

■ 丘成桐 孙理察 著

■ 忻元龙 译

调和映照讲义

Lectures on
Harmonic Maps



高等教育出版社
Higher Education Press

■ 丘成桐 孙理察 著

■ 忻元龙 译

调和映照讲义

Lectures on
Harmonic Maps



高等教育出版社
Higher Education Press

图字: 01-2007-5152 号

ORIGINAL ENGLISH LANGUAGE EDITION PUBLISHED

BY International Press Incorporated, Boston

385 Somerville Ave, Somerville, MA, U.S.A.

COPYRIGHT: 1997

ALL RIGHTS RESERVED

图书在版编目(CIP)数据

调和映照讲义/(美)丘成桐 孙理察 著;忻元龙译.

—北京:高等教育出版社,2008.1

书名原文:Lectures on Harmonic Maps

ISBN 978-7-04-023195-3

I.调... II.①孙...②丘...③忻... III.调和函数 IV.0174.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 176555 号

Copyright©by Higher Education Press, International Press

策划编辑 郑轩轅 责任编辑 郑轩轅 封面设计 王凌波
责任绘图 尹 莉 版式设计 王凌波 责任印制 朱学忠

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总 机 010-58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 肥城新华印刷有限公司

开 本 787×960 1/16
印 张 20
字 数 320 000

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2008 年 1 月第 1 版
印 次 2008 年 1 月第 1 次印刷
定 价 43.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物 料 号 23195-00

序 言

对流形之间的映照可很自然地引入能量的概念. 这种能量泛函的临界点称为调和映照. 开始, 调和映照的研究是和极小曲面的理论联系在一起的. Bochner 首先将调和映照理论作为广义极小曲面而独立出来. 但是, 重要的存在性和正则性理论一直等到 C. Morrey 在上世纪四十年代晚期解决著名的 Plateau 问题后才建立起来. Morrey 的理论深刻地影响了后来所有在二维曲面上调和映照的工作. 其中包括 Sacks-Uhlenbeck 在极小球面的基本工作和不可压缩极小曲面的工作. 在上世纪七十年代中期, 我们已认识到调和映照理论可用于研究 Teichmüller 理论和 Kähler 几何.

本书的第一部分关注黎曼面上的调和映照, 讨论了我们感到有意义的内容, 概不能全地忽略了很多重要发展. 调和映照作为恰好可解的模型是最令人瞩目的.

高维流形上的调和映照理论直到上世纪六十年代中才由 Eells 和 Sampson 取得主要突破. 他们不用变分法, 而用后来对几何产生深刻影响的热方程法. 当目标流形不一定是负曲率的时候, 正则性理论的建立要晚得多. 本书第二部分的头两章中, 我们展开了这种正则性理论, 其中目标空间可以不是良好的流形. 这样框架下的正则性理论是由本书第一作者, 以及后来第一作者和 N. Korevaar 的合作发展起来的. 在上世纪七十年代初, 第二作者意识到 Eells 和 Sampson 的定理可以用来重新证明 Mostow 的著名刚性定理和 Margulis 的超刚性定理. 但

是, 这个目标的大部分直到上世纪八十年代末才达到. 本书第二部分的最后一章展开这部分内容, 这是 J. Jost 和第二作者的合作的工作. 在七十年代中, 我们已经成功地将调和映照理论应用于负曲率流形拓扑的研究; 那些工作也在第二部份. 我们很遗憾, 由于时间限制而没有做更多的应用.

1985 年, 我们在加州大学圣地亚哥分校对调和映照研究课题作了系列演讲. 演讲的大部分内容都收录在这里, 作为本书的第一部分. 第二部分最近才加进去, 收集了第一作者博士论文的部分内容, N. Korevaar 的工作和第二作者的工作, 以及我们将调和映照应用于几何方面的工作. 最后一章 J. Jost 和第二作者.

作者特别感谢崔嘉勇, 他为我们的演讲做了翔实的记录, 从而形成本书的第一部分.

孙理察 丘成桐
斯坦福大学 哈佛大学

目 录

第一部分	1
第一章 曲面的调和映照	3
§1. 映照的能量	3
§2. 调和映照的方程	4
§3. 曲面上的问题	5
§4. Rado 定理	5
§5. Hopf 微分	6
§6. 方程的复形式	7
§7. Bochner 公式	9
§8. 何时调和映照为微分同胚?	13
§9. 双曲曲面的映照	14
§10. Picard 型问题	15
第二章 Teichmüller 空间的紧化	17
§1. 引言	17
§2. Teichmüller 空间	18

§3. $\mathfrak{S}_g$ 微分同胚于 $\mathbb{Q}_0^{6g-6}$	20
§4. Teichmüller 空间的紧化	21
§5. 可测叶状结构	22
§6. $\{\rho_t\}$ 和 $\{F_v(t\Phi_0)\}$ 间的渐近关系	24
§7. Thurston 和 Wolf 的紧化	26
§8. 拉伸估计	28
§9. $\mathfrak{S}_g$ 中发散序列 $\{\rho_n\}$ 的性质	31
§10. 紧化定理的证明	34
第三章 具常负全纯截面曲率 Kähler 流形的调和映照	36
§1. $ \partial f ^2, \bar{\partial} f ^2$ 的 Laplace	37
§2. 面积不减小的调和映照	40
§3. 到球体的商流形的映照	41
§4. Gromov 拟模	46
§5. 双曲流形的 Gromov 模	47
§6. 对称域的 Kähler 类的 Gromov 模	49
第四章 Kähler 曲面中的极小曲面	54
§1. 孤立复切平面的指标	54
§2. Kähler 曲面中的非全纯极小浸入	57
第五章 欧氏空间中的稳定极小曲面	60
§1. 稳定性不等式的复形式	61
§2. 到 $\mathbb{R}^{2n}$ 中全纯浸入的一个特征	62
§3. 具有有限全曲率和亏格为零的稳定极小曲面	64
§4. $\mathbb{R}^4$ 中的稳定极小曲面	67
第六章 二维球极小浸入的存在性	71
§1. 从曲面出发的调和映照	72
§2. 扰动问题的性质	73
§3. 估计和推广	76
§4. 扰动问题临界映照的收敛性	79

§5. 应用和结果	81
第七章 具正全迷向曲率的流形	86
§1. 正全迷向截面曲率	87
§2. M 中调和 2- 维球面的指标	89
§3. α -能量的低指标数的临界点	92
§4. 小指标数调和二维球的存在性	95
第八章 具正全纯双截面曲率的紧致 Kähler 流形	99
§1. 能量, $\bar{\partial}$ - 能量, 以及 ∂ - 能量	101
§2. 第二变分公式	102
§3. 能量极小映照的复解析性	103
§4. 能量极小映照的存在性	104
§5. Frankel 猜想的证明	106
参考文献	108
第二部分	113
第九章 调和映照问题的分析观点和方法	115
§1. 基本问题的程式	115
§2. Dirichlet 问题的可解性	119
§3. 凸性和唯一性定理	124
§4. 调和映照的先验估计	126
§5. 一个局部存在定理	132
§6. 同伦 Dirichlet 问题	137
§7. 存在性和弱解的正则性	139
§8. 热方程法和非紧目标流形	145
参考文献	152
第十章 Soblev 空间和到度量空间的调和映照	155
§1. 到距离空间映照的 Sobolev 空间理论	158
§2. 到非正弯曲度量空间的调和映照	198

参考文献	236
第十一章 调和映照的模空间, 紧群作用和非正曲率流形的拓扑	238
§1. 距离函数 Hessian 的计算	240
§2. 调和映照的唯一性	241
§3. 调和映照和完备流形	250
§4. 光滑作用于流形的紧群	251
参考文献	259
第十二章 调和映照, 稳定超曲面的拓扑以及具有非负 Ricci 曲率的流形	261
§1. 具有有限能量调和映照的存在性	262
§2. 具有非负 Ricci 曲率完备流形的基本群	264
§3. 稳定浸入的基本群	265
参考文献	268
第十三章 调和映照和超刚性	270
§1. 调和映照的 Matsushima 型公式	276
§2. 非紧型局部对称空间的刚性定理	278
§3. 不同情形的讨论	282
参考文献	305

第一部分

第一章 曲面的调和映照

§1. 映照的能量

设 $(M^n, g), (N^k, h)$ 是 Riemann 流形, u 是从 M^n 到 N^k 的 C^1 映照, 度量 g 和 h 为

$$ds_M^2 = \sum g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta, \quad ds_N^2 = \sum h_{ij}(u(x)) du^i du^j.$$

度量 h 在映照 u 下的拉回 $u^*(ds_N^2)$ 是一个对称二次型:

$$u^*(ds_N^2) = \sum_{\alpha, \beta} \left(\sum_{i, j} h_{ij}(u(x)) \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial x^\beta} \right) dx^\alpha dx^\beta.$$

选取正交向量场以及它们的对偶 1-形式 $\omega^1, \dots, \omega^n$, 我们可以将 $u^*(ds_N^2)$ 对角化, 使 $u^*(ds_N^2) = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha (\omega^\alpha)^2$. 那么, 有意义的不变量是 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 的对称函数, 其中一个对称函数是它们的迹:

$$|du|^2 \equiv \text{Tr}_{ds_M^2} (u^* ds_N^2) = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha.$$

我们称 $|du|^2$ 为映照 u 的能量密度, 它在局部坐标系的表示为

$$|du|^2 = \sum_{i, j, \alpha, \beta} g^{\alpha\beta}(x) h_{ij}(u(x)) \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial x^\beta}.$$

注意到 u 的能量密度不依赖于 M^n 中的坐标选取.

λ_α 的另外一个对称函数, 例如 $\prod \lambda_\alpha$ 看来没有导致有几何意义的变分问题.

我们定义能量泛函 $E(u)$ 为

$$E(u) = \int_M |du|^2 dv_M,$$

其中 $dv_M = (\det g)^{\frac{1}{2}} dx$ 是 M^n 的体积元. 那么, 在映照空间中 E 的临界点称为调和映照.

附注 (1) 如果 $N^k = \mathbb{R}^k$ 并且 $h_{ij} = \delta_{ij}$, 那么

$$E(u) = \sum_{i=1}^k \int |\nabla u^i|^2 dv_M.$$

所以, u 是调和的充要条件是 $\Delta_M u^i = 0, i = 1, \dots, k$, 即每一个坐标函数是调和的.

(2) 如果 $M = [0, 1]$ (换言之, u 是 N 中的曲线), 那么, u 的能量是 $E(u) = \int_0^1 \|\frac{du}{dt}\|^2 dt$, 并且 E 的临界点是具有常速率参数化的测地线. 注意到另一个能量泛函 E' , 定义为 $E'(u) = \int_0^1 \|\frac{du}{dt}\| dt$, 它给我们相同的临界点——测地线. 但是, 那些测地线不具有常速率参数化, 因为 E' 和参数选取无关.

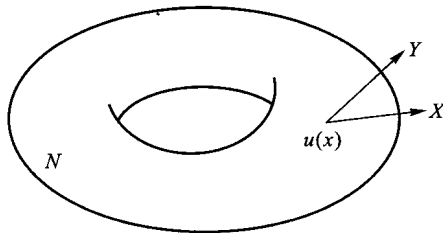
§2. 调和映照的方程

假定将 N 等距地嵌入到欧氏空间 $\mathbb{R}^k$. 我们可以将映照 u 看作对任何 $x \in M$ 满足逐点限制 $u(x) \in N$ 的坐标函数 $u = (u^1, \dots, u^k)$. 因此,

$$E(u) = \sum_{i=1}^k \int_M |\nabla u^i|^2 dv_M.$$

考察调和映照的一个好观点是考察 E 在限制条件 $u(x) \in N, \forall x \in M$ 下的极值. 从而, 我们得到调和映照方程

$$\Delta u^i - g^{\alpha\beta} A_{u(x)}^i \left(\frac{\partial u}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial u}{\partial x^\beta} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad (*)$$



其中 A 是 N 的第二基本形式, 定义为 $A_u(X, Y) = (D_X Y)^\perp$. 由于 (*) 中的第二项是 N 的法向, 我们可以将 (*) 简单地写为 $(\Delta u)^{T_u N} \equiv 0$ 并满足约束条件. 在 N 的局部坐标下, 方程 (*) 变为

$$\Delta u^i + g^{\alpha\beta} \Gamma_{j\ell}^i(u(x)) \frac{\partial u^j}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^\ell}{\partial x^\beta} \equiv 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

其中 $\Gamma_{j\ell}^i$ 表示 N 的克氏记号.

§3. 曲面上的问题

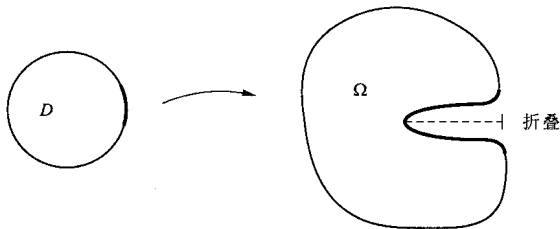
本章的其余部分我们限于研究 $n = 2$ 的情形. 这种情形的最显著特征是能量的共形不变性: 如果 M 上赋予度量 $g = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ 并且令 $\tilde{g} = e^{2v} g$, $v \in C^\infty(M)$. 那么 $|\tilde{d}u|^2 = e^{-2v} |du|^2$ 并且 $\sqrt{\det \tilde{g}} = e^{2v} \sqrt{\det g}$, 所以, $\tilde{E}(u) = E(u)$, 即能量在共形变换下不变.

选取 M 上的等温坐标系 (x, y) 使 $g = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$, $\lambda > 0$. 设 $z = x + iy$. 那么, 由正定向的等温坐标系所定义的共形结构定义了一个复结构, 从而使 (M, z) 是一个具有 Kähler 度量 $g = \lambda(z)|dz|^2$ 的一个 Riemann 面. 能量的共形不变性意味着 $E(u)$ 只依赖于 M 的复结构而不依赖于 M 的度量 g .

§4. Rado 定理

定理 (Rado, 1930) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的凸区域. 对任意给定的同胚 $\phi: S^1 \rightarrow \partial\Omega$, 存在唯一的调和映照 $u: D \rightarrow \Omega$, 使在 $\partial D = S^1$ 上 $u = \phi$, 并且 u 是一个微分同胚.

附注 在所有保定向的, 在边界 ∂D 上是 1-1 并且连续的同胚 $D \rightarrow \Omega$ 中, Riemann 映照定理的那个映照是能量极小的. 如果 Ω 不是凸的, 那么上述定理就不成立, 因为如果映照 ϕ 将 ∂D 中一点的一个小邻域映照到 $\partial\Omega$ 的一大段凹进去部分, 那么在 $\partial\Omega$ 的凹部附近就发生折叠, 如下图所示.



证明 u 的存在唯一性从标准的偏微分方程理论得到. 因此, 还要证明 u 是微分同胚 (注意到调和映照不一定保持定向). 只要说明, 在 D 中 $\det J(u) \neq 0$, 其中 $J(u)$ 是 u 的 Jacobi 行列式. 否则, 假定在 $(x_0, y_0) \in D$,

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{pmatrix} = 0.$$

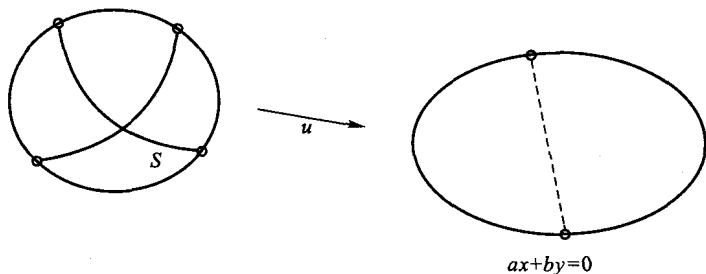
这里, 我们假定 $u = (u_1, u_2)$, $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, 并且 u_1, u_2 分别是 ϕ_1, ϕ_2 的调和延拓, 即在 D 中, $\Delta u_i = 0$ 并且在 S^1 上 $u_i = \phi_i$. 那么, 存在 $(a, b) \neq (0, 0)$, 使得在 (x_0, y_0)

$$\frac{\partial}{\partial x}(a u_1 + b u_2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}(a u_1 + b u_2) = 0$$

令 $h = a u_1 + b u_2$. 那么, h 是调和的并且在 (x_0, y_0) 点 $\nabla h = 0$. 设

$$S = \{(x, y) : h(x, y) = h(x_0, y_0)\}.$$

如果 $D \setminus S$ 有一个和边界 ∂D 不相交的连通分支 K , 那么, 在 ∂K 上 $h = 0$, 从而根据极值原理, 在 K 中 $h = 0$. 这是不可能的. 在 (x_0, y_0) 的一个小邻域内至少有 4 条从 (x_0, y_0) 出发的曲线都延伸到边界, 因此, $\partial D \cap S$ 至少包含 4 个点. 另一方面, S 是直线 $ax + by = 0$ 在映照 u 下的原像. 由于 Ω 是凸的, 直线和 $\partial\Omega$ 的交只有 2 个点. 这样, u 将 ∂D 上的 4 个点映到 $\partial\Omega$ 中的 2 个点, 与 ϕ 是 1-1 的假定矛盾. 所以 u 是局部微分同胚, 它又是逆紧的, 从而是微分同胚.



§5. Hopf 微分

设 $u : M^2 \rightarrow N^k$ 是调和映照. 在以 $u(x)$ 为中心的法坐标系中, 由于 $\Gamma_{jk}^i(u(x)) = 0$, 调和映照方程化为 $\Delta u^i(x) = 0$. 另一方面, $\Delta u^i = 4 \frac{\partial^2 u^i}{\partial z \partial \bar{z}}$. 如

果我们定义

$$\varphi(z) = \left\langle \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right\rangle,$$

或者等价地

$$\varphi(z) = \sum_{i,j} h_{ij}(u(z)) \frac{\partial u^i}{\partial z} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{z}}.$$

考虑到 $\varphi(z)$ 和坐标选取无关, 而在法坐标中心 ∇h_{ij} 为零, $\frac{\partial \varphi(z)}{\partial \bar{z}} = 0$ (即 $\varphi(z)$ 是全纯的). 定义 $\Phi = \varphi(z) dz^2$, 它称为 **Hopf 微分**. 注意到 Φ 和局部坐标 z 的选取无关, 而 φ 则不然. 当 u 是调和的时候, Φ 是一个全纯二次微分. 由于

$$\varphi(z) = \left\langle \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right\rangle = \frac{1}{4} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 - \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 - 2i \left\langle \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right\rangle \right),$$

我们看到 $\varphi(z) \equiv 0$ 的充要条件为 u 是共形的. 因此, $\Phi \equiv 0$ 的充要条件为 $u(M)$ 是 N 中的分支极小曲面 (调和并且共形等价于极小).

命题 从球面出发的调和映照 $u: S^2 \rightarrow N^k$ 一定是共形映照.

证明 我们来说明 S^2 上没有非零的全纯二次微分. 假定 $\Phi = \varphi(z) dz^2$ 是 S^2 上的全纯二次微分. 那么, φ 是 $\mathbb{C} = S^2 \setminus \{\infty\}$ 上的整函数, 并且 φdz^2 在无穷远处是正则的. 设 $w = \frac{1}{z}$, 并且 $\Phi = \varphi(z(w)) w^{-4} dw^2$. 这样, $\varphi(z(w)) w^{-4}$ 在 $w = 0$ 处是正则的, 在 $w = 0$ 附近 $\varphi(z(w)) \leq c|w|^4$, 因此, 在 $z = \infty$ 附近 $\varphi(z) \leq c|z|^{-4}$. 根据极大模原理 $\Phi \equiv 0$. u 是共形的.

推论 (1) 从球面到球面的调和映照 $u: S^2 \rightarrow S^2$ 一定是全纯映照, 如果它保持定向, 否则它是反全纯映照. (2) 不存在从球面 S^2 到正亏格的曲面 N^2 的非平凡的调和映照, 不论 N^2 上的度量如何.

证明 (1) 应用上述命题 u 是全纯映照或反全纯映照.

(2) 设 $\tilde{N}$ 是 N 的单连通覆盖空间, $\tilde{u}$ 是 u 的提升 (即 $P \circ \tilde{u} = u$). 那么 $\tilde{N}$ 共形等价于 $\mathbb{C}$ 或 D , 并且 $\tilde{u}$ 也是全纯映照或反全纯映照. 不管何种情形, $\tilde{u}$ 产生了一个 S^2 上的全纯函数, 由极值原理, 它一定是常数.

附注 可以构造从环面 T^2 到任何曲面的调和映照.

§6. 方程的复形式

设 M, N 是紧致无边定向的曲面, u 是 M 到 N 的映照. 设 $z = x + iy$, $u = u_1 + iu_2$ 分别是 M, N 的复坐标. 那么, M, N 上的度量分别是 $\lambda(z)|dz|^2$, $\rho(u)|du|^2$.

映照 u 局部表示为 $u = u(z)$. 记

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

那么,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - i \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - i \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right], \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \right], \\ |du|^2 &= \frac{\rho(u(z))}{\lambda(z)} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 \right) \\ &= 2 \frac{\rho(u(z))}{\lambda(z)} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right|^2 \right) = 2(|\partial u|^2 + |\bar{\partial} u|^2), \\ J(u) &= \frac{\rho}{\lambda} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = |\partial u|^2 - |\bar{\partial} u|^2, \end{aligned}$$

其中 $J(u)$ 是 u 的 Jacobi 行列式. 因此

$$|du|^2 = 2(2|\partial u|^2 - J(u)) = 4|\partial u|^2 - 2J(u).$$

现在, 我们来推导调和映照方程的复形式. 设 $u_t = u + t\eta$, 这里 η 是具紧支集的 C^∞ 复值函数. 那么,

$$\begin{aligned} E(u_t) &= 2 \left(\int_M |\partial u_t|^2 \lambda dx dy + \int_M |\bar{\partial} u_t|^2 \lambda dx dy \right) \\ &= 4 \int_M |\partial u_t|^2 \lambda dx dy - 2 \int_M J(u_t) \lambda dx dy. \end{aligned}$$

注意到 $\int_M J(u_t) \lambda dx dy = \deg(u_t) \cdot \text{vol}(N)$. 所以, 对任何 η

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(u_t) \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} 4 \int_M |\partial u_t|^2 \lambda dx dy \Big|_{t=0} \\ &= 4 \int (\rho_u \eta + \rho_{\bar{u}} \bar{\eta}) |u_z|^2 + \rho(\eta_z \bar{u}_z + u_z \bar{\eta}_z) dx dy \\ &= 8 \int \text{Re}(\rho(u) u_z \bar{\eta}_z + \rho_{\bar{u}} \bar{\eta} |u_z|^2) dx dy \\ &= 8 \int \text{Re}[\{-(\rho_u u_z + \rho_{\bar{u}} \bar{u}_z) u_z - \rho u_{z\bar{z}} + \rho_{\bar{u}} |u_z|^2\} \bar{\eta}] dx dy \\ &= 8 \int \text{Re}[-\rho u_{z\bar{z}} - \rho_u u_z u_z] \bar{\eta} dx dy \\ &= 0. \end{aligned}$$