众邦教育

普通高等教育"十五"国家级规划教材配套辅导

材料力学(II)

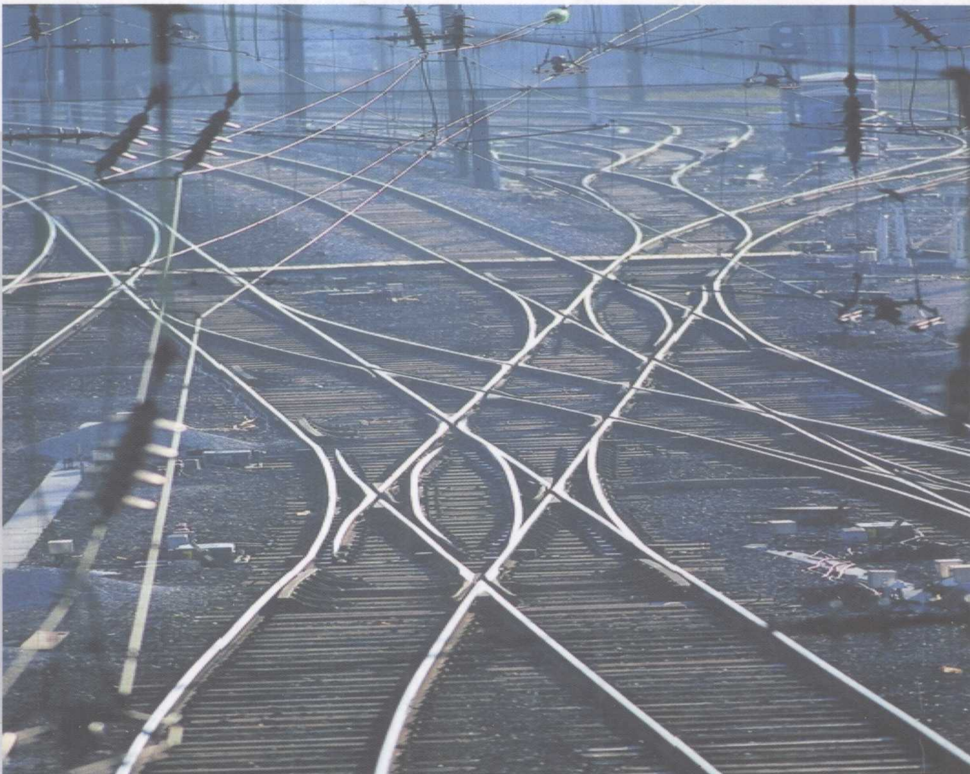
习题精解

第四版

孙训方等主编《材料力学》第四版同步辅导

主编 王茵 董北川

策划 众邦考试教育研究所



SWJUP 西南交通大學出版社

Http://press.swjtu.edu.cn

普通高等教育"十五"国家级规划教材配套辅导

材料力学(Ⅱ)

（第四版）

习题精解

主编　王茵　董北川
参编　黄莉　郑立霞

西南交通大学出版社
·成都·

目　录

（Ⅱ）

第一章　弯曲问题的进一步研究

一　内容提要

1. 非对称弯曲

(1) 非对称弯曲

梁不具有纵向对称平面，或梁虽具有纵向对称平面，但外力的作用平面与该平面间有一夹角，这样梁的弯曲称为非对称弯曲。

(2) 广义弯曲正应力公式

$$\sigma=\frac{M_y(zI_z-yI_{yz})-M_z(yI_y-zI_{yz})}{I_yI_z-I_{yz}^2}$$

式中，M_y 和 M_z 分别为弯矩矢量 M 在 y 轴和 z 轴上的分量；I_y，I_z 和 I_{yz} 依次为横截面对 y 轴和 z 轴的惯性矩及对 y，z 轴的惯性积；y 和 z 代表横截面上任一点的坐标。

(3) 中性轴位置

中性轴为一通过形心的直线。它与 y 轴的夹角为

$$\tan\theta=\frac{M_zI_y+M_yI_{yz}}{M_yI_z+M_zI_{yz}}$$

横截面上最大拉、压应力发生在距中性轴最远的点处。对于具有棱角的横截面，其最大拉、压应力在距中性轴最远的截面棱角处，如图 1－1(a) 中的 D_1 和 D_2 点处。对于周边为光滑曲线的横截面，如图 1－1(b)，可平行于中性轴作两条直线分别与横截面周边相切于 D_1 和 D_2 点，该两点即为横截面上的最大拉、压应力点。

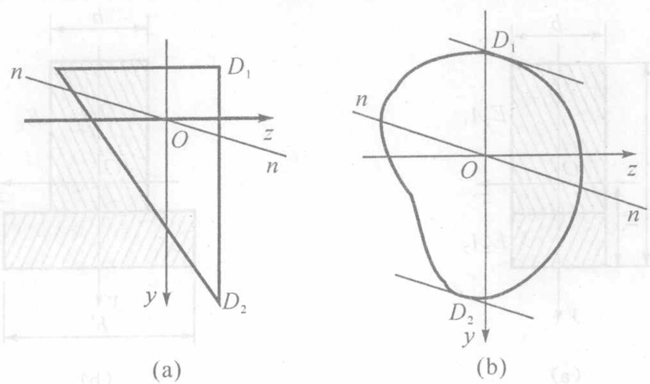


图 1－1

(4) 广义弯曲正应力公式的讨论

① 梁具有纵向对称平面,且外力作用在该对称平面内时

$$\sigma=-\frac{M}{I_z}y$$

即为对称弯曲情况下梁横截面上任一点处的正应力公式。这一类弯曲为平面弯曲。

② 梁不具有纵向对称平面,但外力作用在(或平行于) 梁的形心主惯性平面内时

$$\sigma=-\frac{M}{I_z}y$$

即只要外力作用在(或平行于) 梁的形心主惯性平面内,对称弯曲时的正应力公式仍然适用。且

$$\tan\theta=\infty,\text{即 }\theta=90^\circ$$

可见中性轴垂直于弯矩(即外力) 所在平面,即梁弯曲变形后的挠曲线将是外力作用平面内的平面曲线,属于平面弯曲。

③ 梁具有纵向对称平面,但外力的作用平面与纵向对称平面间有一夹角

$$\sigma=\frac{M\cos\varphi}{I_y}z-\frac{M\sin\varphi}{I_z}y$$

$$\tan\theta=\frac{I_y}{I_z}\tan\varphi$$

对于 $I_y=I_z$ 的截面,仍为平面弯曲;对于 $I_y\neq I_z$ 的截面,$\theta\neq\varphi$,即梁的挠曲线不在外力作用平面内,为斜弯曲。

2. 两种材料的组合梁

设矩形截面组合梁由材料 1 和材料 2 组成,其弹性模量分别为 E_1 和 E_2,且 $E_1<E_2$,如图 1－2(a) 所示。

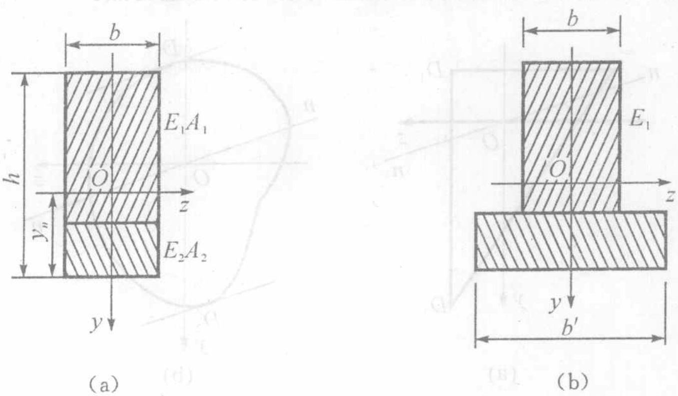


图 1－2

将组合梁的横截面变换为仅由一种材料(如材料 1) 构成的截面,则需将横截面上

另一种材料(如材料 2) 的宽度变换成折算宽度

$$b' = \frac{E_2}{E_1} b$$

将组合梁横截面变换为同一种材料的截面,该截面称为相当截面,如图 1－2(b) 所示。相当截面对中性轴的惯性矩,记为 I^*,则梁横截面上的正应力为

未变换宽度部分的正应力　　$\sigma = \dfrac{M}{I^*} y$

变换宽度部分的正应力　　$\sigma = \dfrac{E_2}{E_1} \cdot \dfrac{M}{I^*} y$

组合梁变形后挠曲线的曲率为　　$\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M}{EI^*}$

3. 开口薄壁截面的弯曲中心

(1) 弯曲中心(剪切中心)

使梁只发生弯曲而不扭转,梁上横向外力所在的纵向平面必须通过的点,称为截面的弯曲中心或剪切中心。

(2) 弯曲中心的特点

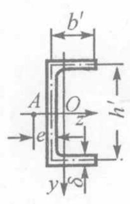
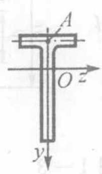
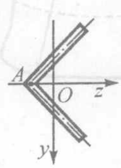
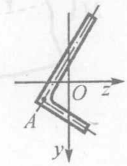
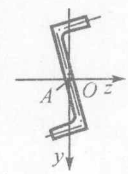
① 弯曲中心实质上是横截面内由切应力所构成的合力的作用点。

② 弯曲中心必在截面的对称轴(或反对称轴) 上。若截面具有两个对称轴(或反对称轴),则其交点即为弯曲中心。

③ 弯曲中心仅与截面的几何形状和尺寸有关。

几种常见截面的弯曲中心见表 1－1。

表 1－1　几种截面的弯曲中心位置

截面形状			  	
弯曲中心 A 的位置	$e = \dfrac{b'^2 h'^2 \delta}{4 I_z}$	$e = r_0$	在两个狭长矩形中线的交点	与形心重合

4. 平面大曲率杆纯弯曲

纯弯曲时的正应力为
$$\sigma=\frac{My}{S\rho(y)}$$

式中，M 为横截面上的弯矩，当曲杆弯曲而使曲率增加（即外侧受拉）时，M 规定为正号；$\rho(y)$ 是在横截面上距中性轴为 y 处微段的原始曲率半径，如图 1—3 所示；S 为横截面对中性轴的静矩，其值可按下式计算
$$S=A(R_C-r)=A\overline{y}$$

式中，$\overline{y}=R_C-r$ 为横截面的中性轴与形心轴间的距离，其计算公式为

矩形截面：精确公式 $\overline{y}=R_C-\dfrac{h}{\ln(R_1/R_2)}$

近似公式 $\overline{y}=\dfrac{h^2}{12R_C}$

圆形截面：精确公式 $\overline{y}=R_C-\dfrac{d^2}{8R_C\left[1-\sqrt{1-\left(\dfrac{d}{2R_C}\right)^2}\right]}$

近似公式 $\overline{y}=\dfrac{d^2}{16R_C}$

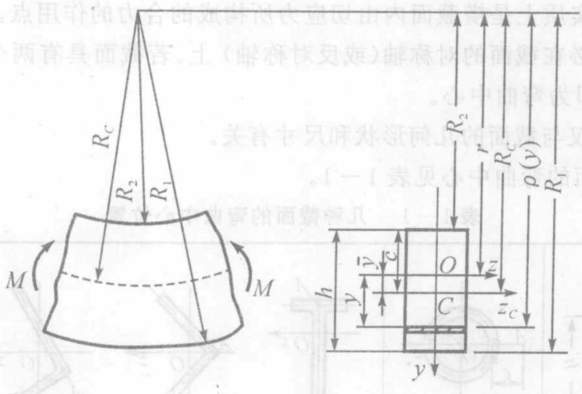


图 1—3

二 基本要求

1. 明确对称弯曲、非对称弯曲与平面弯曲、斜弯曲的概念，以及它们的区别与联系。

2. 会运用折算宽度法，计算两种材料组合梁的弯曲正应力。

3. 明确弯曲中心的概念及其特征。

4. 会计算矩形和圆形截面平面大曲率杆的弯曲正应力，了解正应力沿截面高度的变化规律。

三 重点难点

重点 非对称弯曲、两种材料组合梁弯曲及平面大曲率杆纯弯曲时正应力的计算。

难点 开口薄壁截面的弯曲中心。

四 思考题详解

1－1 试问非对称纯弯曲梁正应力的普遍公式(教材 1－1 式)是如何推导出来的?有哪些要点?

【解】 由平面假设,根据变形几何关系,得纵向线应变的变化规律;设材料在线弹性范围内工作,且材料的拉伸和压缩弹性模量相同,由各纵向线段无挤压的假设,应用单轴应力状态的胡克定律;最后,由应力合成等于内力的静力学关系,得到中性轴的位置及正应力的计算公式。

平面假设、各纵向线段无挤压的假设及材料在线弹性范围内工作,且拉伸和压缩弹性模量相同是推导过程中的要点。

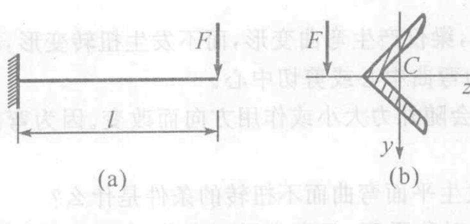
1－2 试问在教材式(1－1) 中弯矩分量 M_y 和 M_z 的正负是如何判定的?

【解】 对于外法线与 x 轴正向一致的截面,如弯矩分量 M_y 和 M_z 分别与 y 轴和 z 轴正向一致时,M_y,M_z 为正;反之为负。

1－3 试问梁在非对称弯曲时,如何判定中性轴与 y 轴间夹角 θ 的正负?

【解】 对于外法线与 x 轴正向一致的截面,y 轴到中性轴 $n-n$ 如逆时针转,则夹角 θ 为正;反之为负。

1－4 对于思考题 1－4 图(a) 所示等边角钢悬臂梁,若荷载 F 未通过截面的形心但与形心主轴 y 平行,如思考题 1－4 图(b) 所示,试问梁将发生何种变形?

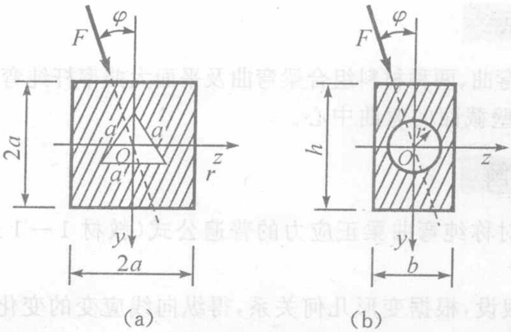


思考题 1－4 图

【解】 荷载 F 虽然与形心主轴 y 平行,但没有通过截面的弯曲中心,所以梁发生平面弯曲和扭转变形。

1－5 思考题 1－5 图(a) 为正方形中心开有正三角形孔的截面,荷载 F 与 y 轴间的夹角为 φ。思考题 1－5 图(b) 为矩形中心开有圆孔的截面,荷载 F 与 y 轴间的夹角为 φ。试问在这两种情况下梁将发生何种变形?

【解】 正三角形孔对 y 轴、z 轴惯性矩分别为



思考题 1－5 图

$$I'_y = 2 \times \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a \times \left(\frac{a}{2}\right)^3}{12} = \frac{\sqrt{3}a^4}{96}$$

$$I'_z = \frac{a \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^3}{12} - \left(\frac{1}{2}a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\left(\frac{\sqrt{3}a}{6}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}a^4}{32} - \frac{\sqrt{3}a^4}{48} = \frac{\sqrt{3}a^4}{96}$$

对于图(a)，$I_y = \frac{4a^4}{3} - \frac{\sqrt{3}a^4}{96}$，$I_z = \frac{4a^4}{3} - \frac{\sqrt{3}a^4}{96}$，由于 $I_y = I_z$，所以梁将发生平面弯曲。

对于图(b)，$I_y = \frac{hb^3}{12} - \frac{\pi r^4}{4}$，$I_z = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi r^4}{4}$，由于 $I_y \neq I_z$，所以梁将发生斜弯曲。

1－6　何谓弯曲中心(剪切中心)?弯曲中心的位置会不会随外力大小或作用方向而改变?为什么?

【解】　横力弯曲时，梁仅产生弯曲变形，而不发生扭转变形，横向外力所在的纵向平面必须通过的点，称为弯曲中心或剪切中心。

弯曲中心的位置不会随外力大小或作用方向而改变。因为弯曲中心仅与截面的几何形状和尺寸有关。

1－7　试问梁只发生平面弯曲而不扭转的条件是什么?

【解】　梁具有纵向对称平面，只发生平面弯曲而不扭转的条件是：外力作用在该对称平面内。

梁具有纵向对称平面，外力的作用面与纵向对称平面有一夹角，只发生平面弯曲而不扭转的条件是：横截面有 $I_y = I_z$。

梁不具有纵向对称平面，只发生平面弯曲而不扭转的条件是：外力作用在(或平行于)梁的形心主惯性平面内。

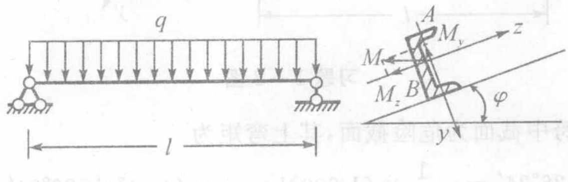
1－8　试问平面大曲率杆纯弯曲时，为何中性层偏于曲杆的内侧?在什么条件下可用直梁的公式作近似计算，并得到足够精确的结果?

【解】　平面大曲率杆纯弯曲时，由于曲杆内侧线段的原长小于外侧线段，因此，由平面假设及纵向线段无挤压的假设，可得距中性轴等距离的内侧边应力大于外侧边应力，而中性轴位置由 $F_{\mathrm{N}}=\int_A \sigma \mathrm{d}A=0$ 确定，于是，中性轴向内侧边移动，即中性层偏于曲杆的内侧。

当曲杆的横截面形心到其内侧边缘的距离 c 小于 $\dfrac{R_C}{10}$ 时（R_C 是微段曲杆轴线的原始曲率半径），应用直梁弯曲正应力公式作近似计算，得到的结果能满足工程上的精度要求。

五　习题全解

1－1　习题 1－1 图示截面为 16a 号槽钢的简支梁，跨长 $l=4.2\mathrm{m}$，受集度为 $q=2\mathrm{kN/m}$ 的均布荷载作用。梁放在 $\varphi=20^\circ$ 的斜面上。试确定梁危险截面上 A 点和 B 点处的弯曲正应力。



习题 1－1 图

【解】　查教材中，附录 Ⅲ 型钢规格表，得 16a 号槽钢的截面几何性质

$$b=63\mathrm{mm},\quad z_0=18\mathrm{mm},\quad h=160\mathrm{mm}$$

$$I_y=73.3\mathrm{cm}^4,\quad I_z=866.2\mathrm{cm}^4$$

显然，跨中截面为危险截面，该截面上弯矩为

$$M_z=-M\cos\varphi=-\frac{1}{8}ql^2\cos\varphi=-\frac{1}{8}\times 2\times 10^3\mathrm{N/m}\times(4.2\mathrm{m})^2\cos 20^\circ$$

$$=-4\,144\mathrm{N\cdot m}$$

$$M_y=-M\sin\varphi=-\frac{1}{8}ql^2\sin\varphi=-\frac{1}{8}\times 20\times 10^3\mathrm{N/m}\times(4.2\mathrm{m})^2\sin 20^\circ$$

$$=-1\,508\mathrm{N\cdot m}$$

危险截面上，A 点、B 点坐标分别为

$$y_A=-80\mathrm{mm},\quad z_A=(b-z_0)=45\mathrm{mm},\quad y_B=80\mathrm{mm},\quad z_B=-18\mathrm{mm}$$

根据非对称纯弯曲正应力公式，得（注意 $I_{yz}=0$）

$$\sigma=\frac{M_y(zI_z-yI_{yz})-M_z(yI_y-zI_{yz})}{I_yI_z-I_{yz}^2}=\frac{M_y}{I_y}z-\frac{M_z}{I_z}y$$

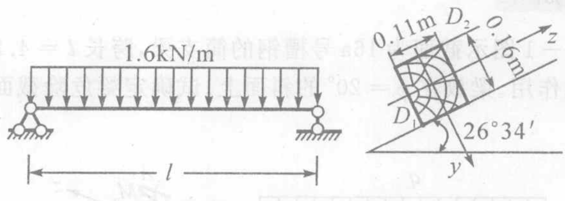
点 A 正应力（最大压应力）

$$\sigma_A = -\frac{1\ 508\text{N}\cdot\text{m}}{73.3\times10^{-8}\text{m}^4}\times45\times10^{-3}\text{m}+\frac{4\ 144\text{N}\cdot\text{m}}{866.2\times10^{-8}\text{m}^4}\times(-80\times10^{-3}\text{m})$$
$$= -131\text{MPa}$$

点 B 正应力(最大拉应力)

$$\sigma_B = -\frac{1\ 508\text{N}\cdot\text{m}}{73.3\times10^{-8}\text{m}^4}\times(-18\times10^{-3}\text{m})+\frac{4\ 144\text{N}\cdot\text{m}}{866.2\times10^{-8}\text{m}^4}\times80\times10^{-3}\text{m}$$
$$= 75.3\text{MPa}$$

1－2　矩形截面木檩条的跨度 $l=4\text{m}$,荷载及截面尺寸如习题 1－2 图所示,木材为杉木,弯曲许用正应力 $[\sigma]=12\text{MPa}$,$E=9\text{GPa}$,许可挠度为 $l/200$。试验算檩条的强度和刚度。



习题 1－2 图

【解】　显然,跨中截面为危险截面,其上弯矩为

$$M_y = -\frac{1}{8}ql^2\sin26°34' = -\frac{1}{8}\times(1\ 600\text{N}\cdot\text{m})\times(4\text{m})^2\sin26°34' = -1\ 431\text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_z = -\frac{1}{8}ql^2\cos26°34' = \frac{1}{8}\times(1\ 600\text{N}\cdot\text{m})\times(4\text{m})^2\cos26°34' = -2\ 862\text{N}\cdot\text{m}$$

危险截面上,危险点为点 D_1(最大拉应力)和点 D_2(最大压应力)

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_y|}{W_y}+\frac{|M_z|}{W_z} = \frac{6\times1\ 413\text{N}\cdot\text{m}}{(0.16\text{m})\times(0.11\text{m})^2}+\frac{6\times2\ 862\text{N}\cdot\text{m}}{(0.11\text{m})\times(0.16\text{m})^2}$$
$$= 10.5\text{MPa} < [\sigma]$$

檩条满足强度条件。

最大挠度发生在跨中截面,y 方向和 z 方向挠度分别为

$$w_y = \frac{5q_yl^4}{384EI_z} = \frac{5\times(1\ 600\text{N/m}\times\cos26°34')\times(4\text{m})^4}{384\times(9\times10^9\text{Pa})\times\dfrac{(0.11\text{m})(0.16\text{m})^3}{12}}$$
$$= 1.411\times10^{-2}\text{m} = 14.11\text{mm}$$

$$w_z = \frac{5q_zl^4}{384EI_y} = \frac{5\times(1\ 600\text{N/m}\times\sin26°34')\times(4\text{m})^4}{384\times(9\times10^9\text{Pa})\times\dfrac{(0.16\text{m})(0.11\text{m})^3}{12}}$$
$$= 14.93\times10^{-3}\text{m} = 14.39\text{mm}$$

跨中总挠度

$$w_{\max} = \sqrt{w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{(14.11\text{mm})^2 + (14.93\text{mm})^2} = 20.5\text{mm}$$

许可挠度为

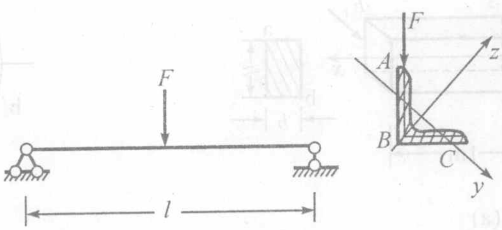
$$\frac{l}{200} = \frac{4\,000\text{mm}}{200} = 20\text{mm}$$

比较最大挠度和许可挠度

$$\frac{20.5\text{mm} - 20\text{mm}}{20\text{mm}} \times 100\% = 2.5\%$$

$w_{\max}$ 超过许可挠度约 2.5%。

1－3　习题 1－3 图示跨长为 $l = 4\text{m}$ 的简支梁，由 200mm×200mm×20mm 的等边角钢制成，在梁跨中点受集中力 $F = 25\text{kN}$ 作用。试求最大弯矩截面上 A,B 和 C 点处的正应力。



习题 1－3 图

【解】　查教材中，附录 Ⅲ 型钢规格表，得截面几何性质

$$I_y = 1\,180.04\text{cm}^4,\quad I_z = 4\,554.55\text{cm}^4,\quad I_{yz} = 0$$
$$z_0 = 56.9\text{mm},\quad b = 200\text{mm}$$

显然跨中截面上弯矩最大，该截面上弯矩为

$$M_y = M_z = -\frac{1}{4}Fl\cos 45° = -\frac{1}{4}\times(25\times10^3\text{N})(4\text{m})\cos 45° = -17\,678\text{N}\cdot\text{m}$$

根据广义弯曲正应力公式，得

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y}z - \frac{M_z}{I_z}y$$

点 A 的正应力

$$y_A = -b\sin 45° = -141.4\text{m},\qquad z_A = b\cos 45° - \sqrt{2}z_0 = 61\text{mm}$$

$$\sigma_A = -\frac{17\,678\text{N}\cdot\text{m}}{1\,180.04\times10^{-8}\text{m}^4}\times(61\times10^{-3}\text{m}) + \frac{17\,678\text{N}\cdot\text{m}}{4\,554.55\times10^{-8}\text{m}^4}\times(-141.4\times10^{-3}\text{m})$$
$$= -146.3\text{MPa}$$

点 B 的正应力

$$y_B = 0,\qquad z_B = -\sqrt{2}z_0 = -80.5\text{mm}$$

$$\sigma_B = -\frac{17\,678\text{N}\cdot\text{m}}{1\,180.04\times10^{-8}\text{m}^4}\times(-80.5\times10^{-3}\text{m}) = 120.6\text{MPa}$$

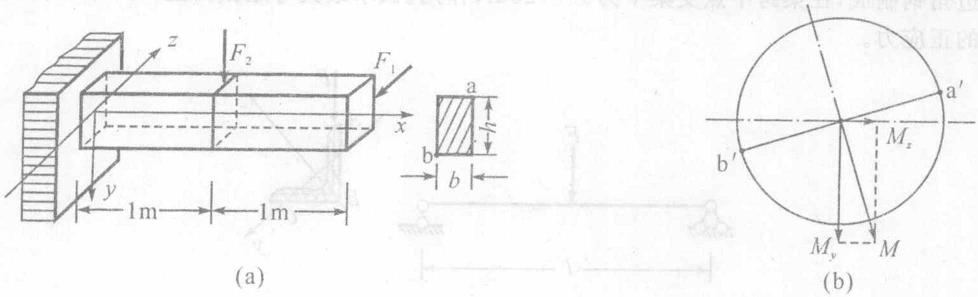
点 C 的正应力

$$y_C = b\sin 45^\circ = 141.4\text{m}, \qquad z_C = b\cos 45^\circ - \sqrt{2}z_0 = 61\text{mm}$$

$$\sigma_C = -\frac{17\ 678\text{N}\cdot\text{m}}{1\ 180.04\text{m}\times 10^{-8}\text{m}^4}\times(61\times 10^{-3}\text{m}) + \frac{17\ 678\text{N}\cdot\text{m}}{4\ 554.55\times 10^{-8}\text{m}^4}\times(141.4\times 10^{-3}\text{m})$$
$$= -36.5\text{MPa}$$

1—4　由木材制成的矩形截面悬臂梁，在水平对称面内受到 $F_1 = 1.6\text{kN}$ 作用，在铅垂对称面内受到 $F_2 = 0.8\text{kN}$ 作用，如习题1—4图(a)所示。已知：$b = 90\text{mm}$，$h = 180\text{mm}$，$E = 10\text{GPa}$。试求梁横截面上的最大正应力及其作用点的位置，并求梁的最大挠度。

如果截面为圆形，$d = 130\text{mm}$，试求梁的横截面上的最大正应力。



习题 1—4 图

【解】　如习题1—4图(a)所示，危险截面在固定端，其上 a 点和 b 点为危险点。危险截面上的弯矩为 $M_y = 2\text{m}\times F_1 = 2\text{m}\times 1.6\text{kN} = 3.2\text{kN}\cdot\text{m}$

$$M_z = 1\text{m}\times F_2 = 1\text{m}\times 0.8\text{kN} = 0.8\text{kN}\cdot\text{m}$$

危险点的正应力为

$$|\sigma_{\max}| = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{6M_y}{hb^2} + \frac{6M_z}{bh^2}$$
$$= \frac{6\times 3\ 200\text{N}\cdot\text{m}}{(0.18\text{m})(0.09\text{m})^2} + \frac{6\times 800\text{N}\cdot\text{m}}{(0.09\text{m})(0.18\text{m})^2}$$
$$= 14.8\times 10^6\text{Pa} = 14.8\text{MPa}$$

自由端水平面和铅垂面的挠度分别为

$$w_y = \frac{F_2\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EI_z} + \frac{F_2\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EI_z}\cdot\frac{l}{2} = \frac{5F_2l^3}{48EI_z} = \frac{5F_2l^3}{4Ebh^3}$$
$$= \frac{5\times 800\text{N}\times(2\text{m})^3}{4\times(10\times 10^9\text{Pa})(0.09\text{m})(0.18\text{m})^3} = 1.524\times 10^{-3}\text{m} = 1.524\text{mm}$$

$$w_z = \frac{F_1l^3}{3EI_y} = \frac{4F_1l^3}{Ehb^3} = \frac{4\times(1\ 600\text{N})(2\text{m})^3}{(10\times 10^9\text{Pa})(0.18\text{m})(0.09\text{m})^3}$$
$$= 39.02\times 10^{-3}\text{m} = 39.02\text{mm}$$

所以梁的最大挠度为

$$w_{\max}=\sqrt{w_y^2+w_z^2}=\sqrt{(1.524\text{mm})^2+(39.02\text{mm})^2}=39.05\text{mm}$$

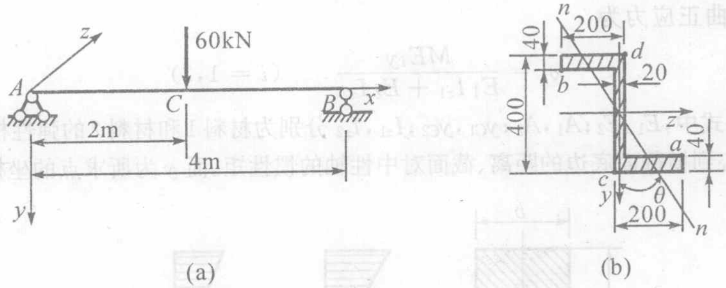
当截面为圆形时，危险截面上合弯矩为

$$M=\sqrt{M_y^2+M_z^2}=\sqrt{3.2^2+0.8^2}\text{kN}\cdot\text{m}=3.298\text{kN}\cdot\text{m}$$

如习题 1－4 图(b) 所示，危险截面上 a′，b′ 点为危险点。最大正应力为

$$|\sigma_{\max}|=\frac{M}{W}=\frac{32M}{\pi d^3}=\frac{32\times 3\,298\text{N}\cdot\text{m}}{\pi\times(0.13\text{m})^3}=15.3\times10^6\text{Pa}=15.3\text{MPa}$$

1－5　Z形截面简支梁在跨中受一集中力作用，如习题 1－5 图所示。已知该截面对通过截面形心的一对相互垂直的轴 y,z 的惯性矩和惯性积分别为 $I_z=5.75\times10^{-4}\text{m}^4$，$I_y=1.83\times10^{-4}\text{m}^4$ 和 $I_{yz}=2.59\times10^{-4}\text{m}^4$。试求梁的最大正应力。



习题 1－5 图

【解】　跨中 C 截面上弯矩为

$$M_y=0,\quad M_z=-\frac{1}{4}Fl=-\frac{1}{4}(60\text{kN})(4\text{m})=-60\text{kN}\cdot\text{m}$$

C 截面上中性轴 $n-n$ 与 y 轴的夹角 θ

$$\tan\theta=\frac{M_zI_y+M_yI_{yz}}{M_yI_z+M_zI_{yz}}=\frac{I_y}{I_{yz}}=\frac{1.83\times10^{-4}\text{m}^4}{2.59\times10^{-4}\text{m}^4}=0.707$$

$$\theta=35.24^\circ$$

中性轴 $n-n$ 位置如习题 1－5 图(b) 所示。可见，截面上 a,b,c,d 点的正应力都可能是最大，但只需计算 a，c 两点的应力。广义弯曲正应力公式(注意 $M_y=0$)

$$\sigma=-\frac{M_z(yI_y-zI_{yz})}{I_yI_z-I_{yz}^2}$$

则 a,c 二点上的应力

$$\sigma_a=-\frac{-60\times10^3\text{N}\cdot\text{m}[(0.16\text{m})(1.83\times10^{-4}\text{m}^4)-(0.19\text{m})(2.59\times10^{-4}\text{m}^4)]}{(1.83\times10^{-4}\text{m}^4)(5.75\times10^{-4}\text{m}^4)-(2.59\times10^{-4}\text{m}^4)^2}$$

$$=-31.3\text{MPa}$$

$$\sigma_c=-\frac{-60\times10^3\text{N}\cdot\text{m}[(0.2\text{m})(1.83\times10^{-4}\text{m}^4)-(-0.01\text{m})(2.59\times10^{-4}\text{m}^4)]}{(1.83\times10^{-4}\text{m}^4)(5.75\times10^{-4}\text{m}^4)-(2.59\times10^{-4}\text{m}^4)^2}$$

$= 61.6\text{MPa}$

所以梁横截面上的最大正应力为

$$\sigma_{\max} = \sigma_c = 61.6\text{MPa}$$

1－6　由两种材料制成的矩形截面组合梁，如习题1－6图(a)所示。在对称纯弯曲时横截面上的弯矩为 M，其中性轴位置由图(a)中的 y_n 定出，试证明：

(1) 中性轴位置 y_n 为

$$y_n = \frac{E_1 A_1 y_{C1} + E_2 A_2 y_{C2}}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$$

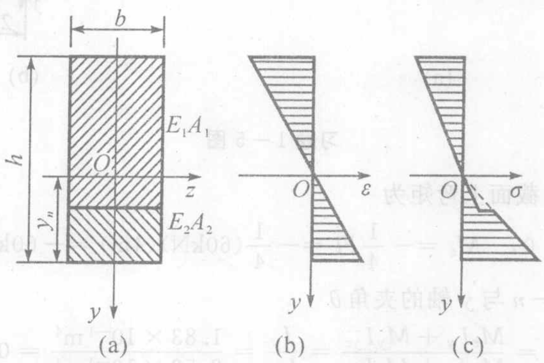
(2) 中性层曲率为

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_1 I_{z1} + E_2 I_{z2}}$$

(3) 弯曲正应力为

$$\sigma_i = \frac{M E_i y}{E_1 I_{z1} + E_2 I_{z2}} \qquad (i = 1,2)$$

上述各式中，E_1，E_2；A_1，A_2；y_{C1}，y_{C2}；I_{z1}，I_{z2} 分别为材料1和材料2的弹性模量、截面面积、截面形心到横截面底边的距离、截面对中性轴的惯性矩。而 y 为所求点的坐标。



习题1－6图

【解】　梁受对称纯弯曲，横截面上的弯矩为 M。这里平面假设和单轴应力假设均成立，所以沿梁的截面高度，应变按线性规律变化，如习题1－6图(b)所示

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}$$

利用单轴应力状态下的胡克定律，两种材料内的弯曲正应力分别为

$$\begin{cases} \sigma_1 = E_1 \dfrac{y}{\rho} \\ \sigma_2 = E_2 \dfrac{y}{\rho} \end{cases} \qquad (1)$$

正应力沿截面高度的变化规律如习题 1－6 图(c) 所示。

由横截面上应力的合成等于内力的静力学关系，即得

$$\int_{A_1}\sigma_1 \mathrm{d}A_1+\int_{A_2}\sigma_2 \mathrm{d}A_2=F_{\mathrm{N}}=0 \tag{2}$$

$$\int_{A_1}y\sigma_1 \mathrm{d}A_1+\int_{A_2}y\sigma_2 \mathrm{d}A_2=M \tag{3}$$

将(1) 式代入(2) 式，得 $E_1\int_{A_1}y\mathrm{d}A_1+E_2\int_{A_2}y\mathrm{d}A_2=0$

即 $$E_1A_1(y_{C1}-y_n)+E_2A_2(y_{C2}-y_n)=0$$

所以中性轴的位置为 $$y_n=\frac{E_1A_1y_{C1}+E_2A_2y_{C2}}{E_1A_1+E_2A_2}$$

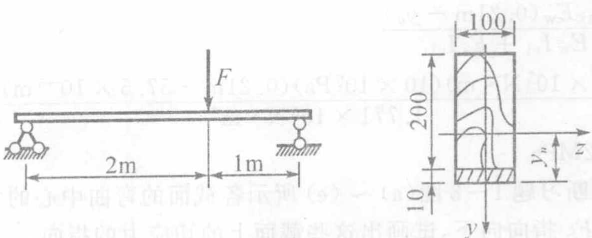
将(1) 式代入(3) 式，得 $\frac{E_1}{\rho}\int_{A_1}y^2\mathrm{d}A_1+\frac{E_2}{\rho}\int_{A_2}y^2\mathrm{d}A_2=M$

即 $$\frac{E_1I_{z1}}{\rho}+\frac{E_2I_{z2}}{\rho}=M$$

所以中性层的曲率为 $$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{E_1I_{z1}+E_2I_{z2}}$$

将上式代入(1) 式，得弯曲正应力为 $\sigma_i=\frac{ME_iy}{E_1I_{z1}+E_2I_{z2}}(i=1,2)$

1－7 一用钢板加固的木梁承受集中荷载 $F=30\mathrm{kN}$，如习题1－7图所示。钢和木材的弹性模量分别为 $E_s=200\mathrm{GPa}$ 及 $E_w=10\mathrm{GPa}$，试求危险截面上钢和木材部分的最大弯曲正应力。



习题 1－7 图

【解】 梁的危险截面为集中力 F 作用处，其弯矩为

$$M_{\max}=\frac{1}{3}F\times(2\mathrm{m})$$

$$=\frac{1}{3}\times(30\mathrm{kN})(2\mathrm{m})$$

$$=20\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$$

利用习题 1－6 的计算结果，确定中性轴的位置