浙江大学数学系列丛书

Ordinary Differential Equations

常微分方程

方道元 薛儒英 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

● 浙江大学数学系列丛书

常微分方程

方道元　薛儒英　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程 / 方道元，薛儒英编著. —杭州：浙江大学出版社，2008.3
(浙江大学数学系列丛书)
ISBN 978-7-308-05772-1

Ⅰ.常… Ⅱ.①方…②薛… Ⅲ.常微分方程—高等学校—教材 Ⅳ.O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 009576 号

常微分方程

方道元 薛儒英 **编著**

责任编辑 徐素君
出版发行 浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)
(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址:http://www.zjupress.com
http://www.press.zju.edu.cn)
电话:0571—88925592, 88270366(传真)
排　　版 浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷 德清县第二印刷厂
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 18.25
字　　数 432 千
版 印 次 2008 年 3 月第 1 版 2008 年 3 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-05772-1
定　　价 35.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571)88072522

序

为了弘扬浙江大学数学系的优良传统和学风，适应当代数学研究和教学的发展，2004 年起浙江大学数学系组织力量对本科生课程设置和教材进行了重要改革，尤其是对数学系主干课程如数学分析、高等代数、解析几何、实变函数、常微分方程、科学计算、概率论等的教材进行了重新编写，并在浙江大学出版社出版浙江大学数学系列丛书。这是本套系列丛书的第一部分。

丛书的主要特点：

一、加强基础，突出普适性。丛书在内容取舍上，对数学核心内容不仅不削弱，反而有所加强，尤其注重数学基本理论、基本方法的训练。同时，为了适应浙江大学"宽口径"的学生培养制度，对数学应用、数学试验等内容也给予了高度关注。

二、关注前沿理论，强调创新。丛书试图从现代数学的观点审视和选择经典的内容，以新的视角来处理传统的数学内容，使丛书更加适合浙江大学教学改革的需要，适合通才教育的培养目标。

三、注重实践，突出适用性。丛书出版以前，有的作为讲义或正式出版物在浙江大学数学系试用过多次，使丛书的内容和框架、结构比较完善。同时，为了适合不同层次的学生合理取舍，丛书在在内容选取上，为学生进一步学习准备了丰富的材料。

在编写过程中，数学系教授们征求了许多学生的意见，并希望能够在教学使用过程中对这套教材作进一步完善。今后我们还会对其他课程的教材进行相应的改革。

为了这套丛书的编写和发行，浙江大学数学系的许多教授和出版社的编辑投入了巨大的精力，我在此对他们表示衷心的感谢。

刘克峰

浙江大学数学系主任

2008 年 2 月

前　言

本书是以作者多年来为浙江大学数学系国家理科人材培养基地和竺可桢学院理科班本科生讲授《常微分方程》课程的讲稿为基础，参考国内外一些同类型的教材，经过反复讨论、多次修改补充编写而成。

本书可以作为综合性大学或师范类院校数学与应用数学专业本科生《常微分方程》课程的教材或教学参考书，也可供广大工程技术人员自学和参考。

我们知道微分方程是与微积分一起成长起来的，是人们认识物质运动规律的根本工具之一，也是数学学科联系实际的主要途径之一。凡是要用无穷小分析方法研究的对象，大都离不开微分方程。微分方程的发展也离不开诸多如分析、代数、拓扑、几何等分支的支持，同时微分方程的发展又推动了诸多其他分支的发展。因此，微分方程无疑是一门重要的基础课程。

随着科技的发展，特别是电子计算机的快速发展以及计算机数学软件的普及，大量技巧性强、繁琐的常微分方程可以通过计算机来求解，使常微分方程的一些具体的求解技巧的训练就会显得不那么需要，反而是它的基本思想和理论显得比从前更为重要。为适应信息社会的要求，对数学专业或应用数学专业的本科学生来说，我们认为应该从侧重于数学知识的积累转移到知识积累和数学思维能力训练并重阶段。为适应这样的要求，本书中所给出的微分方程的一些重要性质或定理，往往来自对例子或一些简单情形的考察、归纳、抽象等；在给出定理的严格证明之前，我们也常常介绍来自于对物理和几何直观的证明思路。

如何把实际问题转化为一个数学问题并用数学知识来研究解决（数学建模），尽管不是本课程的主要内容，但它是数学系学生必备的技能，也是目前高等院校提高素质教育及教学改革的重要手段。常微分方程既是一门有着重要应用背景的学科，为起到抛砖引玉的作用，在本书的第一章以及在以后的章节中，我们提供了一些微分方程模型的例子，并作了详细的分析，希望读者通过这些例子对数学应用的完整过程——建模、求解、检验、评价、修正、再检验、再评价等有一个基本的了解。

在第二章中我们着重介绍一些重要的一阶方程的求解方法的同时，更注重方程的性质归纳和描述以及非线性现象的认识，为初学者在概念的理解和一般理论的学习中提供具体的模型。在介绍求解方法的过程中我们从微积分基本定理出发，力求体现如何将不会的问题转化成会的问题来处理这样一个原则，同时将各种求解方法统一在积分因子框架下。

常微分方程的一般理论是微分方程的核心内容，本书中我们在理论上有所加强，目的是为今后有志于从事理论研究的读者不论在内容还是在方法上能有比较扎实的基础。在编写过程中我们以“由浅入深，循序渐进”和“少而精”为原则，重点介绍一阶常微分方程初值问题的适定性问题。在基本定理的证明中，以初值问题的几何性质为基础，反复利用迭代逼近法和 Gronwall 型不等式，希望读者不仅能充分理解定理的内

容，了解证明的思想方法，同时还能熟练掌握这一在现代微分方程理论研究中仍充满活力的重要方法。

线性微分方程组和高阶线性微分方程有类似的基本理论，线性微分方程（组）初值问题与边值问题的研究都是以解的结构定理为共同基础，把它们合在一起统一处理显得更合理和更简洁，有利于读者从整体上把握线性微分方程理论。拉普拉斯变换法的理论基础属于复变函数学科，但用拉氏变换求解微分方程初值问题能有更宽的适用面，而且在揭示解的结构方面有着其独特启示，所以我们有意介绍这一方法。但是常微分方程一般比复变函数先开课，为解决这一矛盾，我们在介绍拉氏变换时，并不强调拉氏变换的严格数学理论，而是侧重于介绍拉氏变换的简单性质以及如何用这些性质来求解一些在应用上很重要的微分方程模型。对拉氏变换的数学理论有兴趣的读者可以参阅复变函数教材。

与线性微分方程有本质的不同，非线性微分方程绝大多数是不可解的，这就提出如何仅从微分方程本身的结构来判断方程解的性态的问题，即微分方程的定性和稳定性理论。这是常微分方程理论中仍在不断发展的研究领域，也是目前非常活跃的非线性科学最主要的研究分支之一。为此，除在第五章介绍非线性微分方程稳定性和定性的基本理论及其应用外，我们在第六章还简单介绍了微分方程所反映的一些典型的非线性现象，如分支、混沌等。由于本书是一本常微分方程的入门教材，我们尽量用图形、例子来说明分支、混沌等相关概念，而不涉及复杂的理论推导和证明，其主要目的是让读者对当今常微分方程学科的发展有一个概略的印象。

一阶偏微分方程不但在数学理论而且在实际应用上都是非常重要的。我们在编写过程中，为跟常微的理论分析过程相适应，也更符合思维特征，我们从一阶偏微分方程的几何特性出发首先研究柯西问题，而把拟线性偏微分方程的解作为柯西问题研究的附产品推出。这种处理方式不仅有很强的几何直观有利于读者更好地理解推导过程和证明思路，同时还能把一阶偏微分方程（拟线性或非线性）理论研究统一起来，这样的研究观点更为自然也更符合现代偏微分方程理论的发展方向。

为了使得学有余力的同学有自已的拓展空间，在内容的安排上，我们既考虑到教学大纲和课时的要求，又不完全受其限制。书中的某些章节，如分支现象以及混沌现象等，我们将以打 * 号的方式给出，对于这部分内容读者可以根据自己的需要和兴趣选用，部分或全部跳过上述内容也不会影响本书主体的学习。

本书的编写得到了许多教师及作者的一些研究生的大力支持，许多听过课的学生对本教材原稿提过不少有价值的建议；浙江科技学院的朱婉珍副教授也阅读过此书的稿件，她在包括习题的配备等方面提过不少有益的建议。特别值得指出的是浙江大学数学系蔡燧林教授和复旦大学数学学院阮炯教授对本书提出了很多宝贵的建议和意见，使得本书增色不少。在此我们表示衷心的感谢。

由于受学科水平和教学经验的限制，书中一定存在不少缺点，甚至还会有错误之处，恳切希望读者提出批评和指正。

编　者

2008 年 1 月于求是园

目　录

第一章 绪论

§1.1 微分方程与模型

我们知道, 自然界中一切物质的运动和演变都有其自身的规律, 不同物质的运动规律有它们共性的一面, 但也有着各自自身的特点。为了能够定性和定量地研究一些特定的运动和演变过程, 我们必须根据与此运动有关的各种因素, 把这些由内在运动规律决定着的运动和演变过程数学化, 即依据运动规律找出不同变量之间的相互影响或制约的关系式。寻找以及揭示运动内在联系与性质是数学研究的根本任务, 是数学研究思想和研究方法产生的源泉, 也是数学学科经久不衰不断发展的动力。研究表明, 物质运动内在的制约关系在数学上可以用各种方程来描述, 如代数方程可以用来描述静止物体之间的制约关系。但是如果我们要精确刻画物体在运动过程的各种相互制约关系, 就必定要涉及各种物理量的变化率, 这在数学上往往表现为变量之间的导数或微分关系, 所以我们得到的往往是一些含有未知函数以及导数在内的关系式, 即微分方程。**微分方程**就是联系着自变量, 未知函数以及它的导数的关系式。微分方程描述的是物体运动的瞬时规律, 通过求解这样的微分方程就可以了解物体运动的全过程。不仅在自然科学和工程技术研究中会遇到大量的微分方程问题, 而且在社会学、经济学等人文领域也存在着大量的微分方程模型。为了对微分方程有一个感性的认识, 我们首先讨论几个简单的微分方程模型。

例 1.1.1 (自由落体运动模型)一个质量为 m 的物体, 在离地面不太高的空中因引力作用自由下落, 试探讨该物体下落过程中的运动规律。

我们以物体静止时的位置作为坐标原点, 向下方向为坐标的正向建立坐标系, 用 $y=y(t)$ 表示在 t 时刻物体下落的距离, 用 g 表示地球表面的重力加速度。注意到物体下落的速度与加速度分别为 $v(t)=\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$ 和 $a(t)=\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$, 如果不计空气阻力, 根据牛顿运动定律得到物体下落的距离 $y(t)$ 在 t 时刻所满足的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=g. \tag{1.1.1}$$

对于这样一个方程, 可通过积分立即得到在 t 时刻的速度 $v(t)=gt+C_1$ 和物体下落的距离

$$y(t)=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2,$$

其中 C_1,C_2 是任意常数。注意到物体下落的距离 $y=y(t)$ 含有两个任意常数, 它反映的是自由落体运动过程的一般规律。为了能够精确确定出我们所讨论的这个特定自由落体运动过程, 我们还需要用到这个特定自由落体运动所满足的一些其他信息, 如

物体在初始时刻的位置和初始时刻的速度等，来确定这两个常数。从数学上来看，物体在初始时刻的位置和初始时刻的速度可表示为当 $t=0$ 时 $y(t)$ 满足条件

$$y(0)=0,\ y'(0)=v(0)=0. \tag{1.1.2}$$

(我们称这些为初始条件)。由此满足方程 (1.1.1) 和条件 (1.1.2) 的函数 $y(t)$ 为

$$y(t)=\frac{1}{2}gt^2,$$

它就是我们在中学里所学的自由落体运动公式。

如果我们考虑空气对物体运动的阻力因素，注意到阻力与运动速度的大小成正比，方向相反，即物体受到的阻力为 $-k\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，则描述受阻力影响的自由落体运动的微分方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=mg-k\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

如果物体离地面很远，物体自由落体运动的重力加速度是变化的，这时我们必须用牛顿的引力定律来刻画物体的自由落体运动。对于这种情况，为了能够简化微分方程模型，我们重新来建立坐标系：以地球中心为坐标原点，垂直于地面向上为坐标轴的正向. 记地球的质量为 M，在 t 时刻地球中心与物体之间的距离为 $y(t)$，则物体所受到的引力为 $F=-\gamma\frac{Mm}{y^2}$，其中 γ 为引力常数，负号表示力的方向与 y 的方向相反。由牛顿运动定律得

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-\gamma\frac{Mm}{y^2},$$

即物体与地球中心之间的距离为 $y(t)$ 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{M\gamma}{y^2}.$$

如果假设在初始时刻物体离地心的距离为 R，初始速度为零，那么 $y(t)$ 还必须满足初始条件

$$y(0)=R, y'(0)=0.$$

例 1.1.2 (人口问题的常微分方程模型)这里所说的人口并不一定限于人，可以是任何一个生物群体，只要满足类似的性质即可。由于人口的总数很大，可以认为人口是连续变化的，我们用一个连续人口模型来描述。设在 t 时刻人口总数为 $p(t)$，它是 t 的一个连续可微函数。了解了函数 $p(t)$，也就掌握了人口的发展动态和发展规律。

下面我们用“微元法”来导出人口总数 $p(t)$ 应满足的微分方程。设人口的出生率为 b，死亡率为 d。任取时段 $[t,t+\mathrm{d}t]$，在此时段中的出生人数为 $bp(t)\mathrm{d}t$，死亡人数为 $dp(t)\mathrm{d}t$。事实上，在这里我们假设出生数及死亡数与 $p(t)$ 及 $\mathrm{d}t$ 均成正比，而且以矩形取代了曲边梯形的面积。在时段 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 中，人口增加量为 $p(t+\mathrm{d}t)-p(t)\approx\mathrm{d}p(t)$，它应等于此时段中的出生人数与死亡人数之差，即

$$\mathrm{d}p(t)=bp(t)\mathrm{d}t-dp(t)\mathrm{d}t=ap(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $a=b-d$ 称为人口的净增长率。于是 $p(t)$ 满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}=ap(t). \tag{1.1.3}$$

若已知初始时刻 $t=t_0$ 时的人口总数为 p_0，那么 $p(t)$ 还满足初始条件

$$t=t_0\text{时}, p(t)=p_0. \tag{1.1.4}$$

注意到 $(\mathrm{e}^{at})'=a\mathrm{e}^{at}$, 我们可求得微分方程 (1.1.3) 满足初始条件 (1.1.4) 的解为 (设 a 是常数)

$$p(t)=p_0\mathrm{e}^{a(t-t_0)}, \tag{1.1.5}$$

即人口总数按指数增长，这就是马尔萨斯 (Malthus) 人口模型。

现在我们来讨论一下这个模型本身的正确性。在表达式 (1.1.5) 中 p_0 及 a 可以容易地根据人口的统计数据来确定，p_0 就是某一年度统计的人口总数，$a=b-d$ 就是每年人口的净增长率。例如根据统计数据知在 1961 年全世界人口为 30.6 亿，1951－1961 年十年中每年人口净增长率约为 0.02。取 $t_0=1961$, $p_0=3.06\times10^9$ 和 $a=0.02$, 就有

$$p(t)=3.06\times10^9\times\mathrm{e}^{0.02(t-1961)}$$

用这个公式倒计算全世界在 1700－1961 年间的人口总数，并把计算结果与实际统计数据作比较可以发现它们是比较符合的。例如根据统计数据，在 1700－1961 年间地球上人口总数大约每 35 年增加一倍，而由上述方程可以容易地证明人口总数每 34.6 年增加一倍。事实上，假设人口总数每 T 年增加一倍，由公式得 $\mathrm{e}^{0.02T}=2$, $T=50\ln 2=34.6$, 因此 Malthus 人口模型在一个不太长的时间中使用还是相当精确的, 但如果对 Malthus 人口模型不加限制地使用，就会出现很不合理的情况: 到 2510 年地球上人口将达到 2×10^{14}，即就是把地球上的全部海洋变成陆地，每人也只能分到 0.87 平方米的土地; 而到 2670 年地球上人口将达到 36×10^{15} 个，那样只好一个人站在另一人的肩上叠成两层了。因此，Malthus 的这个人口模型是不完善的，必须加以修改。

分析 Malthus 人口模型的推导过程发现，我们假设了人口增长率 a 为常数，这个假设实际上只是在群体总数不太大且食物丰富时才合理。当群体总数增大时，生物群体中各成员之间由于有限的生存空间，有限的自然资源及食物等原因，就会进行生存竞争。因此总数大了以后，不仅有一个自然增长项 $ap(t)$, 还必须有一个竞争项来部分地抵消这个增长项, 使人口增长的指数规律不再成立。根据实际经验此竞争项可取为 $-\bar{a}p^2$，相当于还存在一个与 p 成正比例的死亡率 $\bar{b}=\bar{a}p$。这样人口总数 $p(t)$ 满足的微分方程及初始条件就成为

$$\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}=ap-\bar{a}p^2,\ p(t_0)=p_0, \tag{1.1.6}$$

这个人口模型称为 Verhulst 模型，也可称为 Logistic 模型，其中 a 及 $\bar{a}$ 称为生命常数。

当人口总数 $p(t)$ 不是很大时，我们可以略去 (1.1.6) 中的竞争项回到 Malthus 模型，即人口总数服从指数增长规律。当 $p(t)$ 增大时，竞争项的影响就不能忽略，即人口总数不再按指数增长。关于这个模型的求解以及合理性讨论将在以后章节中进行。

注 1.1.1 上面建立的模型中未知函数都是一元函数，它称为常微分方程模型。常微分方程人口模型的不足之处在于将群体中的每一个个体都视为同等地位来对待的，这在原则上只能适用于较低等动物，而对人类等高等动物来说必须考虑不同个体之间的差别，特别是年龄因素的影响。人口的数量不仅与时间 t 有关，还应与年龄有关 (作人口统计时，也是统计不同年龄的人数)，同时出生率、死亡率等都明显地和年龄有关。不考虑年龄因素，就不能正确地把握人口的发展动态。为了考虑年龄因素对人口总数的影响，可以将人口按年龄分成若干组，对每一组中的个体一视同仁来对待，这就可以得到一个用常微分方程组来描述的人口模型。但一个更适当更合理的方法是考虑年龄的连续变化，这就需要建立一个用偏微分方程来描述的人口模型，有关这方面的内容在此我们不准备作进一步的介绍, 有兴趣的读者可以查阅相关的教材。

注 1.1.2 初看起来人口问题与数学分别属于两个不同的研究领域，仔细分析研究后就可以发现了它们内在的必然联系，从而可以用数学方法对人口问题给出定量地描述，这也使得人口问题的研究成了一门科学。在上例中我们给出了用数学知识来解决实际问题的全过程，即建模、求解、检验、评价、修正、再检验、再评价等过程。这是用数学理论解决实际问题的标准过程，也是我们应具备的能力，在这当中最基本的是建模能力和模型的求解能力。

例 1.1.3 (一阶反应与考古研究模型)如果一个大分子自动分解为较小分子的速率不受是否有其他物质存在的影响, 那么单位时间内将要分解的这类大分子数目正比于当时存在的大分子总数, 我们把这类化学反应叫作一阶反应。

我们假设在初始 t_0 时刻有 y_0 克放射性物质按一阶化学反应分解, 在其后 t 时刻还剩余这类物质共 $y(t)$ 克, 则根据上述原理可以给出剩余放射性物质的质量 $y(t)$ 所满足的微分方程和初始条件:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-ky,\ y(t_0)=y_0, \tag{1.1.7}$$

其中负号表示剩余类物质随时间减少, k 是反应率常数, 它是表示反应快慢的一种度量。利用微积分知识我们立刻可得 $y(t)$ 的表达式

$$y(t)=y_0\mathrm{e}^{-k(t-t_0)}. \tag{1.1.8}$$

在应用上, 常常需要检测一些放射性元素的半衰期, 即放射性元素衰变一半所需的时间。在公式 (1.1.8) 中取 $y(T)=y_0/2$, 便得计算半衰期 T 的公式

$$T=t-t_0=\frac{\ln 2}{k}.$$

如果从试验或观察获得半衰期 T(或反应率常数 k), 就可以用这公式求出反应率常数 k(或半衰期 T)。许多物质的半衰期已经测定, 如对于碳 -14 的半衰期是 $T=5568$ 年, 铀 238 的半衰期是 $T=45$ 亿年, 镭 226 的半衰期是 $T=1600$ 年等。

由 (1.1.8) 我们能够解出

$$t-t_0=\frac{1}{k}\ln\frac{y_0}{y}.$$

如果 t_0 是物质最初形成或制造的时间, 则物质存在的年龄是 $\frac{1}{k}\ln\frac{y_0}{y}$。在大多数情况下, 反应率常数 k 是已知的或能够算出的，而 y 的值易通过实验测出，因此只要知道

y_0, 便可确定物质存在的年龄。根据这种思想即形成了考古学中常用的放射性测定年龄法。

Willard Libby 等人在 20 世纪 40 年代发现了放射性碳的半衰期, 由此产生了利用放射性碳来测定年龄的方法。这种方法所依据的事实和原理是: 由于宇宙线里的中子对氮气作用, 在高层大气中产生放射性碳。这种放射性碳经氧化后成为放射性二氧化碳, 它与大气层中原有的无放射性二氧化碳混在一起。放射性碳是在不断形成和不断重新衰变成氮的过程中, 故它在大气中与无放射性碳之间的比例早已到达一种平衡状态, 所有能进行光合作用的植物都把这一定比例的放射性碳吸入组织内, 而吃这些植物的动物体内也一样。当植物与动物还活着时, 这个比例保持不变, 但当它死亡时, 它就不再吸入新的放射性碳, 而体内原有的放射性碳则继续进行衰变。因此如果一块木头的放射性碳的含量只有活树的一半时, 那么可以确定它大约是 5568 年以前从活树上砍下来的。这一原理提供了测定有机性古物 (如木头, 木炭, 植物纤维, 肉, 皮, 骨, 角) 年龄的一种相当准确的方法, 这种方法的理论依据就是方程 (1.1.7) 及公式 (1.1.8).

例 1.1.4 (机械振动模型)一个质量为 m 的物体, 连接在长度为 l 的弹簧上, 弹簧悬挂在刚性水平架上 (如图 1.1)(弹簧具有这样的性质: 如果把弹簧拉伸或者压缩距离 Δl, 而 Δl 同弹簧的自然长度 l 相比为小量, 那么弹簧就会产生大小为 $k\Delta l$ 的恢复力, 常数 k 称为弹簧常数, 它是衡量弹簧刚性的一个尺度)。此外也可以把物体和弹簧沉浸在液体介质 (例如油) 里, 介质阻碍物体在其中运动, 工程人员通常把这种系统称为弹簧 - 质量 - 阻尼系统, 也可以把它称为地震仪, 因为这种系统在原理上与用来探测地球表面振动的地震仪是一样的。弹簧 - 质量 - 阻尼系统具有各种各样的应用, 例如汽车上的减震器、重炮的炮床等。

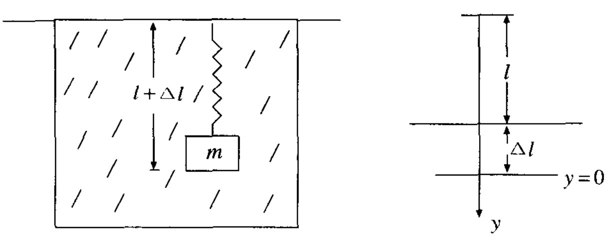

图 1.1

物体的平衡位置是物体除重力外不受其他外力作用而静止悬挂时所处的位置, 以物体的平衡位置为坐标原点, 向下的方向取为坐标轴的正方向建立坐标系。当平衡时物体所受的重力 mg 正好与弹簧的恢复力相平衡, 即在物体的平衡位置, 弹簧被拉伸距离 Δl 满足 $k\Delta l = mg$。设 $y(t)$ 表示物体在 t 时刻离开平衡位置的位移, 下面我们来推导 $y(t)$ 所满足的微分方程。为了求 $y(t)$, 我们必须计算作用在物体上的总力, 这个总力是四个分力 W, R, D 和 F 之和。

(i) 力 $W = mg$ 是物体所受的重力, 方向向下。

(ii) 力 R 是弹簧的恢复力, 它与弹簧的拉伸或压缩量 $\Delta l+y$ 成正比, 力 R 的作用总是使弹簧恢复到它的自然长度。如果 $\Delta l+y > 0$, 则 R 是负的, 即 $R = -k(\Delta l+y)$; 如果 $\Delta l + y < 0$, 则 R 是正的, 即 $R = -k(\Delta l + y)$。这样在任何情况下我们都有 $R = -k(\Delta l + y)$。

(iii) 力 D 是介质作用在物体上的阻尼或阻力 (多数介质，例如油或空气，都倾向于阻碍物体在其中运动)，这个力作用的方向总是与运动的方向相反，并且通常与速度 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 的大小成正比。如果速度是正的，即物体向下运动，则 $D=-C\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$；而如果速度是负的，即物体向上运动，则 $D=-C\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$。这样在任何情况下我们都有 $D=-C\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$。

(iv) 力 F 是作用在物体上的外力。这个力的方向向下或是向上，取决于 F 是正的还是负的。一般情况下这个外力还将明显地依赖于时间。

利用牛顿第二运动定律并注意到 $mg=k\Delta l$，我们有

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} &= W+R+D+F &&= mg-k(\Delta l+y)-C\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+F(t) \\ & &&= -ky-C\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+F(t). \end{aligned}$$

这样物体离开平衡位置的位移 $y(t)$ 满足微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+C\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+ky=F(t) \tag{1.1.9}$$

其中 m, C 和 k 都是非负常数. 这是一个二阶线性常微分方程，它的求解留待以后讨论。

前面我们得到的几个微分方程模型都是单个常微分方程的情形，在许多物理过程或工程问题的研究中常常出现一组微分方程的问题。作为一个简单的例子，我们考察质量为 m 的质点在三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中运动。质点的空间位置可用 $X=(x_1,x_2,x_3)$ 来表示，质点所受到的外力为 $F=(f_1,f_2,f_3)$，一般情况下这样的外力 F 与时刻 t，质点的空间位置 X 和质点的速度 $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t})$ 都有关。根据牛顿第二定律，我们有

$$m\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}=F(t,X,\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}),$$

或写成

$$m\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}t^2}=f_i(t,x_1,x_2,x_3,\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}),\ i=1,2,3.$$

这是一个联系着未知函数 $x_1(t),x_2(t),x_3(t)$ 以及他们的一阶、二阶导数的常微分方程组。

§1.2 微分方程的基本概念

我们把联系着自变量、未知函数以及未知函数的导数的关系式称为微分方程。微分方程中所含的未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶。在一个微分方程中，如果关于未知函数及其各阶导数至多是一次的，我们称这样的微分方程为线性微分方程，不是线性的微分方程称为非线性微分方程。如果微分方程中只含有两个变量，我们可根据需要将其中的一个看成是自变量，另一个是因变量或未知函数，则称它为常微

分方程；如果在微分方程中的未知函数含有两个或两个以上的独立变量，那么我们称它为偏微分方程。在本书中除了介绍一阶偏微分方程外，我们主要限于讨论常微分方程。

方程

$$y\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}+x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^4\sin x$$

是一个三阶非线性常微分方程; 方程

$$\frac{dy^2}{\mathrm{d}x^2}=3y^2-1\text{和}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=1$$

都是二阶非线性常微分方程; 而方程

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=x^2\text{和}\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}y=y$$

分别是一阶和三阶线性常微分方程。

线性常微分方程是常微分方程理论中一类极其重要的且已经具有完整理论的微分方程, n 阶线性常微分方程的一般形式为

$$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}+a_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_n(x)y=f(x), \tag{1.2.1}$$

其中 $a_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 和 $f(x)$ 是 x 的已知函数, $f(x)$ 称为线性常微分方程 (1.2.1) 的非齐次项。当 $f(x)\equiv 0$ 时，我们称常微分方程 (1.2.1) 为 n 阶齐次的线性常微分方程；当 $f(x)\neq 0$ 时，我们称常微分方程 (1.2.1) 为 n 阶非齐次的线性常微分方程。

n 阶常微分方程的一般形式可表示为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0, \tag{1.2.2}$$

其中 $y^{(i)}=\frac{\mathrm{d}^iy}{\mathrm{d}x^i}(i=1,2,\cdots,n)$, F 是变量 $x,y,y',\cdots,y^{(n)}$ 的一个已知函数而且其中一定要含有 $y^{(n)}$ 项。已解出 n 阶导数的 n 阶常微分方程的一般形式是

$$y^{(n)}=f(x,y',\cdots,y^{(n-1)}), \tag{1.2.3}$$

其中 f 是定义在 $n+1$ 维空间中某区域 G 中的已知函数, 这种形式也称为 n 阶常微分方程的标准形式。

一个函数 $y=\phi(x)$ 在区间 I 上连续, 且关于 x 有直到 n 阶的连续导数。如果把它及其相应的各阶导数代入方程 (1.2.2), 得到关于 x 的恒等式, 即

$$F(x,\phi(x),\phi'(x),\cdots,\phi^{(n)}(x))=0$$

对于一切 $x\in I$ 都成立，则我们称函数 $\phi(x)$ 为 n 阶常微分方程 (1.2.2) 在区间 I 上的一个**解**。

例 1.2.1 (i) 对于常微分方程 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 2x$, 直接代入验证可知函数 $y = x^2$, $y = x^2+3$ 都是它的解; 进一步, 对于任何常数 C, 函数 $y = x^2 + C$ 都是它的解. 由微积分知识可知表达式 $y = x^2 + C$ 给出了常微分方程 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 2x$ 的所有可能的解。

(ii) 对于微分方程 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 - y = 6x$, 直接代入验证可知函数 $y = 3\mathrm{e}^x - 6x$, $y = 2\mathrm{e}^{-x} - 6x$ 都是它的解; 对于任何常数 C_1, 函数 $y = C_1\mathrm{e}^x - 6x$, $y = C_1\mathrm{e}^{-x} - 6x$ 都是它的解。进一步, 对于任何常数 C_1 和 C_2, 函数 $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} - 6x$ 都是它的解。由常微分方程理论我们将证明表达式 $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} - 6x$ 给出了常微分方程 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 - y = 6x$ 的所有可能的解。

从上面例子和上一节的几个实例可以看到, 常微分方程可以有无穷多个解, 在它们解的表达式中允许含有一些可任意取值的常数。主要原因是由于微分方程所描述的是物体运动的瞬时规律, 可视为一种局部行为, 求解微分方程, 就是从这种瞬时规律出发去获得运动的全过程。而这个求解过程事实上是一个积分过程, 每做次不定积分会产生一个任意常数, 因此一个 n 阶常微分方程的解中一般会包含 n 个任意常数。为了得到某个特定物体的运动规律, 即得到微分方程的一个特定解, 就需要有 n 个特定的条件来确定这 n 个常数, 我们把这些特定的条件称为常微分方程的定解条件, 常微分方程连同给定的定解条件称为定解问题。如果这些定解条件描述的是某一个运动的一个初始状态 (初始位移, 初始速度等), 并以此为基点去推断这一运动的未来发展或追溯它的过去状态, 我们称这样的定解条件为初始条件, 常微分方程连同给定的初始条件称为初值问题, 也称柯西 (Cauchy) 问题。除了初始条件外另外一种常见的定解条件是边界条件, 这一概念我们将在第四章中再作介绍。对于 n 阶常微分方程 (1.2.2), 初始条件的一般提法是

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}. \tag{1.2.4}$$

其中 x_0 是自变量 x 的指定的初值, 而 $y_0, y_0', \cdots, y_0^{n-1}$ 分别是未知函数及其相应导数的给定初值。不失一般性, n 阶常微分方程的初值问题可以表示为

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y', \cdots, y^{(n-1)}), \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}. \end{cases} \tag{1.2.5}$$

我们知道, 一个不带定解条件的 n 阶常微分方程解的表达式中一般允许含有 n 个可任意取值的常数。我们把含有 n 个独立的任意常数 (或参数)$C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的解 $y = \phi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ 称为 n 阶常微分方程的通解; 把不含可任意取值常数的解称为 n 阶常微分方程的特解, 这里 n 个任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是独立的含义为: $\phi, \phi', \cdots, \phi^{(n-1)}$ 关于 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的 Jacobi 行列式不为零, 即

$$\frac{\partial[\phi, \phi', \cdots, \phi^{(n-1)}]}{\partial[C_1, C_2, \cdots, C_n]} \neq 0.$$

其中 $\phi, \phi', \cdots, \phi^{(n-1)}$ 分别是 ϕ 关于自变量 x 的直到 $n-1$ 阶的导函数。

例 1.2.2 方程 (1.1.1) 的通解为

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2,$$

其中 C_1, C_2 是两个任意常数，而 $y=\frac{1}{2}gt^2+t+1$ 是方程 (1.1.1) 的一个特解；根据落体在初始时刻 $t=0$ 的位置 $y(0)=0$ 和速度 $y'(0)=0$, 得到 $y=\frac{1}{2}gt^2$ 是方程 (1.1.1) 的一个特解。对于函数 $y=\frac{1}{2}gt^2+C_2$, 当 C_2 为可任意取值的常数时不是方程 (1.1.1) 的通解，也不是方程 (1.1.1) 的特解；而当 C_2 取某个特定值（如取 $C_2=-1$ 等）时，它是方程 (1.1.1) 的特解。

一个 n 阶常微分方程的通解含有 n 个独立的任意常数；反之，含有 n 个独立的任意常数的函数族一定可以作为某个 n 阶常微分方程的通解。事实上，如果我们将函数族

$$y=\phi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n) \tag{1.2.6}$$

关于 x 求直到 n 阶导数，依次得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\partial\phi}{\partial x}(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)\\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)\\ \cdots &\quad \cdots\\ \frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n} &= \frac{\partial^n\phi}{\partial x^n}(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

由 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是 n 个独立的任意常数知, Jacobi 行列式

$$\frac{\partial[\phi,\phi',\cdots,\phi^{(n-1)}]}{\partial[C_1,C_2,\cdots,C_n]}\neq 0.$$

从而根据隐函数定理, 我们可以从方程 (1.2.6) 和 (1.2.7) 的前面 $n-1$ 个方程联立解出

$$\begin{aligned}C_1 &= C_1(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}),\\ C_2 &= C_2(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}),\\ \cdots &\quad \cdots\\ C_n &= C_n(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}).\end{aligned}$$

把它们代入 (1.2.7) 中的第 n 个方程得

$$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}=\frac{\partial^n\phi}{\partial x^n}\left(x,C_1(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}),\cdots,C_n(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}})\right),$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}=f(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}). \tag{1.2.8}$$

这是一个以 x 为自变量, y 为未知函数的 n 阶常微分方程。反之，容易验证函数族 (1.2.6) 是 n 阶常微分方程 (1.2.8) 的通解。