KNOWLEDGE TREE

2009 知识树考研

全国硕士研究生入学统一考试

考研数学 数学一

10年真题点评

文登培训学校策划

陈文灯 / 主　编
陈启浩 / 副主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

KNOWLEDGE TREE

2009知识树考研

全国硕士研究生入学统一考试

考研数学 数学一

10年真题点评

陈文灯/主　编
陈启浩/副主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学 10 年真题点评. 1 / 陈文灯主编. —2 版. —北京:
北京理工大学出版社,2008.3(2008.4 重印)
(知识树考研)
ISBN 978-7-5640-0707-2

Ⅰ.数…　Ⅱ.陈…　Ⅲ.高等数学-研究生-入学
考试-自学参考资料　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 024480 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 /(010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京国马印刷厂
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 14
字　　数 / 310 千字
版　　次 / 2008 年 3 月第 2 版　　2008 年 4 月第 7 次印刷
定　　价 / 19.80 元

前　言

一年一度的硕士研究生入学统一考试已经举行了十几届，积累了近百份数学试卷，这既是众多命题专家智慧和劳动的结晶，也是广大考研学子的宝贵财富。

历届的考研真题，除其内容外，还包含诸多有价值的信息，例如试题的形式、涵盖面、难度及试题所蕴涵的规律性。为了使考生在考研真题中汲取更多知识、掌握更多解题方法，我们将 1998 年～2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题作了精心的解析，编写成《考研数学·10 年真题点评》系列丛书，奉献给广大考研朋友，书中对每道真题通过“分析”、“详解”和“评注”三部分进行点评。在“分析”中用简明语言给出解题思路；在“详解”中用简捷、新颖方法给出详细解答；在“评注”中强调与真题有关的知识点及题解中使用的技巧。

我们希望读者在使用本书时，不要轻易地翻阅真题的解答，只有当百思不得其解时才查阅解答；而且每做完一道真题，应回过头来仔细阅读书中有关这道真题的分析、详解和评注，进行比对和总结。如果能如此下功夫做完最近十年的数学考研真题，读完全书，我们深信读者在考研数学的基本概念和基本理论的理解上，在计算方法和计算技巧的掌握上都将获得一个飞跃，而且在解题能力和应考水平上也将有一个较大幅度的提高，从而更加从容地面对研究生入学考试。

这套系列丛书自去年问世以来，深得广大考研学子的喜爱。今年在此基础上，作了认真的修订，增加了新的内容(如写了附录)，使得它更适合广大考研朋友复习时使用。

由于成书时间仓促，书中疏漏之处在所难免，恳请广大读者和同仁指正。

编　者

2008 年 1 月

目　录

近 10 年真题集

近 10 年真题分析、详解及评注

2007年全国硕士研究生入学统一考试
数学一试题

一、选择题(本题共10小题,每小题4分,满分40分,在每小题给的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后括号内)

(1) 当 $x \to 0^{+}$ 时,与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

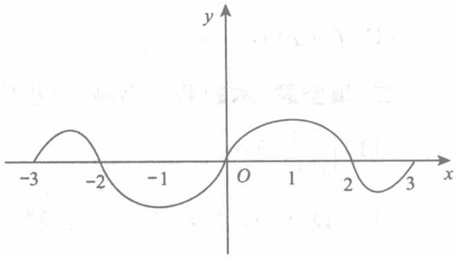
(A) $1 - e^{\sqrt{x}}$.　　(B) $\ln \dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$.

(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$.　　(D) $1 - \cos\sqrt{x}$.　　【　】

(2) 曲线 $y = \dfrac{1}{x} + \ln(1 + e^{x})$ 渐近线的条数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.　　【　】

(3) 如图,连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3,-2]$,$[2,3]$ 上的图形分别是直径为1的上、下半圆周,在区间 $[-2,0]$,$[0,2]$ 上的图形分别是直径为2的下、上半圆周,设 $F(x) = \int_{0}^{x} f(t)\,dt$,则下列结论正确的是



(A) $F(3) = -\dfrac{3}{4}F(-2)$.

(B) $F(3) = \dfrac{5}{4}F(2)$.

(C) $F(-3) = \dfrac{3}{4}F(2)$.

(D) $F(-3) = -\dfrac{5}{4}F(-2)$.　　【　】

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,下列命题错误的是

(A) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f(0) = 0$.　　(B) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在,则 $f(0) = 0$.

(C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在.　　(D) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在.【　】

(5) 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数,且 $f''(x) > 0$,令 $u_n = f(n)$,$n = 1,2,\cdots$,则下列结论正确的是

(A) 若 $u_1 > u_2$,则 $\{u_n\}$ 必收敛.　　(B) 若 $u_1 > u_2$,则 $\{u_n\}$ 必发散.

(C) 若 $u_1 < u_2$,则 $\{u_n\}$ 必收敛.　　(D) 若 $u_1 < u_2$,则 $\{u_n\}$ 必发散.　　【　】

(6) 设曲线 $L: f(x,y) = 1$($f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数)过第Ⅱ象限内的点 M 和第Ⅳ象限内的点 N,Γ 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧,则下列小于零的是

(A) $\int_{\Gamma} f(x,y)\,dx$.　　(B) $\int_{\Gamma} f(x,y)\,dy$.

(C) $\int_{\Gamma} f(x,y)\mathrm{d}s$.　　　　(D) $\int_{\Gamma} f'_x(x,y)\mathrm{d}x + f'_y(x,y)\mathrm{d}y$.　　【　】

(7) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$.　　【　】

(8) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$

(A) 合同，且相似.　　(B) 合同，但不相似.

(C) 不合同，但相似.　　(D) 既不合同，也不相似.　　【　】

(9) 某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$，则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为

(A) $3p(1-p)^2$.　　(B) $6p(1-p)^2$.

(C) $3p^2(1-p)^2$.　　(D) $6p^2(1-p)^2$.　　【　】

(10) 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，且 X 与 Y 不相关，$f_X(x)$，$f_Y(y)$ 分别表示 X,Y 的概率密度，则在 $Y=y$ 的条件下，X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$ 为

(A) $f_X(x)$.　　(B) $f_Y(y)$.

(C) $f_X(x)f_Y(y)$.　　(D) $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$.　　【　】

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上）

(11) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=$ ________.

(12) 设 $f(u,v)$ 为二元可微函数，$z=f(x^y,y^x)$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ ________.

(13) 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解为________.

(14) 设曲面 $\sum$：$|x|+|y|+|z|=1$，则 $\oiint\limits_{\Sigma}(x+|y|)\mathrm{d}S=$ ________.

(15) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^3$ 的秩为________.

(16) 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数，则这两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为________.

三、解答题（本题共 8 小题，满分 86 分，请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

(17)（本题满分 11 分）

求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4, y\geqslant 0\}$ 上的最大值和最小值.

(18)（本题满分 10 分）

计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma} xz\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\sum$ 为曲面 $z = 1 - x^2 - \frac{y^2}{4}(0 \leqslant z \leqslant 1)$ 的上侧.

(19)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内二阶可导且存在相等的最大值,又 $f(a) = g(a),f(b) = g(b)$. 证明:

(Ⅰ)存在 $\eta \in (a,b)$,使得 $f(\eta) = g(\eta)$;

(Ⅱ)存在 $\xi \in (a,b)$,使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

(20)(本题满分 10 分)

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内收敛,其和函数 $y(x)$ 满足

$$y'' - 2xy' - 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

(Ⅰ)证明 $a_{n+2} = \frac{2}{n+1}a_n, n = 1,2,\cdots$;

(Ⅱ)求 $y(x)$ 的表达式.

(21)(本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + a^2 x_3 = 0 \end{cases} \qquad ①$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \qquad ②$$

有公共解,求 a 的值及所有公共解.

(22)(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$, $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的一个特征向量. 记 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^5 - 4\boldsymbol{A}^3 + \boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量,并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值与特征向量;

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 - x - y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(Ⅰ)求 $P\{X > 2Y\}$;

(Ⅱ)求 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

(24)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}, & 0<x<\theta,\\[2mm] \dfrac{1}{2(1-\theta)}, & \theta\leqslant x<1,\\[2mm] 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中,参数 $\theta(0<\theta<1)$ 未知,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本,$\overline{X}$ 是样本均值.

(Ⅰ)求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(Ⅱ)判断 $4\overline{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量,并说明理由.

2006 年全国硕士研究生入学统一考试
数学一试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.把答案填在题中横线上.)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$________.

(2) 微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是________.

(3) 设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧,则 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

(4) 点 $(2,1,0)$ 到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离 $d=$________.

(5) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{E}$ 为二阶单位矩阵,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$,则 $|\boldsymbol{B}|=$________.

(6) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布,则 $P\{\max\{X,Y\}\leqslant 1\}=$________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数,且 $f'(x)>0,f''(x)>0$. Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量,Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分,若 $\Delta x>0$,则

(A) $0<\mathrm{d}y<\Delta y$.　　(B) $0<\Delta y<\mathrm{d}y$.

(C) $\Delta y<\mathrm{d}y<0$.　　(D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$.　　【　】

(8) 设 $f(x,y)$ 为连续函数,则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 等于

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.　　(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　【　】

(9) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则级数

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 收敛.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛.　　【　】

(10) 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数,且 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$,已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点,下列选项正确的是

(A) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$,则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.

(B) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$,则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

(C) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.

(D) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$. 【　】

(11) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维列向量,$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,下列选项正确的是

(A) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

(B) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关.

(C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

(D) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关. 【　】

(12) 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}$,再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 $\boldsymbol{C}$,记 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1&0\\ &\cdots\cdots& \\ 0&1&0\\ &\cdots\cdots& \\ 0&0&1\end{bmatrix}$,则

(A) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.　　(B) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$.

(C) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$.　　(D) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}$. 【　】

(13) 设 A,B 为随机事件,且 $P(B)>0,P(A\mid B)=1$,则必有

(A) $P(A\cup B)>P(A)$.　　(B) $P(A\cup B)>P(B)$.

(C) $P(A\cup B)=P(A)$.　　(D) $P(A\cup B)=P(B)$. 【　】

(14) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$,Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$,且

$$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\},$$

则必有

(A) $\sigma_1<\sigma_2$.　　(B) $\sigma_1>\sigma_2$.

(C) $\mu_1<\mu_2$.　　(D) $\mu_1>\mu_2$. 【　】

三、(本题共 9 小题,满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0\}$,计算二重积分

$$I=\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(16)(本题满分 12 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi,x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$.

(Ⅰ) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求该极限;

(Ⅱ) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

(17)(本题满分 12 分)

将函数 $f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

(18)(本题满分 12 分)

设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数,且 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

(Ⅰ)验证 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$;

(Ⅱ)若 $f(1)=0,f'(1)=1$,求函数 $f(u)$ 的表达式.

(19)(本题满分 12 分)

设在上半平面 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内,函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数,且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$. 证明:对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L,都有

$$\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y=0.$$

(20)(本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1, \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1, \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$$

有三个线性无关的解.

(Ⅰ)证明方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$;

(Ⅱ)求 a,b 的值及方程组的通解.

(21)(本题满分 9 分)

设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3,向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个解.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;

(Ⅱ)求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.

(22)(本题满分 9 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}, & -1<x<0, \\ \dfrac{1}{4}, & 0\leqslant x<2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

令 $Y=X^2$,$F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数,求

（Ⅰ）Y 的概率密度 $f_Y(y)$；

（Ⅱ）$F(-\frac{1}{2},4)$.

(23)（本题满分 9 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1,\\ 1-\theta, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

其中 θ 是未知参数$(0<\theta<1)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，记 N 为样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中小于 1 的个数. 求

（Ⅰ）θ 的最大似然估计量；

（Ⅱ）θ 的最大似然估计.

2005年全国硕士研究生入学统一考试
数学一试题

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.把答案填在题中横线上.)

(1)曲线 $y=\frac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为________.

(2)微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 的解为________.

(3)设函数 $u(x,y,z)=1+\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{18}$,单位向量 $\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$,则 $\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,3)}$ =________.

(4)设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域,Σ 是 Ω 的整个边界的外侧,则 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

(5)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为三维列向量,记矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3).$$

如果 $|\boldsymbol{A}|=1$,那么 $|\boldsymbol{B}|=$________.

(6)从数1,2,3,4中任取一个数,记为 X,再从 $1,\cdots,X$ 中任取一个数,记为 Y,则 $P\{Y=2\}$ =________.

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7)设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内

(A)处处可导.　　(B)恰有一个不可导点.

(C)恰有两个不可导点.　　(D)至少有三个不可导点.　　【　】

(8)设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数,"$M\Leftrightarrow N$"表示"M 的充分必要条件是 N",则必有

(A)$F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

(B)$F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C)$F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.

(D)$F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.　　【　】

(9)设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t$,其中函数 φ 具有二阶导数,ψ 具有一阶导数,则必有

(A)$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(B)$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. 【 】

(10)设有三元方程 $xy-z\ln y+e^{xz}=1$，根据隐函数存在定理，存在点$(0,1,1)$的一个邻域，在此邻域内该方程

(A)只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$.

(B)可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z)$和 $z=z(x,y)$.

(C)可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$和 $z=z(x,y)$.

(D)可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$和 $y=y(x,z)$. 【 】

(11)设 λ_1,λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$线性无关的充分必要条件是

(A) $\lambda_1\neq 0$. (B) $\lambda_2\neq 0$. (C) $\lambda_1=0$. (D) $\lambda_2=0$. 【 】

(12)设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geqslant 2)$阶可逆矩阵，交换 $\boldsymbol{A}$ 的第1行与第2行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，则

(A)交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第1列与第2列得 $\boldsymbol{B}^*$. (B)交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第1行与第2行得 $\boldsymbol{B}^*$.

(C)交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第1列与第2列得 $-\boldsymbol{B}^*$. (D)交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第1行与第2行得 $-\boldsymbol{B}^*$. 【 】

(13)设二维随机变量(X,Y)的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，则

(A) $a=0.2,b=0.3$. (B) $a=0.4,b=0.1$.

(C) $a=0.3,b=0.2$. (D) $a=0.1,b=0.4$. 【 】

(14)设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$为来自总体 $N(0,1)$的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则

(A) $n\overline{X}\sim N(0,1)$ (B) $nS^2\sim\chi^2(n)$.

(C) $\frac{(n-1)\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$. (D) $\frac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n}X_i^2}\sim F(1,n-1)$. 【 】

三、解答题(本题共9小题，满分94分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

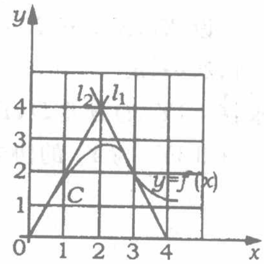
(15)(本题满分11分)

设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\sqrt{2},x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，$[1+x^2+y^2]$表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数，计算二重积分 $\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(16)(本题满分 12 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n(2n-1)}\right)x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

(17)(本题满分 11 分)



如右图,曲线 C 的方程为 $y=f(x)$,点(3,2)是它的一个拐点,直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点(0,0)与(3,2)处的切线,其交点为(2,4).设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数,计算定积分 $\int_0^3(x^2+x)f'''(x)\mathrm{d}x$.

(18)(本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 在[0,1]上连续,在(0,1)内可导,且 $f(0)=0,f(1)=1$.证明:

(Ⅰ)存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f(\xi)=1-\xi$;

(Ⅱ)存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$,使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

(19)(本题满分 12 分)

设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数,在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上,曲线积分 $\oint_L\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$ 的值恒为同一常数.

(Ⅰ)证明:对右半平面 $x>0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C,有

$$\oint_C\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0;$$

(Ⅱ)求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

(20)(本题满分 9 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$,把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成标准形;

(Ⅲ)求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

(21)(本题满分 9 分)

已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行是 (a,b,c),a,b,c 不全为零,矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$($k$ 为常数),且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的通解.

(22)(本题满分 9 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$

求:(Ⅰ)(X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$;