_2 x, & 16 < x < +\infty \end{cases}$

3.　**复合函数**

设函数 $y = f(u)$ 的定义域与函数 $u = \varphi(x)$ 的值域的交集非空,则称函数 $y = f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数.此时我们称 x 为自变量，u 为中间变量,而 y 称为因变量.

怎样求复合函数？　主要分三种情况：

(Ⅰ) 对于非分段函数常用直接代入的方法;

(Ⅱ) 对于分段函数常用讨论的方法;

(Ⅲ) 图示法(不常用).

【例 1.11】　设 $f_n(x) = \underbrace{f(f\cdots f(x)\cdots)}_{n\text{次}}$，　若 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，　求 $f_n(x)$.

【解】 $f_2(x)=f(f(x))=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$

$$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{f_2(x)}{\sqrt{1+2f_2^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+4x^2}}$$

由以上二式可得:$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$用归纳法证明,证明过程略.

2n-1

√【例 1.12】 设$f(x)=\mathrm{e}^{\arcsin x}$,又$f[g(x)]=x-1$,求$g(x)$的表达式及定义域.

【解】 由$f[g(x)]=\mathrm{e}^{\arcsin g(x)}=x-1$,解得$g(x)=\sin[\ln(x-1)]$,又因为

$$2k\pi+\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\ln(x-1)\leqslant\frac{\pi}{2}\text{ 且 }x-1>0,$$

得定义域为 $\{x\mid 1+\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}\leqslant x\leqslant 1+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\}$

√【例 1.13】 设$f(x)=\begin{cases}x, & x>0\\ 1+x, & x\leqslant 0\end{cases}$,$g(x)=\begin{cases}-x^2, & x>0\\ x, & x\leqslant 0\end{cases}$,求$g[f(x)]$及其定义域.

【解】 $g[f(x)]=\begin{cases}-[f(x)]^2, & f(x)>0\\ f(x), & f(x)\leqslant 0\end{cases}$

若$f(x)>0$,当$x>0$时,则$f(x)=x>0$,从而$g[f(x)]=-x^2$;当$-1<x\leqslant 0$时,则$f(x)=1+x>0$,从而$g[f(x)]=-(1+x)^2$.

若$f(x)\leqslant 0$,当$x\leqslant -1$时,则$f(x)=1+x\leqslant 0$,从而$g[f(x)]=1+x$.

综合以上得

$$g[f(x)]=\begin{cases}-x^2, & x>0\\ -(1+x)^2, & -1<x\leqslant 0\\ 1+x, & x\leqslant -1\end{cases}$$

√【例 1.14】 设$f(x)=\begin{cases}2+x, & x<0\\ 2, & x\geqslant 0\end{cases}$,求$f[f(x)]$.

【解】 令$f(x)=u$,则 $f(u)=\begin{cases}2+u, & u<0\\ 2, & u\geqslant 0\end{cases}$

(1) 作出$u=f(x)=\begin{cases}2+x, & x<0\\ 2, & x\geqslant 0\end{cases}$的图像,见图 1.1-1.

(2) 再在图 1.1-1 中作出$y=f(u)=\begin{cases}2+u, & u<0\\ 2, & u\geqslant 0\end{cases}$的分界点$u=0$的图像($u$轴).

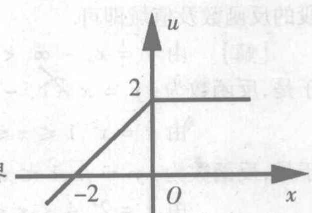


图 1.1-1

(3) 从图中看出:当$x\leqslant -2$时,$u\leqslant 0$;当$x>-2$时,$u>0$.

(4) 将(3)代入$y=f(u)$中,得

$$y=f[f(x)]=\begin{cases}4+x, & x\leqslant -2\\ 2, & x>-2\end{cases}$$

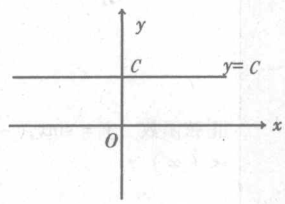
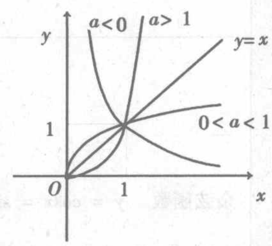
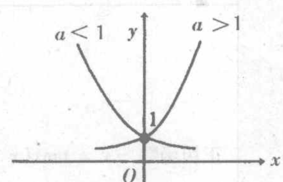
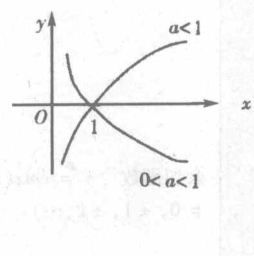
4. **初等函数**

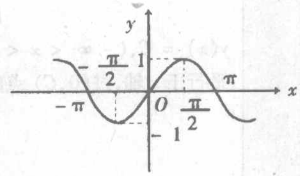
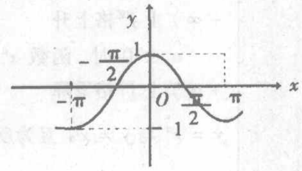
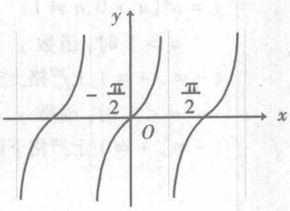
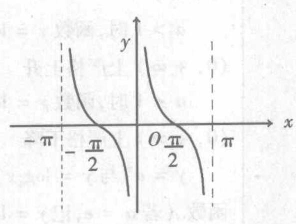
由常数C及基本初等函数通过有限次的四则运算及复合运算所得的函数称为初等函数.

【注】 必须是有限次复合.

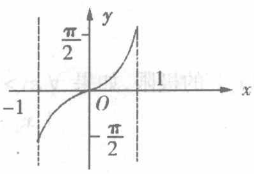
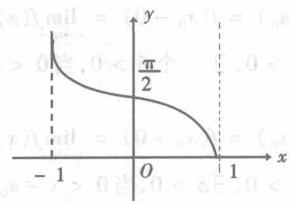
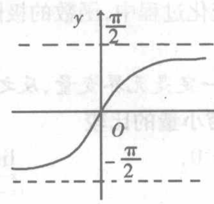
基本初等函数及图例见表 1.1-1

表 1.1－1　基本初等函数

名称	定义式及性质	图例
常数函数	$y(x)=C,(-\infty<x<+\infty)$. 平行于 x 轴,过 $(0,C)$ 点的直线	
幂函数	$y=x^{a},(0<x<+\infty,a\neq 0)$ $a>0$ 时,函数 x^{a} 在 $(0,+\infty)$ 上严格上升 $a<0$ 时,函数 x^{a} 在 $(0,+\infty)$ 上严格下降 $y=x^{a}$ 与 $y=x^{\frac{1}{a}}$ 互为反函数	
指数函数	$y=a^{x}(a>0,a\neq 1)$ $a>1$ 时,函数 $y=a^{x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格上升 $a<1$ 时,函数 $y=a^{x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格下降	
对数函数	$y=\log_{a}x(a>0,a\neq 1,0<x<+\infty)$ $a>1$ 时,函数 $y=\log_{a}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格上升 $a<1$ 时,函数 $y=\log_{a}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格下降 $y=a^{x}$ 与 $y=\log_{a}x$ 互为反函数.(若 $a=\mathrm{e}$,记 $y=\log_{\mathrm{e}}x$ 为 $y=\ln x$)	

名称	定义式及性质	图例
三角函数	正弦函数　$y = \sin x, (-\infty < x < +\infty)$	
	余弦函数　$y = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x), (-\infty < x < +\infty)$	
	正切函数　$y = \tan x (x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$	
	余切函数　$y = \cot x (x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$	

（续）

名称	定义式及性质	图例
反三角函数	反正弦函数 $y = \arcsin x, (-1 \leqslant x \leqslant 1, -\dfrac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2})$	
	反余弦函数 $y = \arccos x, (-1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant \pi)$	
	反正切函数 $y = \arctan x, (-\infty < x < +\infty, -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2})$	
	反余切函数 $y = \mathrm{arccot}\, x$, $(-\infty < x < +\infty, 0 < y < \pi)$