■ 丘成桐　孙理察　著

■ 忻元龙　译

调和映照讲义

Lectures on Harmonic Maps

高等教育出版社
Higher Education Press

■ 丘成桐　孙理察　著
■ 忻元龙　译

调和映照讲义

Lectures on Harmonic Maps

高等教育出版社
Higher Education Press

图字: 01–2007–5152 号

ORIGINAL ENGLISH LANGUAGE EDITION PUBLISHED
BY International Press Incorporated, Bostom
385 Somerville Ave, Somerville, MA, U.S.A.

图书在版编目(CIP)数据

调和映照讲义/（美）丘成桐 孙理察 著；忻元龙译.
—北京：高等教育出版社，2008.1
书名原文：Lectures on Harmonic Maps
ISBN 978-7-04-023195-3

Ⅰ.调... Ⅱ.①孙...②丘...③忻... Ⅲ.调和函数 Ⅳ.0174.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 176555 号

策划编辑 郑轩辕 **责任编辑** 郑轩辕 **封面设计** 王凌波
责任绘图 尹 莉 **版式设计** 王凌波 **责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	肥城新华印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2008 年 1 月第 1 版
印　　张	20	印　　次	2008 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	320 000	定　　价	43.00 元

物 料 号　23195-00

序　言

对流形之间的映照可很自然地引入能量的概念. 这种能量泛函的临界点称为调和映照. 开始, 调和映照的研究是和极小曲面的理论联系在一起的. Bochner 首先将调和映照理论作为广义极小曲面而独立出来. 但是, 重要的存在性和正则性理论一直等到 C. Morrey 在上世纪四十年代晚期解决著名的 Plateau 问题后才建立起来. Morrey 的理论深刻地影响了后来所有在二维曲面上调和映照的工作. 其中包括 Sacks-Ulenbeck 在极小球面的基本工作和不可压缩极小曲面的工作. 在上世纪七十年代中期, 我们已认识到调和映照理论可用于研究 Teichmüller 理论和 Kähler 几何.

本书的第一部分关注黎曼面上的调和映照, 讨论了我们感到有意义的内容, 概不能全地忽略了很多重要发展. 调和映照作为恰好可解的模型是最令人注目的.

高维流形上的调和映照理论直到上世纪六十年代中才由 Eells 和 Sampson 取得主要突破. 他们不用变分法, 而用后来对几何产生深刻影响的热方程法. 当目标流形不一定是负曲率的时候, 正则性理论的建立要晚得多. 本书第二部分的头两章中, 我们展开了这种正则性理论, 其中目标空间可以不是良好的流形. 这样框架下的正则性理论是由本书第一作者, 以及后来第一作者和 N. Korevaar 的合作发展起来的. 在上世纪七十年代初, 第二作者意识到 Eells 和 Sampson 的定理可以用来重新证明 Mostow 的著名刚性定理和 Margulis 的超刚性定理. 但

是, 这个目标的大部分直到上世纪八十年代末才达到. 本书第二部分的最后一章展开这部分内容, 这是 J.Jost 和第二作者的合作的工作. 在七十年代中, 我们已经成功地将调和映照理论应用于负曲率流形拓扑的研究; 那些工作也在第二部份. 我们很遗憾, 由于时间限制而没有做更多的应用.

1985 年, 我们在加州大学圣地亚哥分校对调和映照研究课题作了系列演讲. 演讲的大部分内容都收录在这里, 作为本书的第一部分. 第二部分最近才加进去, 收集了第一作者博士论文的部分内容, N. Korevaar 的工作和第二作者的工作, 以及我们将调和映照应用于几何方面的工作. 最后一章 J. Jost 和第二作者.

作者特别感谢崔嘉勇, 他为我们的演讲做了翔实的记录, 从而形成本书的第一部分.

孙理察　　丘成桐
斯坦福大学　哈佛大学

目　录

第一部分

第一章　曲面的调和映照

§1. 映照的能量

设 (M^n,g), (N^k,h) 是 Riemann 流形, u 是从 M^n 到 N^k 的 C^1 映照, 度量 g 和 h 为

$$ds_M^2=\sum g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta,\qquad ds_N^2=\sum h_{ij}(u(x))du^i du^j.$$

度量 h 在映照 u 下的拉回 $u^*(ds_N^2)$ 是一个对称二次型:

$$u^*(ds_N^2)=\sum_{\alpha,\beta}\left(\sum_{i,j}h_{ij}(u(x))\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial u^j}{\partial x^\beta}\right)dx^\alpha dx^\beta.$$

选取正交向量场以及它们的对偶 1–形式 $\omega^1,\cdots,\omega^n$, 我们可以将 $u^*(d\,s_N^2)$ 对角化, 使 $u^*(d\,s_N^2)=\sum_{\alpha=1}^n\lambda_\alpha(\omega^\alpha)^2$. 那么, 有意义的不变量是 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的对称函数, 其中一个对称函数是它们的迹:

$$|du|^2\equiv\mathrm{Tr}_{ds_M^2}(u^*ds_N^2)=\sum_{\alpha=1}^n\lambda_\alpha.$$

我们称 $|d\,u|^2$ 为映照 u 的**能量密度**, 它在局部坐标系的表示为

$$|du|^2=\sum_{i,j,\alpha,\beta}g^{\alpha\beta}(x)h_{ij}(u(x))\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial u^j}{\partial x^\beta}.$$

注意到 u 的能量密度不依赖于 M^n 中的坐标选取.

λ_α 的另外一个对称函数, 例如 $\prod\lambda_\alpha$ 看来没有导致有几何意义的变分问题.

我们定义**能量泛函** $E(u)$ 为

$$E(u) = \int_M |du|^2 dv_M,$$

其中 $dv_M = (\det g)^{\frac{1}{2}} d\,x$ 是 M^n 的体积元. 那么, 在映照空间中 E 的临界点称为**调和映照.**

附注 (1) 如果 $N^k = \mathbb{R}^k$ 并且 $h_{ij} = \delta_{ij}$, 那么

$$E(u) = \sum_{i=1}^{k} \int |\nabla u^i|^2 dv_M.$$

所以, u 是调和的充要条件是 $\Delta_M u^i = 0, i = 1, \cdots, k$, 即每一个坐标函数是调和的.

(2) 如果 $M = [0, 1]$ (换言之, u 是 N 中的曲线), 那么, u 的能量是 $E(u) = \int_0^1 ||\frac{d\,u}{d\,t}||^2 d\,t$, 并且 E 的临界点是具有常速率参数化的测地线. 注意到另一个能量泛函 E', 定义为 $E'(u) = \int_0^1 ||\frac{d\,u}{d\,t}||\, d\,t$, 它给我们相同的临界点——测地线. 但是, 那些测地线不具有常速率参数化, 因为 E' 和参数选取无关.

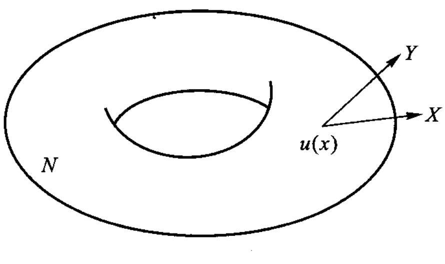
§2. 调和映照的方程

假定将 N 等距地嵌入到欧氏空间 $\mathbb{R}^k$. 我们可以将映照 u 看作对任何 $x \in M$ 满足逐点限制 $u(x) \in N$ 的坐标函数 $u = (u^1, \cdots, u^k)$. 因此,

$$E(u) = \sum_{i=1}^{k} \int_M |\nabla u^i|^2 dv_M.$$

考察调和映照的一个好观点是考察 E 在限制条件 $u(x) \in N, \forall x \in M$ 下的极值. 从而, 我们得到**调和映照方程**

$$\Delta u^i - g^{\alpha\beta} A^i_{u(x)} \left(\frac{\partial u}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial u}{\partial x^\beta} \right) = 0, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{$*$}$$



其中 A 是 N 的第二基本形式, 定义为 $A_u(X,Y)=(D_XY)^{\perp}$. 由于 $(*)$ 中的第二项是 N 的法向, 我们可以将 $(*)$ 简单地写为 $(\Delta u)^{T_uN}\equiv 0$ 并满足约束条件. 在 N 的局部坐标下, 方程 $(*)$ 变为

$$\Delta u^i+g^{\alpha\beta}\Gamma^i_{jl}(u(x))\frac{\partial u^j}{\partial x^\alpha}\frac{\partial u^l}{\partial x^\beta}\equiv 0,\quad i=1,\ldots,k,$$

其中 Γ^i_{jl} 表示 N 的克氏记号.

§3. 曲面上的问题

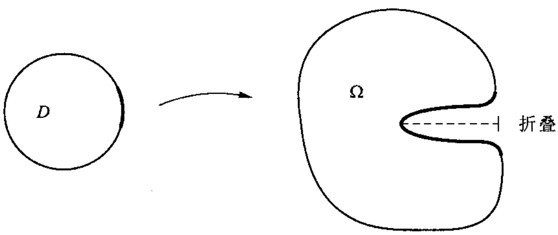
本章的其余部分我们限于研究 $n=2$ 的情形. 这种情形的最显著特征是能量的共形不变性: 如果 M 上赋于度量 $g=g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ 并且令 $\tilde{g}=e^{2v}g$, $v\in C^\infty(M)$. 那么 $|\tilde{d}u|^2=e^{-2v}|du|^2$ 并且 $\sqrt{\det\tilde{g}}=e^{2v}\sqrt{\det g}$, 所以, $\tilde{E}(u)=E(u)$, 即能量在共形变换下不变.

选取 M 上的等温坐标系 (x,y) 使 $g=\lambda(x,y)(dx^2+dy^2)$, $\lambda>0$. 设 $z=x+iy$. 那么, 由正定向的等温坐标系所定义的共形结构定义了一个复结构, 从而使 (M,z) 是一个具有 Kähler 度量 $g=\lambda(z)|dz|^2$ 的一个Riemann 面. 能量的共形不变性意味着 $E(u)$ 只依赖于M 的复结构而不依赖于 M 的度量 g.

§4. Rado 定理

定理 (Rado, 1930) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的凸区域. 对任意给定的同胚 $\phi:S^1\to\partial\Omega$, 存在唯一的调和映照 $u:D\to\Omega$, 使在 $\partial D=S^1$ 上 $u=\phi$, 并且 u 是一个微分同胚.

附注 在所有保定向的, 在边界 ∂D 上是 $1-1$ 并且连续的同胚 $D\to\Omega$ 中, Riemann 映照定理的那个映照是能量极小的. 如果 Ω 不是凸的, 那么上述定理就不成立, 因为如果映照 ϕ 将 ∂D 中一点的一个小邻域映照到 $\partial\Omega$ 的一大段凹进去部分, 那么在 $\partial\Omega$ 的凹部附近就发生折叠, 如下图所示.



证明　u 的存在唯一性从标准的偏微分方程理论得到. 因此, 还要证明 u 是微分同胚 (注意到调和映照不一定保持定向) .只要说明, 在 D 中 $\det J(u) \neq 0$, 其中 $J(u)$ 是 u 的 Jacobi 行列式. 否则, 假定在 $(x_0, y_0) \in D$,

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{pmatrix} = 0.$$

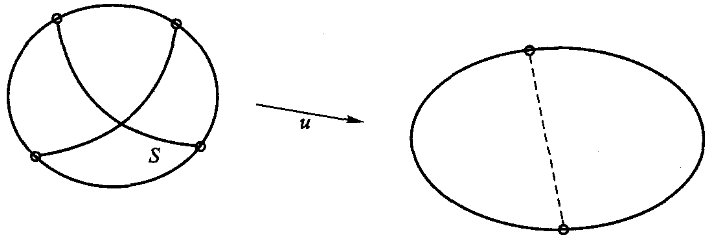
这里, 我们假定 $u = (u_1, u_2)$, $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, 并且 u_1, u_2 分别是 ϕ_1, ϕ_2 的调和延拓, 即在 D 中, $\Delta u_i = 0$ 并且在 S^1 上 $u_i = \phi_i$. 那么, 存在 $(a, b) \neq (0, 0)$, 使得在 (x_0, y_0)

$$\frac{\partial}{\partial x}(a\,u_1 + b\,u_2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}(a\,u_1 + b\,u_2) = 0$$

令 $h = a\,u_1 + b\,u_2$. 那么, h 是调和的并且在 (x_0, y_0) 点 $\nabla h = 0$. 设

$$S = \{(x, y) : h(x, y) = h(x_0, y_0)\}.$$

如果 $D \setminus S$ 有一个和边界 ∂D 不相交的连通分支 K, 那么, 在 ∂K 上 $h = 0$, 从而根据极值原理, 在 K 中 $h = 0$. 这是不可能的. 在 (x_0, y_0) 的一个小邻域内至少有 4 条从 (x_0, y_0) 出发的曲线都延伸到边界, 因此, $\partial D \cap S$ 至少包含 4 个点. 另一方面, S 是直线 $a\,x + b\,y = 0$ 在映照 u 下的原像. 由于 Ω 是凸的, 直线和 $\partial\Omega$ 的交只有 2 个点. 这样, u 将 ∂D 上的 4 个点映到 $\partial\Omega$ 中的 2 个点, 与 ϕ 是 $1-1$ 的假定矛盾. 所以 u 是局部微分同胚, 它又是逆紧的, 从而是微分同胚.



§5. Hopf 微分

设 $u : M^2 \to N^k$ 是调和映照. 在以 $u(x)$ 为中心的法坐标系中, 由于 $\Gamma^i_{jk}(u(x)) = 0$, 调和映照方程化为 $\Delta u^i(x) = 0$. 另一方面, $\Delta u^i = 4\frac{\partial^2 u^i}{\partial z \partial \bar{z}}$. 如

果我们定义

$$\varphi(z) = \left\langle \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\rangle,$$

或者等价地

$$\varphi(z) = \sum_{i,j} h_{ij}(u(z)) \frac{\partial u^i}{\partial z} \frac{\partial u^j}{\partial z}.$$

考虑到 $\varphi(z)$ 和坐标选取无关, 而在法坐标中心 ∇h_{ij} 为零, $\frac{\partial \varphi(z)}{\partial \bar{z}} = 0$ (即 $\varphi(z)$ 是全纯的). 定义 $\Phi = \varphi(z)\, dz^2$, 它称为**Hopf 微分.** 注意到 Φ 和局部坐标 z 的选取无关, 而 φ 则不然. 当 u 是调和的时候, Φ 是一个**全纯二次微分.** 由于

$$\varphi(z) = \langle \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} \rangle = \frac{1}{4}\left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 - \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 - 2i \left\langle \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right\rangle \right),$$

我们看到 $\varphi(z) \equiv 0$ 的充要条件为 u 是共形的. 因此, $\Phi \equiv 0$ 的充要条件为 $u(M)$ 是 N 中的**分支极小曲面** (调和并且共形等价于极小).

命题 从球面出发的调和映照 $u: S^2 \to N^k$ 一定是共形映照.

证明 我们来说明 S^2 上没有非零的全纯二次微分. 假定 $\Phi = \varphi(z)\, dz^2$ 是 S^2 上的全纯二次微分. 那么, φ 是 $\mathbb{C} = S^2 \setminus \{\infty\}$ 上的整函数, 并且 $\varphi\, dz^2$ 在无穷远处是正则的. 设 $w = \frac{1}{z}$, 并且 $\Phi = \varphi(z(w))\, w^{-4} dw^2$. 这样, $\varphi(z(w))\, w^{-4}$ 在 $w = 0$ 处是正则的, 在 $w = 0$ 附近 $\varphi(z(w)) \leqslant c|w|^4$, 因此, 在 $z = \infty$ 附近 $\varphi(z) \leqslant c|z|^{-4}$. 根据极大模原理 $\Phi \equiv 0$. u 是共形的.

推论 (1)从球面到球面的调和映照 $u: S^2 \to S^2$ 一定是全纯映照, 如果它保持定向, 否则它是反全纯映照. (2) 不存在从球面 S^2 到正亏格的曲面 N^2的非平凡的调和映照, 不论 N^2 上的度量如何.

证明 (1) 应用上述命题 u 是全纯映照或反全纯映照.

(2) 设 $\tilde{N}$ 是 N 的单连通覆盖空间, $\tilde{u}$是 u 的提升(即 $P \circ \tilde{u} = u$).那么 $\tilde{N}$ 共形等价于 $\mathbb{C}$ 或 D, 并且 $\tilde{u}$ 也是全纯映照或反全纯映照. 不管何种情形, $\tilde{u}$ 产生了一个 S^2 上的全纯函数, 由极值原理, 它一定是常数.

附注 可以构造从环面 T^2 到任何曲面的调和映照.

§6. 方程的复形式

设 M, N 是紧致无边定向的曲面, u 是 M 到 N 的映照. 设 $z = x + iy$, $u = u_1 + i\, u_2$ 分别是 M, N 的复坐标. 那么, M, N 上的度量分别是 $\lambda(z)|dz|^2$, $\rho(u)|du|^2$.

映照 u 局部表示为 $u = u(z)$. 记

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big).$$

那么,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x} - i\frac{\partial u_1}{\partial y}\Big) + i\Big(\frac{\partial u_2}{\partial x} - i\frac{\partial u_2}{\partial y}\Big)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\Big) + i\Big(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\Big)\Big], \\
\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\Big) + i\Big(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\Big)\Big], \\
|du|^2 &= \frac{\rho(u(z))}{\lambda(z)}\Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial u}{\partial y}\Big|^2\Big) \\
&= 2\frac{\rho(u(z))}{\lambda(z)}\Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial z}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}\Big|^2\Big) = 2(|\partial u|^2 + |\overline{\partial} u|^2), \\
J(u) &= \frac{\rho}{\lambda}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial u_1}{\partial y}\Big) = |\partial u|^2 - |\overline{\partial} u|^2,
\end{aligned}$$

其中 $J(u)$ 是 u 的 Jacobi 行列式. 因此

$$|du|^2 = 2(2|\partial u|^2 - J(u)) = 4|\partial u|^2 - 2J(u).$$

现在, 我们来推导**调和映照方程的复形式**. 设 $u_t = u + t\eta$, 这里 η 是具紧支集的 C^∞ 复值函数. 那么,

$$\begin{aligned}
E(u_t) &= 2\Big(\int_M |\partial u_t|^2 \lambda dxdy + \int_M |\overline{\partial} u_t|^2 \lambda dxdy\Big) \\
&= 4\int_M |\partial u_t|^2 \lambda dxdy - 2\int_M J(u_t)\lambda dxdy.
\end{aligned}$$

注意到 $\int_M J(u_t)\lambda\, dxdy = \deg(u_t)\cdot \mathrm{vol}(N)$. 所以, 对任何 η

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(u_t)\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}4\int_M |\partial u_t|^2 \lambda dxdy\Big|_{t=0} \\
&= 4\int (\rho_u \eta + \rho_{\overline{u}}\overline{\eta})|u_z|^2 + \rho(\eta_z \overline{u}_{\overline{z}} + u_z \overline{\eta}_{\overline{z}})dxdy \\
&= 8\int \mathrm{Re}(\rho(u)u_z\overline{\eta}_{\overline{z}} + \rho_{\overline{u}}\overline{\eta}|u_z|^2)dxdy \\
&= 8\int \mathrm{Re}[\{-(\rho_u u_{\overline{z}} + \rho_{\overline{u}}\overline{u}_{\overline{z}})u_z - \rho u_{z\overline{z}} + \rho_{\overline{u}}|u_z|^2\}\overline{\eta}]dxdy \\
&= 8\int \mathrm{Re}[(-\rho u_{z\overline{z}} - \rho_u u_{\overline{z}} u_z)\overline{\eta}]dxdy \\
&= 0.
\end{aligned}$$