数学小丛书

15

数学归纳法

华罗庚

科学出版社
www.sciencep.com

数学小丛书

数学归纳法

数学小丛书 15

数学归纳法

华 罗 庚

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书首先对数学归纳法的原理做了深入浅出的分析，然后通过对数学归纳法的一些“变着”的讨论以及数学归纳法在递归函数、排列和组合、代数恒等式、差分、不等式和几何方面的一些应用，启发读者逐步体会发现问题、解决问题的一些思想、方法和技巧.在此基础上，本书在最后一节很自然地介绍了数学归纳法的数学依据——佩亚诺公理.

本书内容丰富，讨论直观生动，由浅入深，经过精选的例子不局限于解题技巧，还给人以足够的思考空间，对于善于思考的读者所得到的收获将不囿于本书.

图书在版编目(CIP)数据

数学归纳法/华罗庚.—北京:科学出版社,2002
(数学小丛书)
ISBN 7-03-009423-9

Ⅰ.数…　Ⅱ.华…　Ⅲ.数学归纳法-普及读物
Ⅳ.O141-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 010168 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2002 年 5 月第 一 版　开本:787×960　1/32
2004 年 2 月第二次印刷　印张:2 7/8　插页:1
印数:5 001—8 000　字数:42 000

全套书定价:99.00 元(共 18 册)

(如有印装质量问题,我社负责调换〈科印〉)

馬克思说：「一门科学，只有当它成功地运用数学时，才能达到真正完善的地步」。恩格斯说：「要辯证而又唯物地了解自然，就必須熟悉数学」。在科教兴国，振兴中华的今天，向全社会普及数学，实在是一件刻不容缓的大事。

数学小丛書是由我国一些著名数学家撰写的一批数学普及读物精品。几十年来，我国几代科技人员中，不少人都曾得益于这套丛书。我衷心地祝賀数学小丛書的重版与補充，并预祝它取得更大的成功。

王元

二〇〇〇年四月

出版说明

1956年，为了向青少年传播数学知识，科学出版社配合我国首次举办的高中数学竞赛，出版了老一辈数学家华罗庚教授的《从杨辉三角谈起》和段学复教授的《对称》. 在20世纪60年代初，这两本书连同其他一些著名数学家撰写的科普著作，被北京市数学会编成小丛书，相继由不同的出版社出版，并多次重印.

由数学大师和著名数学家亲自执笔撰写的这套数学小丛书是我国数学普及读物中的精品，曾激发一代青少年学习数学的兴趣. 书中蕴涵的深刻而富有启发性的思想，促进了无数中学生在求学的道路上健康成长. 当年这套小丛书的许多读者，现在已经成为学有所成的科学技术工作者，国家建设的栋梁之才. 当年由老一辈数学家所倡导的我国的数学竞赛活动，现在已经得到蓬勃的发展. 我国自1986年正式参加国际数学奥林匹克竞赛以来，历届都取得总分

第一或第二的好成绩.近年来,我国的数学普及读物无论是品种还是数量都在增加,但是这套数学小丛书仍然无愧是其中别具特色的瑰宝,理应成为传世之作.因此,我社取得作者或其继承人的同意,并在可能的条件下,请作者本人或相关学者对重新编辑的书稿进行了审订,重新刊行这套数学小丛书,以飨广大青少年读者.

数学是几千年人类智慧的结晶,是一门古老而又常新的科学.借此丛书再版之机,我们特别增加两本新书:虞言林教授等的《祖冲之算 π 之谜》和冯克勤教授的《费马猜想》.前者介绍中国古代数学的一项重大成就,后者阐述数学史上的一个著名猜想——费马定理历经 300 多年终于在 20 世纪末被证明的故事,我们相信读者从中将会受到启迪.

本套丛书以新貌重新出版,得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的资助,谨表示衷心感谢.

目　　录

1 写在前面

高中代数教科书里，讲过数学归纳法，也有不少的数学参考书讲到数学归纳法. 但是，我为什么还要写这本小册子呢？

首先，当然是由于这个方法的重要. 学好了、学透了，对进一步学好高等数学有帮助，甚至对认识数学的性质，也会有所裨益. 但更主要的，我总觉得有些看法、有些材料，值得补充. 而这些看法和材料，在我学懂数学归纳法的过程中，曾经起过一定的作用.

这里，我先提出其中的一点.

我在中学阶段学习数学归纳法这部分教材的时候，总认为学会了

“1 对；假设 n 对，那么 $n+1$ 也对”

的证明方法就满足了. 后来，却愈想愈觉得不满足，总感到还差了些什么.

抽象地谈恐怕谈不清楚，还是举个例子来

说明吧.

例如:求证

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2. \tag{1}$$

这个问题当时我会做.证法如下:

证明:当 $n=1$ 的时候,(1)式左右两边都等于1;所以,当 $n=1$ 的时候,(1)式成立.

假设当 $n=k$ 的时候(1)式成立,就是

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left[\frac{1}{2}k(k+1)\right]^2. \tag{2}$$

那么,因为

$$\begin{aligned}
&1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3\\
&=\left[\frac{1}{2}k(k+1)\right]^2+(k+1)^3\\
&=\left[\frac{1}{2}(k+1)\right]^2\left[k^2+4(k+1)\right]\\
&=\left[\frac{1}{2}(k+1)\right]^2[k+2]^2\\
&=\left[\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right]^2,
\end{aligned}$$

所以，当 $n=k+1$ 的时候，(1)式也成立.

因此，对于所有的自然数 n，(1)式都成立.（证毕.）

上面的证明步骤是不是完整了呢？当然，是完整了.老师应当不加挑剔地完全认可了.

但是，我后来仔细想想，却感到有些不满足.问题不是由于证明错了，而是对上面这个恒等式(1)是怎样得来的，也就是对前人怎样发现这个恒等式，产生了疑问.难道这是从天上掉下来的吗？当然不是！是有"天才"的人，直观地看出来的吗？也不尽然！

这个问题启发了我：难处不在于有了公式去证明，而在于没有公式之前，怎样去找出公式来；才知道要点在于言外.而我们以前所学到的，仅仅是其中比较容易的一个方面而已.

我这样说，请不要跟学校里对同学们的要求混同起来，作为中学数学教科书，要求同学们学会数学归纳法的运用，就可以了.而这本书是中学生的数学课外读物，不是教科书，要求也就不同了.

话虽如此，一切我们还是从头讲起.

2 归纳法的本原

先从少数的事例中摸索出规律来，再从理论上来证明这一规律的一般性，这是人们认识客观法则的方法之一.

以识数为例.小孩子识数，先学会数1个、2个、3个；过些时候，能够数到10了；又过些时候，会数到20，30，…，100了.但后来，却决不是这样一段一段地增长，而是飞跃前进.到了某一个时候，他领悟了，他会说："我什么数都会数了."这一飞跃，竟从有限跃到了无穷！怎样会的？首先，他知道从头数；其次，他知道一个一个按次序地数，而且不愁数了一个以后，下一个不会数.也就是他领悟了下一个数的表达方式，可以由上一个数来决定，于是，他也就会数任何一个数了.

设想一下，如果这个飞跃现象不出现，那么人们一辈子就只能学数数了.而且人生有限，数目无穷，就是学了一辈子，也决不会学尽呢！

解释这个飞跃现象的原理，正就是数学归纳法．数学归纳法大大地帮助我们认识客观事物，由简到繁，由有限到无穷．

从一个袋子里摸出来的第一个是红玻璃球、第二个是红玻璃球、甚至第三个、第四个、第五个都是红玻璃球的时候，我们立刻会出现一种猜想："是不是这个袋里的东西全部都是红玻璃球？"但是，当我们有一次摸出一个白玻璃球的时候，这个猜想失败了；这时，我们会出现另一个猜想："是不是袋里的东西，全部都是玻璃球？"但是，当有一次摸出来的是一个木球的时候，这个猜想又失败了；那时我们会出现第三个猜想："是不是袋里的东西都是球？"这个猜想对不对，还必须继续加以检验，要把袋里的东西全部摸出来，才能见个分晓．

袋子里的东西是有限的，迟早总可以把它摸完，由此可以得出一个肯定的结论．但是，当东西是无穷的时候，那怎么办？

如果我们有这样的一个保证："当你这一次摸出红玻璃球的时候，下一次摸出的东西，也一定是红玻璃球，"那么，在这样的保证之下，就不必费力去一个一个地摸了．只要第一次摸出来的确实是红玻璃球，就可以不再检查地作出正确的结论："袋里的东西，全部是红玻璃球．"

这就是数学归纳法的引子．我们采用形式

上的讲法，也就是：

有一批编了号码的数学命题，我们能够证明第1号命题是正确的；如果我们能够证明在第 k 号命题正确的时候，第 $k+1$ 号命题也是正确的，那么，这一批命题就全部正确.

在上一节里举过的例子：

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2. \tag{1}$$

当 $n=1$ 的时候，这个等式就成为

$$1^3=\left[\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1)\right]^2.$$

这是第1号命题.（这个命题可以通过验证，证实它是成立的.）

当 $n=k$ 的时候，这个等式成为

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left[\frac{1}{2}k(k+1)\right]^2, \tag{2}$$

这是第 k 号命题.（这个命题是假设能够成立的.）

而下一步就是要在第 k 号命题成立的前提下，证明第 $k+1$ 号命题

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$$
$$=\left[\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right]^2$$

也成立.所以这个证法就是上面所说的这一原则的体现.

再看下面的一个例子.

例 求证:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}. \tag{3}$$

第 1 号命题是:当 $n=1$ 的时候,上面这个等式成为

$$\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{1+1}.$$

这显然是成立的.

现在假设第 k 号命题是正确的,就是假设

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1},$$

那么,第 $k+1$ 号命题的左边是

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2},$$

恰好等于第 $k+1$ 号命题的右边. 所以第 $k+1$ 号命题也正确.

由此, 我们就可以作出结论: 对于所有的自然数 n, (3) 式都成立.

附言: 上面的证明中, 假设"第 k 号命题是正确的", 我们有时用"归纳法假设"一语来代替.

3 两条缺一不可

这里，必须强调一下，在我们的证法里：

(1)"当 $n=1$ 的时候，这个命题是正确的"；

(2)"假设当 $n=k$ 的时候，这个命题是正确的，那么当 $n=k+1$ 的时候，这个命题也是正确的"，这两条缺一不可.

不要认为，一个命题在 $n=1$ 的时候，正确；在 $n=2$ 的时候，正确；在 $n=3$ 的时候也正确，就正确了. 老实说，不要说当 $n=3$ 的时候正确还不算数，就是一直到当 n 是 1000 的时候正确，或者 10000 的时候正确，是不是对任何自然数都正确，还得证明了再说.

不妨举几个例子.

例 1 当 $n=1, 2, 3, \cdots, 15$ 的时候，我们可以验证式子

$$n^2+n+17$$